ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ	ΜΑΘΗΜΑ: ΚΛΑΣΙΚΗ ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ Ι
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ	ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι. ΡΙΖΟΣ

ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 5-2-2013

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:.. ΑΜ:..................

Θέμα 1 (2.5 μονάδες)
(i) Για $r < r_1$ θεωρούμε ως επιφάνεια Gauss κύλινδρο μεγάλους μήκους h και ακτίνας $r < r_1$ με άξονα το σύρμα. Λόγω συμμετρίας αναμένουμε $\vec{D} = D(r)\hat{r}$. Από το νόμο του Gauss παρουσία διηλεκτρικού έχουμε

$$\int \overrightarrow{dS} \cdot \vec{D} = q_F \Rightarrow r\, D(r) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h dz = \lambda\, h \Rightarrow 2\,\pi\, r\, h\, D(r) = \lambda\, h \Rightarrow D(r) = \frac{\lambda}{2\,\pi\, r}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $\overrightarrow{dS} = r\, d\phi\, dz\, \hat{r}$ για την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου, ενώ για τις δύο βάσεις $\overrightarrow{dS} \cdot \vec{D} = 0$. Καθώς έχουμε γραμμικό διηλεκτρικό $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\epsilon\, r}\hat{r}$.
Για $r_1 < r < r_2$ προχωρώντας ανάλογα παίρνουμε

$$2\,\pi\, r\, h\, D(r) = \lambda\, h + \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^r dr' r'\, \rho(r') = \lambda\, h + 2\,\lambda\,\pi\, h\, a \int_a^r dr' \sin\left(\frac{\pi\, r'}{2a}\right) =$$
$$= \lambda\, h - 4\,\lambda\, h \cos\left(\frac{\pi\, r'}{2a}\right)\Bigg|_a^r = \lambda\, h\left(1 - 4\cos\left(\frac{\pi\, r}{2a}\right)\right) \Rightarrow D(r) = \frac{\lambda}{2\pi r}\left(1 - 4\cos\left(\frac{\pi\, r}{2a}\right)\right)$$

και $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0}$.
Για $r > r_2$ παίρνουμε ομοίως

$$2\,\pi\, r\, h\, D(r) = \lambda\, h + \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^{2a} dr' r'\, \rho(r') = \lambda\, h - 4\,\lambda\, h \cos\left(\frac{\pi\, r'}{2a}\right)\Bigg|_a^{2a} = 3\,\lambda\, h \Rightarrow D(r) = \frac{5\,\lambda}{2\,\pi\, r}$$

και $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0}$.
(ii) Για γραμμικό διηλεκτρικό $\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0)\,\vec{E}$ επομένως η πόλωση είναι μηδέν παντού εκτός από $0 < r < r_1$ όπου έχουμε $\vec{P} = \frac{\lambda(\epsilon-\epsilon_0)}{2\,\pi\,\epsilon\, r}\hat{r}$.
Η μόνη πιθανή περιοχή για την ύπαρξη χωρικών φορτίων πόλωσης είναι η $0 < r < r_1$ όμως εκεί δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία και καθώς η ρ_P είναι ανάλογη της ρ_F συμπεραίνουμε ότι τα χωρικά φορτία πόλωσης μηδενίζονται παντού. Για τα επιφανειακά φορτία πόλωσης έχουμε $\sigma_P(r) = \vec{P} \cdot \hat{\eta}$ η οποία για $r = a, \hat{\eta} = \hat{r}$ δίνει $Q_P = 2\pi\, r\, h\, \sigma(r)|_{r=a} = \frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon}\,\lambda\, h$. Δίπλα στο σύρμα, για $r = 0$ έχουμε ίσο και αντίθετο φορτίο $-Q_P$.

Θέμα 2 (2.5 μονάδες)
(i) Το δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση Poisson $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$. Λόγω σφαιρικής συμμετρίας της κατανομής και των συνοριακών συνθηκών αναμένουμε $V = V(r)$. Επομένως το δυναμικό ικανοποιεί τις διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = \begin{cases} -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(\frac{r}{R}\right)^3 & r < R \\ 0 & R < r < 3R \end{cases} \tag{1}$$

(ii) Στην περιοχή $r < R$ παίρνουμε

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV_1}{dr}\right) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{r^5}{R^3} \Rightarrow r^2\frac{dV_1}{dr} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\int dr\,\frac{r^5}{R^3} + A = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0\,R^3}\frac{r^6}{6} + A \Rightarrow \frac{dV_1}{dr} = -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0}\frac{r^4}{R^3} + \frac{A}{r^2} \Rightarrow$$

$$V_1 = -\int dr\frac{\rho_0}{6\epsilon_0}\frac{r^4}{R^3} + \int dr\frac{A}{r^2} + B = -\frac{\rho_0}{30\epsilon_0}\frac{r^5}{R^3} - \frac{A}{r} + B \tag{2}$$

Στην περιοχή $R < r < 3R$ παίρνουμε

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV_2}{dr}\right) = 0 \Rightarrow r^2\frac{dV_2}{dr} = C \Rightarrow V_2 = \int dr\frac{C}{r^2} + D = -\frac{C}{r} + D \tag{3}$$

Το δυναμικό θα πρέπει να είναι πεπερασμένο στο $r = 0$ επομένως $A = 0$. Επίσης από τις συνοριακές συνθήκες έχουμε

$$V_2(3R) = 0 \Rightarrow -\frac{C}{3R} + D = 0 \tag{4}$$

$$V_1(R) = V_2(R) \Rightarrow -\frac{\rho_0}{30\epsilon_0}R^2 + B = -\frac{C}{R} + D \tag{5}$$

$$-\epsilon_0\left.\frac{\partial V_1}{\partial r}\right|_{r=R} = -\epsilon\left.\frac{\partial V_2}{\partial r}\right|_{r=R} \Rightarrow -\frac{\rho_0}{6}R = \frac{\epsilon\,C}{R^2} \tag{6}$$

Από τα παραπάνω και για $\epsilon = \kappa\epsilon_3 = 3\epsilon$ βρίσκουμε $C = -\frac{\rho_0\,R^3}{18\,\epsilon_0}$, $D = -\frac{\rho_0\,R^2}{54\epsilon_0}$, $B = \rho_0\,R^2\,\frac{19}{270\epsilon_0}$. Επομένως

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\rho_0}{30\epsilon_0}\frac{r^5}{R^3} + \frac{19\,\rho_0\,R^2}{270\epsilon_0} & ,r < R \\ \frac{\rho_0\,R^3}{18\,\epsilon_0}\frac{1}{r} - \frac{\rho_0\,R^2}{54\epsilon_0} & ,R < r < 3R \end{cases} \tag{7}$$

Θέμα 3 (2.5 μονάδες)
Η πυκνότητα φορτίου γράφεται ως

$$\rho(x,y,z) = q_1\,\delta\,(x+a)\,\delta\left(y-\frac{a}{2}\right)\delta(z) + q_2\,\delta\,(x+a)\,\delta\left(y+\frac{a}{2}\right)\delta(z) \tag{8}$$

$$+\,q_3\,\delta\,(x-a)\,\delta\left(y+\frac{a}{2}\right)\delta(z) + q_4\,\delta\,(x-a)\,\delta\left(y-\frac{a}{2}\right)\delta(z) \tag{9}$$

(i) Η διπολική ροπή δίνεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες από

$$p_x = \int dx'dy'dz'x\,\rho(x',y',z') = -q_1\,a - q_2\,a + q_3\,a + q_4\,a \tag{10}$$

$$p_x = \int dx'dy'dz'y\,\rho(x',y',z') = q_1\,\frac{a}{2} - q_2\,\frac{a}{2} - q_3\,\frac{a}{2} + q_4\,\frac{a}{2} \tag{11}$$

$$p_z = \int dx'dy'dz'z\,\rho(x',y',z') = 0 \tag{12}$$

Μηδενισμός της διπολικής ροπής συνεπάγεται $q_3 + q_4 = -q$, $q_3 - q_4 = 5q \Rightarrow q_3 = 2q, q_4 = -3q$ (ii)

Σύμφωνα με την (T15)

$$Q_{11} = \int dx'dy'dz'x\, \rho(x',y',z') \left(2x'^2 - y'^2 - z'^2\right) = (q_1+q_2+q_3+q_4)\,\frac{7a^2}{4} = -7q\,\frac{a^2}{2} \tag{13}$$

$$Q_{22} = \int dx'dy'dz'x\, \rho(x',y',z') \left(2y'^2 - x'^2 - z'^2\right) = -\,(q_1+q_2+q_3+q_4)\,\frac{a^2}{2} = q\,a^2 \tag{14}$$

$$Q_{33} = \int dx'dy'dz'x\, \rho(x',y',z') \left(2z'^2 - x'^2 - y'^2\right) = -\,(q_1+q_2+q_3+q_4)\,\frac{5a^2}{2} = 5q\,\frac{a^2}{2} \tag{15}$$

$$Q_{12} = Q_{21} = 3\int dx'dy'dz'x\, \rho(x',y',z')\, x'\, y' = (q_1+q_3)\,\frac{3\,a^2}{2} - (q_2+q_4)\,\frac{3\,a^2}{2} = -15\,q\,a^2 \tag{16}$$

$$Q_{13} = Q_{31} = 3\int dx'dy'dz'x\, \rho(x',y',z')\, x'\, z' = 0 \tag{17}$$

$$Q_{23} = Q_{32} = 3\int dx'dy'dz'x\, \rho(x',y',z')\, y'\, z' = 0 \tag{18}$$

(iii) Σύμφωνα με την (T13)

$$V = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\left[\frac{Q}{r} + \frac{1}{2r^5}\sum_{ij} r_i\, Q_{ij}\right] = \frac{q\,a^2}{8\,\pi\,\epsilon_0}\left[\frac{-4q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{1}{2\,(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\left(-7x^2+2y^2+5z^2-60x\,y\right)\right. \tag{19}$$

Θέμα 4 (2.5 μονάδες)

(i) Έχουμε επιφανειακό ρεύμα για $r = R$ το οποίο ισούται με $\vec{K} = \frac{I}{2\,\pi\,R}\hat{z}$. Επομένως αναμένουμε $\vec{A} = A\hat{z}$. Επίσης λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας $\vec{A} = A(r)\hat{z}$. Το Ηλεκτρικό δυναμικό ικανοποιεί παντού (εκτός από το $r = R$) την εξίσωση

$$\nabla^2 \vec{A} = 0 \overset{(T21)}{\Rightarrow} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right) = 0 \tag{20}$$

(ii) Επιλύοντας την ανωτέρω εξίσωση παίρνουμε για $r < A$

$$\left(r\frac{\partial A_<}{\partial r}\right) = C_< \Rightarrow \frac{\partial A_<}{\partial r} = \frac{C_<}{r} \Rightarrow A_< = \int dr\frac{C_<}{r} + D_< \Rightarrow A_< = C_<\,\ln r + D_< \tag{21}$$

και ανάλογα για $r > R$

$$A_> = C_>\,\ln r + D_> \tag{22}$$

Η απαίτηση να είναι πεπερασμένο το διανυσματικό δυναμικό στο $r = 0$ συνεπάγεται $A_< = 0$ ενώ η συνέχεια του δυναμικού δίνει

$$A_<(R) = A_>(R) \Rightarrow D_< = C_>\,\ln R + D_> \tag{23}$$

Το μαγνητικό πεδίο δίνεται από

$$\vec{B} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A \end{vmatrix} = -\hat{\phi}\frac{\partial A}{\partial r} \tag{24}$$

Εφαρμόζοντας την (T12) για $r = R$ παίρνουμε

$$-\hat{r} \times \hat{\phi} \left(\frac{\partial A_>}{\partial r} - 0 \right) \bigg|_{r=R} = \frac{\mu_0 \, I}{2 \, \pi \, R} \hat{z} \Rightarrow C_> = -\frac{\mu_0 I}{2 \, \pi} \tag{25}$$

Για τον πλήρη προσδιορισμό του διανυσματικού δυναμικού μπορούμε να ορίσουμε την τιμή του σε ένα σημείο πχ $A(R) = 0 \Rightarrow D_> = -C_> \ln R \Rightarrow D_< = 0$, επομένως

$$\vec{A} = \hat{z} \begin{cases} 0 & r \leq R \\ \frac{\mu_0 I}{2 \, \pi} \ln \frac{r}{R} & r > R \end{cases} \tag{26}$$

και

$$\vec{B} = \hat{\phi} \begin{cases} 0 & r \leq R \\ \frac{\mu_0 I}{2 \, \pi \, r} & r > R \end{cases} \tag{27}$$

(iii) Αν τοποθετούσαμε γραμμικό διαμαγνητικό υλικό στο εσωτερικό του φλοιού δεν θα είχαμε κάποια διαφορά στο αποτέλεσμα καθώς στο εσωτερικό του φλοιού έχουμε $\vec{B} = 0$