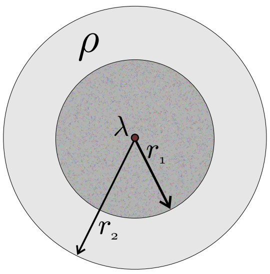
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ	ΜΑΘΗΜΑ: ΚΛΑΣΙΚΗ ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ Ι
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ	ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι. ΡΙΖΟΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 5-2-2013

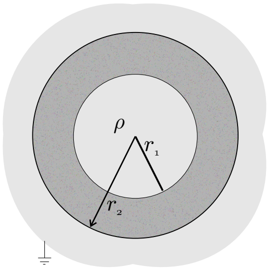
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:.. ΑΜ:..................

Θέμα 1 (2.5 μονάδες)



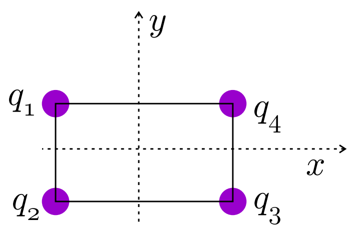
Φορτισμένο σύρμα μεγάλου μήκους βρίσκεται στο κέντρο κυλινδρικού φλοιού επίσης μεγάλου μήκους και ακτίνων $r_1 = a, r_2 = 2a$. Διατομή της διάταξης φαίνεται στο Σχήμα. Το σύρμα φέρει σταθερή γραμμική πυκνότητα φορτίου λ ενώ ο κυλινδρικός φλοιός φέρει πυκνότητα φορτίου $\rho = \frac{\lambda}{a\,r}\sin\left(\frac{\pi\,r}{2a}\right)$. Στο εσωτερικό του κυλινδρικού φλοιού είναι γεμάτο με γραμμικό διηλεκτρικό ηλεκτρικής διαπερατότητας ϵ.
(i) Χρησιμοποιώντας το νόμο του Gauss υπολογίστε την ηλεκτρική μετατόπιση και το ηλεκτρικό πεδίο σε όλο το χώρο.
(ii) Βρείτε την πόλωση και τα φορτία πόλωσης σε όλο το χώρο.

Θέμα 2 (2.5 μονάδες)



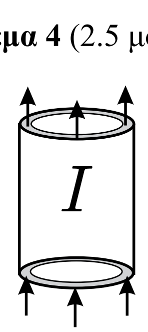
Μονωτική σφαίρα ακτίνας $r_1 = R$ η οποία φέρει πυκνότητα φορτίου $\rho(r) = \rho_0\left(\frac{r}{R}\right)^3$ τοποθετείται στο εσωτερικό γειωμένης σφαιρικής κοιλότητας ακτίνας $r_2 = 3R$ όπως στο Σχήμα. Στο χώρο μεταξύ της μονωτικής σφαίρας και του αγωγού τοποθετείται γραμμικό διηλεκτρικό διηλεκτρικής σταθεράς $\kappa = 3$.
(i) Γράψτε τη διαφορική εξίσωση/εις που ικανοποιεί το ηλεκτρικό δυναμικό για $r < r_2$.
(ii) Επιλύοντας την εξίσωση (i) υπολογίστε το δυναμικό σε όλο το χώρο.

Θέμα 3 (2.5 μονάδες)



Τέσσερα φορτία q_1, q_2, q_3, q_4 βρίσκονται στις κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου, πλευρών a και $2a$, στο επίπεδο xy όπως στο Σχήμα. Δίνεται $q_1 = 2\,q, q_2 = -3q$.
(i) Προσδιορίστε τα φορτία q_3, q_4 έτσι ώστε η διπολική ροπή του συστήματος να μηδενίζεται.
(ii) Υπολογίστε την τετραοπλική ροπή του συστήματος χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα (i).
(iii) Χρησιμοποιώντας τα ανωτέρω αποτελέσματα υπολογίστε προσεγγιστικά το δυναμικό στην περιοχή $r >> a$.

Θέμα 4 (2.5 μονάδες)



Λεπτός κυλινδρικός φλοιός μεγάλου μήκους και ακτίνας R διαρρέεται από ρεύμα έντασης I το οποίο ρέει παράλληλα με τον άξονά του όπως στο Σχήμα.
(i) Γράψτε την εξίσωση που ικανοποιεί το διανυσματικό δυναμικό.
(ii) Επιλύοντας την (i) βρείτε το διανυσματικό δυναμικό σε όλο το χώρο, θέτοντας τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες όπου απαιτείται.
(iii) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα (ii) βρείτε το μαγνητικό πεδίο σε όλο το χώρο.
(iv) Πως θα άλλαξε το αποτέλεσμα (iii) αν το εσωτερικό του φλοιού ήταν γεμάτο με διαμαγνητικό υλικό μαγνητικής διαπερατότητας μ.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Εξισώσεις Maxwell

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{(T1)} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{(T3)}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad \text{(T2)} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\,\epsilon_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad \text{(T4)}$$

Πεπερασμένη στατική κατανομή φορτίων

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\int d^3\vec{r}'\,\rho(\vec{r})\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \quad \text{(T5)}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\vec{r}'\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad \text{(T6)}$$

$$W = \frac{1}{2}\int d^3\vec{r}\rho(\vec{r})V(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3\vec{r}\,\left|\vec{E}\right|^2 \quad \text{(T7)}$$

Ηλεκτροστατικές συνοριακές συνθήκες

$$E_\parallel^2 - E_\parallel^1 = 0\,,\ \epsilon_2 E_\perp^2 - \epsilon_1 E_\perp^1 = \sigma_f \quad \text{(T8)}$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό σε αξονική συμμετρία

$$V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell\,r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right)\,P_\ell(\cos\theta) \quad \text{(T9)}$$

Διηλεκρικά και μαγνητικά υλικά

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} \quad ,\ \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_f \quad \text{(T10)}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}\,,\ \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j}_f \quad \text{(T11)}$$

Μαγνητοστατικές συνοριακές συνθήκες

$$B_\perp^2 - B_\perp^1 = 0\ ,\ \hat{\eta}\times\left(\vec{H}^2 - \vec{H}^1\right) = \vec{K} \quad \text{(T12)}$$

Πολυπολικό ανάπτυγμα

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{r} + \frac{1}{r^3}\vec{r}\cdot\vec{p} + \frac{1}{2r^5}\sum_{i,j=1}^{3} r_i\,r_j\,Q_{ij} + \dots\right]\ ,\ r \gg r' \quad \text{(T13)}$$

$$\vec{p} = \int d^3\vec{r}'\rho(\vec{r}')\vec{r}' \quad \text{(T14)}$$

$$Q_{ij} = \int d^3\vec{r}'\rho(\vec{r}')\left(3r'_i\,r'_j - r'^2\delta_{ij}\right) \quad \text{(T15)}$$

Διαφορικοί Τελεστές

$$\vec{\nabla}f = \frac{\hat{e}_1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\hat{e}_2}{h_2}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\hat{e}_3}{h_3}\frac{\partial f}{\partial x_3} \quad \text{(T16)}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2h_3A_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_3h_1A_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1h_2A_3)\right] \quad \text{(T17)}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{h_1\,h_2\,h_3}\begin{vmatrix} h_1\,\hat{e}_1 & h_2\,\hat{e}_2 & h_3\,\hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix} \quad \text{(T18)}$$

Συντεταγμένες	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3
Καρτεσιανές	x	y	z	1	1	1
Σφαιρικές	r	θ	ϕ	1	r	$r\,\sin\theta$
Κυλινδρικές	r	ϕ	z	1	r	1

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} \quad \text{(T19)}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \text{(T20)}$$

$$\nabla^2\vec{A} = \hat{r}\left(\nabla^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right) + \hat{\phi}\left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}\right) + \hat{z}\nabla^2 A_z \quad \text{(T21)}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{C}\right) = f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{C}\right) + \vec{C}\cdot\left(\vec{\nabla}f\right) \quad \text{(T22)}$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{C}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{C}\right) - \nabla^2\vec{C} \quad \text{(T23)}$$

Πολυώνυμα Legendre

$$P_0(x) = 1\,,\,P_1(x) = x\,,\,P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right) \quad \text{(T24)}$$

$$\int_{-1}^{+1} dx\,P_n(x)\,P_m(x) = \begin{cases} 0 & ,m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & ,n = m \end{cases} \quad \text{(T25)}$$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \quad \text{(T26)}$$

(T27)