ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ	ΜΑΘΗΜΑ: ΚΛΑΣΙΚΗ ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ Ι
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ	ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι. ΡΙΖΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ - 14-9-2012

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:... ΑΜ:.....................

Θέμα 1 (2.5 μονάδες)
(i) Λόγω συμμετρίας αναμένουμε $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss για μια μια σφαίρα με ακτίνα $r < a$, βρίσκουμε

$$\int_V \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_\pi}{\epsilon_0} \Rightarrow 4\,\pi\,r^2\,E(r) = \frac{4\,q_0}{\epsilon_0\,a^4}\int_0^r dr' r'^2(r'-3a) = \frac{4\,q_0}{\epsilon_0\,a^4}\left(\frac{r^4}{4} - r^3\,a\right) \Rightarrow$$
$$E(r) = \frac{q_0}{4\,\pi\,\epsilon_0\,a^4} r\,(r-4\,a) \quad ,\ r < a \tag{1}$$

Για $a < r < 2a$ στο εσωτερικό του αγωγού έχουμε $\vec{E} = 0$.
Για $r > 2a$, εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss για μια μια σφαίρα με ακτίνα $r > a$, βρίσκουμε για το περικλειόμενο φορτίο

$$q_\pi = q_0 + \frac{4\,q_0}{\epsilon_0\,a^4}\int_0^a dr' r'^2(r'-3a) = -2\,q_0 \tag{2}$$

$$E(r) = -\frac{q_0}{2\,\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2} \tag{3}$$

(ii)

$$V(2a) = -\int_{+\infty}^{2a} d\vec{r}\cdot\vec{E} = \frac{q_0}{2\,\pi\epsilon_0}\int_{+\infty}^{2a}\frac{dr}{r^2} = -\frac{q_0}{4\,\pi\epsilon_0\,a} \tag{4}$$

(iii) Το ηλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται για $r > 2a$, αλλά παραμένει ως έχει στο εσωτερικό του αγωγού. Στην εσωτερική επιφάνεια $r = a$ έχουμε

$$\sigma(a) = -\epsilon_0 E(a) = +\frac{3\,q_0}{4\,\pi\,a^2} \tag{5}$$

Θέμα 2 (2.5 μονάδες)

(i) Η διάταξη παρουσιάζει αξονική συμμετρία. Η γενική λύση της εξίσωσης του Laplace δίνεται από

$$V_2(r) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell\,r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right)P_\ell(\cos\theta)\ ,\ r > R \tag{6}$$
$$V_1(r) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(C_\ell\,r^\ell + \frac{D_\ell}{r^{\ell+1}}\right)P_\ell(\cos\theta)\ ,\ r < R \tag{7}$$

Ο μηδενισμός του δυναμικού στο $r = \infty$ συνεπάγεται $A_\ell = 0, \ell = 0, 1, \ldots$ ενώ η απαίτηση να είναι πεπερασμένο το δυναμικό στο $r = 0$ δίνει $D_\ell = 0, \ell = 0, 1, \ldots$. Ακόμη

$$V_2(R) = V_1(R) \Rightarrow \frac{B_\ell}{R^{\ell+1}} = C_\ell\,R^\ell \Rightarrow B_\ell = C_\ell\,R^{2\ell+1} \tag{8}$$
$$2\epsilon\left.\frac{\partial V_2}{\partial r}\right|_{r=R} - \epsilon\left.\frac{\partial V_1}{\partial r}\right|_{r=R} = -\sigma \Rightarrow \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(-2\epsilon(\ell+1)\frac{B_\ell}{R^{\ell+2}} - \epsilon\,\ell\,C_\ell\,R^{\ell-1}\right)P_\ell(\cos\theta) = -\sigma$$
$$\Rightarrow \epsilon\sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell\,R^{\ell-1}\,(3\ell+2)\,P_\ell(\cos\theta) = \sigma_0\cos\theta + \sigma_0 \tag{9}$$

Επομένως

$$C_0 = \frac{\sigma_0\, R}{2\epsilon}\ ,\ C_1 = \frac{\sigma_0}{5\epsilon}\ ,\ C_\ell = 0\ ,\ell = 2, 3, \ldots \tag{10}$$

$$B_0 = \frac{\sigma_0\, R^2}{2\epsilon}\ ,\ B_1 = \frac{\sigma_0}{5\epsilon} R^3, B_\ell = 0\ ,\ell = 2, 3, \ldots \tag{11}$$

$$\tag{12}$$

και

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{2\epsilon}\frac{R^2}{r} + \frac{\sigma_0}{5\epsilon}\frac{R^3}{r^2}\ \cos\theta\ , & r > R \\ \frac{\sigma_0\, R}{2\epsilon} + \frac{\sigma_0}{5\epsilon} r\ \cos\theta\ , & r < R \end{cases} \tag{13}$$

(ii)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V(r) = \hat{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = \begin{cases} \hat{r}\frac{\sigma_0\, R^2}{\epsilon}\left(\frac{1}{2r^2} + \frac{2R}{5r^3}\ \cos\theta\right) + \hat{\theta}\frac{\sigma_0}{5\epsilon}\frac{R^3}{r^3}\ \sin\theta\ , & r > R \\ -\hat{r}\frac{\sigma_0}{5\epsilon}\cos\theta + \hat{\theta}\frac{\sigma_0}{5\epsilon}\sin\theta\ , & r < R \end{cases} \tag{14}$$

(iii) Για γραμμικά διηλεκτρικά $\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0)\ \vec{E}$

$$\begin{aligned} \rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} &= -\left(\epsilon - \epsilon_0\right)\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta E_\theta\right)\right] \\ &= \frac{(\epsilon-\epsilon_0)\sigma_0}{5\epsilon}\left[\frac{2\cos\theta}{r} - \frac{2\cos\theta}{r}\right] = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Θέμα 3 (2.5 μονάδες: A=1.5 B=1.0)
A. Στην περιοχή $r_1 < r < r_2$

$$\vec{\nabla}^2 V = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{C}{r} \Rightarrow V = C\int\frac{dr}{r} + D \Rightarrow V = C\ \ln r + D \tag{16}$$

Από τις συνοριακές συνθήκες

$$V(r_1) = V_0 \Rightarrow C\ \ln a + D = V_0 \tag{17}$$

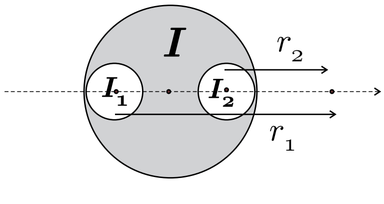
$$V(r_2) = 2V_0 \Rightarrow C\ \ln(3a) + D = 2V_0 \tag{18}$$

$$C = \frac{V_0}{\ln 3}\ ,\ D = V_0\left(1 - \frac{\ln a}{\ln 3}\right) \Rightarrow V(r) = \frac{V_0}{\ln 3}\ln\left(\frac{3r}{a}\right) \tag{19}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{V_0}{\ln 3}\frac{\hat{r}}{r} \tag{20}$$

B. βλ σημειώσεις

Θέμα 4 (2.5 μονάδες)
Χρησιμοποιώντας το νόμο του Ampere δείχνουμε ότι το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό αγωγού ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα I δίνεται από $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\phi}$. Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο της επαλληλίας, το μαγνητικό πεδίο στην περιοχή $r > 3a/2$ συμπίπτει με αυτό που παράγεται από το σύστημα τριών αγωγών με ρεύματα I_1, I', I_2.



Η πυκνότητα ρεύματος για τον αγωγό με ρεύμα I είναι $j = \frac{I}{\pi(3a/2)^2 - \pi(a/2)^2 - \pi(a/2)^2} = \frac{4I}{7\pi a^2}$. Επομένως $I_1 = I_2 = -\frac{4I}{7\pi a^2}\frac{\pi a^2}{4} = -\frac{I}{7}$ και $I' = \frac{4I}{7\pi\, a^2}\pi(\frac{3a}{2})^2 = \frac{9I}{7}$ Το μαγνητικό πεδίο σε απόσταση $r > 3a/2$ από το κέντρο του αγωγού I και πάνω στον άξονα x δίνεται από $\vec{B} = B\hat{y}$ με

$$B = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} = \frac{9\mu_0 I}{14\pi x} - \frac{\mu_0 I}{14\pi(x+a)} - \frac{\mu_0 I}{14\pi(x-a)} = \frac{\mu_0 I}{14\pi x}\frac{7x^2 - 9a^2}{x^2 - a^2}\ ,\ x > 3a/2 \quad (21)$$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Εξισώσεις Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{(T2)} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{(T4)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{(T3)} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0\, \epsilon_0\, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{(T5)}$$

Πεπερασμένη στατική κατανομή φορτίων

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}'\, \rho(\vec{r}) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad \text{(T6)}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{(T7)}$$

$$W = \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{r} \left|\vec{E}\right|^2 \quad \text{(T8)}$$

Ηλεκτροστατικές συνοριακές συνθήκες

$$E_{\parallel}^2 - E_{\parallel}^1 = 0\ ,\ \epsilon_2 E_{\perp}^2 - \epsilon_1 E_{\perp}^1 = \sigma_f \quad \text{(T9)}$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό σε αξονική συμμετρία

$$V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell\, r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\theta) \quad \text{(T10)}$$

Διηλεκρικά και μαγνητικά υλικά

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad ,\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \quad \text{(T11)}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}\ ,\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_f \quad \text{(T12)}$$

Μαγνητοστατικές συνοριακές συνθήκες

$$B_{\perp}^2 - B_{\perp}^1 = 0\ \ ,\ \frac{1}{\mu_2} B_{\parallel}^2 - \frac{1}{\mu_1} B_{\parallel}^1 = K \quad \text{(T13)}$$

Ιδιότητες συνάρτησης δ

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} = 4\,\pi\,\delta\,(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad \text{(T14)}$$

Διάφορα Ολοκληρώματα

$$\int_0^d dx \sin\left(\frac{m\,\pi\,x}{d}\right) \sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{d}\right) = \frac{d}{2} \delta_{mn} \quad \text{(T15)}$$

Διαφορικοί Τελεστές

$$\vec{\nabla} f = \frac{\hat{e}_1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\hat{e}_2}{h_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\hat{e}_3}{h_3} \frac{\partial f}{\partial x_3} \quad \text{(T16)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 A_3) \right] \quad \text{(T17)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{h_1\, h_2\, h_3} \begin{vmatrix} h_1\, \hat{e}_1 & h_2\, \hat{e}_2 & h_3\, \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \quad \text{(T18)}$$

Συντεταγμένες	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3
Καρτεσιανές	x	y	z	1	1	1
Σφαιρικές	r	θ	ϕ	1	r	$r\,\sin\theta$
Κυλινδρικές	r	ϕ	z	1	r	1

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad \text{(T19)}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \text{(T20)}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \hat{r} \left(\nabla^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) + \hat{\phi} \left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) + \hat{z} \nabla^2\, A_z \quad \text{(T21)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(f \vec{C} \right) = f \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{C} \right) + \vec{C} \cdot \left(\vec{\nabla} f \right) \quad \text{(T22)}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{C} \right) = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{C} \right) - \nabla^2 \vec{C} \quad \text{(T23)}$$

Πολυώνυμα Legendre

$$P_0(x) = 1\ , P_1(x) = x\ , P_2(x) = \frac{1}{2} \left(3x^2 - 1 \right)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} \left(5x^3 - 3x \right) \quad \text{(T24)}$$

$$\int_{-1}^{+1} dx\, P_n(x)\, P_m(x) = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & , n = m \end{cases} \quad \text{(T25)}$$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\sin(\theta + \phi) = \sin\theta\, \cos\phi + \cos\theta\, \sin\phi \quad \text{(T26)}$$

$$\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\, \cos\phi - \sin\theta\, \sin\phi \quad \text{(T27)}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{(T28)}$$