ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΚΛΑΣΙΚΗ ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ Ι
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι. ΡΙΖΟΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΕΛΙΚΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ - 22-2-2012

Θέμα 1 (2.5 μονάδες: Α=1.5 Β=1)
Α.(i)

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{\epsilon_0} &= \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = A\,\cos\left(\frac{\pi r}{2R}\right)\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) + \frac{\hat{r}}{r^2}\cdot\left[\vec{\nabla}\,A\cos\left(\frac{\pi r}{2R}\right)\right]\\ &= 4\pi\,A\,\cos\left(\frac{\pi r}{2R}\right)\delta(\vec{r}) + \frac{\hat{r}}{r^2}\cdot\left[\vec{\nabla}\,A\cos\left(\frac{\pi r}{2R}\right)\right]\\ &= 4\pi\,A\,\delta(\vec{r}) - \frac{A\pi}{2R}\frac{\hat{r}}{r^2}\cdot\hat{r}\,\sin\left(\frac{\pi r}{2R}\right) = 4\pi\,A\,\delta(\vec{r}) - \frac{A\pi}{2Rr^2}\,\sin\left(\frac{\pi r}{2R}\right)\end{aligned} \tag{1}$$

(ii)

$$\begin{aligned}Q &= \int d\vec{r}^3\,\rho(\vec{r}) = 4\pi\epsilon_0\int d\vec{r}^3\,\delta(\vec{r}) - \frac{A\epsilon_0\pi}{2R}\int d\vec{r}^3\,\frac{1}{r^2}\sin\left(\frac{\pi r}{2R}\right) = 4\pi\epsilon_0\,A - \frac{4A\epsilon_0\pi^2}{2R}\int_0^R dr\sin\left(\frac{\pi r}{2R}\right)\\ &= 4\pi\epsilon_0\,A + 4A\epsilon_0\pi\,\cos\left(\frac{\pi r}{2R}\right)\Big|_0^R = 0\end{aligned} \tag{2}$$

<u>Εναλλακτικά</u> από νόμο Gauss $Q = \epsilon_0\int_{S_V} d\vec{S}\cdot\vec{E} = 4\pi\,\epsilon_0\,r^2\frac{A}{r^2}\cos\left(\frac{\pi R}{2R}\right) = 0$
(iii) Λόγω σφαιρικής συμμετρίας της πυκνότητας φορτίου θεωρώ $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss για μια σφαίρα ακτίνας $r > R$ έχουμε

$$\int_{S_V} d\vec{S}\cdot\vec{E} = \frac{q_V}{\epsilon_0} \Rightarrow 4\pi\,r^2\,E(r) = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0 \tag{3}$$

Β.Βλέπε σημειώσεις

Θέμα 2 (2.5 μονάδες)
(i) Από συμμετρία περιμένουμε $V = V(z)$. Στις περιοχές όπου δεν υπάρχει φορτίο έχουμε

$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow \frac{d^2V}{dz^2} = 0 \tag{4}$$

Έτσι έχουμε

$$V = \begin{cases} V_1 = A_1\,z + B_1 & ,-a < z < 0\\ V_2 = A_2\,z + B_2 & ,0 < z < +2a\end{cases} \tag{5}$$

Οι συνθήκες συνέχειας του δυναμικού απαιτούν

$$V_1(-a) = 0 \Rightarrow -A_1\,a + B_1 = 0 \tag{6}$$
$$V_2(2a) = 0 \Rightarrow 2A_2\,a + B_2 = V_0 \tag{7}$$
$$V_1(0) = V_2(0) \Rightarrow B_1 = B_2 \tag{8}$$

Η συνθήκη ασυνέχειας της κάθετης συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στο $z = 0$ δίνει επίσης

$$E_\perp^2 - E_\perp^1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow -\left.\frac{\partial V_2}{\partial z}\right|_{z=0} + \left.\frac{\partial V_1}{{}_1\partial z}\right|_{z=0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow -A_2 + A_1 = \frac{V_0}{a} \tag{9}$$

Επιλύοντας το σύστημα βρίσκουμε $A_1 = \frac{5V_0}{3a}$, $A_2 = -\frac{V_0}{3a}$, $B_1 = B_2 = \frac{5V_0}{3}$ Επομένως

$$V = \begin{cases} \frac{5V_0}{3}\left(\frac{z}{a}+1\right) & ,-a<z<0 \\ -\frac{V_0}{3}\left(\frac{z}{a}-5\right) & ,0<z<+2a \end{cases} \tag{10}$$

(ii)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\hat{z}\frac{\partial V}{\partial z} = \hat{z}\begin{cases} -\frac{5V_0}{3a} & ,-a<z<0 \\ +\frac{V_0}{3a} & ,0<z<+2a \end{cases} \tag{11}$$

(iii) Για τον αγωγό στο $z=-a$ έχουμε $\sigma = \epsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{z} = -\frac{5\epsilon_0 V_0}{3a}$ και για τον αγωγό στο $z=+2a$ έχουμε $\sigma = \epsilon_0\vec{E}\cdot(-\hat{z}) = -\frac{\epsilon_0 V_0}{3a}$

Θέμα 3 (2.5 μονάδες)
(i) Για $r \neq R$ το δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace $\nabla^2 V = 0$. Λόγω της αξονικής συμμετρίας η γενική λύση γράφεται ως

$$V_>(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell^> r^\ell + \frac{B_\ell^>}{r^{\ell+1}}\right)P_\ell(\cos\theta)\ ,\ r>R \tag{12}$$

$$V_<(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell^< r^\ell + \frac{B_\ell^<}{r^{\ell+1}}\right)P_\ell(\cos\theta)\ ,\ r<R \tag{13}$$

Καθώς το δυναμικό μηδενίζεται για $r\to\infty$ έχουμε $A_\ell^> = 0, \ell = 0,1,2,\ldots$. Επίσης το δυναμικό είναι πεπερασμένο για $r=0$ οπότε παίρνουμε $B_\ell^< = 0, \ell=0,1,2,\ldots$. Η συνθήκη συνέχειας στο $r=R$ επιβάλει

$$V_>(a,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{B_\ell^>}{R^{\ell+1}}P_\ell(\cos\theta) = \frac{V_0}{4}\left(3\cos^2\theta-1\right) = \frac{V_0}{2}P_2(\cos\theta) \Rightarrow B_2^> = \frac{V_0}{2}R^3, B_\ell^> = 0, \ell=0,1,3,4,\ldots \tag{14}$$

και

$$V_<(a,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}A_\ell^< a^\ell P_\ell(\cos\theta)) = \frac{V_0}{2}P_2(\cos\theta) \Rightarrow A_2^> = \frac{V_0}{4R^2}, A_\ell^> = 0, \ell=0,1,3,4,\ldots \tag{15}$$

Επομένως

$$V = \begin{cases} \frac{V_0 a^3}{4r^3}\left(3\cos^2\theta-1\right) & ,r>R \\ \frac{V_0 r^2}{4R^2}\left(3\cos^2\theta-1\right) & ,r<R \end{cases} \tag{16}$$

(ii)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\hat{r}\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \begin{cases} \frac{3V_0R^3}{4r^4}\left[\hat{r}\left(3\cos^2\theta-1\right)+\hat{\theta}\sin 2\theta\right] & ,r>R \\ \frac{V_0 r}{4R^2}\left[-2\hat{r}\left(3\cos^2\theta-1\right)+3\hat{\theta}\sin 2\theta\right] & ,r<R \end{cases} \tag{17}$$

(iii) Για $r<R$ δεν υπάρχει διηλεκτρικό $\vec{P}=0$ ενώ

$$\vec{P} = (\epsilon-\epsilon_0)\vec{E} = (\epsilon-\epsilon_0)\frac{3V_0R^3}{4r^4}\left[\hat{r}\left(3\cos^2\theta-1\right)+\hat{\theta}\sin 2\theta\right]\ ,r>R \tag{18}$$

$$\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta P_\theta\right)$$
$$= (\epsilon-\epsilon_0)\frac{3V_0R^3}{4r^5}\left[-2\left(3\cos^2\theta-1\right)+4\cos^2\theta-2\sin^2\theta\right]=0 \tag{19}$$
$$\sigma_P = \vec{P}\cdot\hat{\eta}\Big|_{r=R} = (\epsilon-\epsilon_0)\frac{3V_0}{4R}\left(3\cos^2\theta-1\right) \tag{20}$$

(iv) Από τη συνθήκη ασυνέχειας της κάθετης συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου

$$\sigma_f = \left(\vec{D}_> - \vec{D}_<\right)\cdot\hat{r}\Big|_{r=R} = \left(\epsilon\vec{E}_> - \epsilon_0\vec{E}_<\right)\cdot\hat{r}\Big|_{r=R} = \frac{V_0}{4R}\left(3\cos^2\theta-1\right)(3\epsilon+2\epsilon_0) \tag{21}$$

Θέμα 4 (2.5 μονάδες)

(i) Η διάταξη παρουσιάζει κυλινδρική συμμετρία. Αναμένουμε $\vec{H}=H(r)\hat{\phi}$. Εφαρμόζοντας το νόμο του Ampère για το πεδίο $\vec{H}$ σε έναν κύκλο με $r<a$ στο επίπεδο του σχήματος

$$\int_C \vec{H}\cdot d\ell = I_f \Rightarrow H(r)\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{I}{2} \Rightarrow \vec{H}_2 = \frac{I}{4\pi}\frac{\hat{\phi}}{r}\,,\ r<a \tag{22}$$

Επαναλαμβάνοντας για έναν κύκλο με $3a<r<a$

$$H(r)2\pi r = -\frac{I(r^2-a^2)}{(3a)^2-a^2} + \frac{I}{2} \Rightarrow \vec{H}_1 = \frac{I(5a^2-r^2)}{16\pi\, a^2}\frac{\hat{\phi}}{r}\,,\ a<r<3a \tag{23}$$

και για $r>3a$

$$2\pi r H(r) = -I + \frac{I}{2} \Rightarrow \vec{H}_3 = -\frac{I}{4\pi}\frac{\hat{\phi}}{r}\,,\ r>3a \tag{24}$$

(ii) Έχουμε γραμμικά μαγνητικά μέσα

$$\vec{B}_2 = \mu_2\vec{H}_2 = \frac{\mu_2\, I}{4\pi}\frac{\hat{\phi}}{r}\,,\ r<a \tag{25}$$
$$\vec{B}_1 = \mu_1\vec{H}_1 = \frac{\mu_1\, I(5a^2-r^2)}{16\pi\, a^2}\frac{\hat{\phi}}{r}\,,\ a<r<3a \tag{26}$$
$$\vec{B}_3 = \mu_0\vec{H}_3\,,\ r>3a \tag{27}$$

(iii) Η μαγνήτιση σε γραμμικό μέσο δίνεται από $\vec{M}=\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)\vec{H}$

$$\vec{j}_M = \vec{\nabla}\times\vec{M} = (\frac{\mu}{\mu_0}-1)\vec{\nabla}\times\vec{H} = (\frac{\mu}{\mu_0}-1)\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\hat{r} & \hat{\phi} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & rH(r) & 0\end{vmatrix} = \left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)\frac{\hat{z}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rH(r)\right) \tag{28}$$

Η οποία δίνει

$$\vec{j}_{M1} = -\frac{(\mu_1-\mu_0)I}{8\pi a^2\mu_0}\hat{z}\,,\ a<r<3a \tag{29}$$

και $\vec{j}_M = 0$ οπουδήποτε αλλού. Οι επιφανειακές πυκνότητες ρευμάτων μαγνήτισης δίνονται από $\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{\eta}$

$$\vec{K}_M(r = a_-) = \vec{M}_2 \times \hat{r} = \left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1\right) H_2(a)\,\hat{\phi} \times \hat{r} = -\frac{(\mu_2 - \mu_0)I}{4\pi\mu_0 a}\hat{z} \tag{30}$$

$$\vec{K}_M(r = a_+) = \vec{M}_1 \times (-\hat{r}) = -\left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1\right) H_1(a)\,\hat{\phi} \times \hat{r} = \frac{(\mu_1 - \mu_0)I}{4\pi\mu_0 a}\hat{z} \tag{31}$$

$$\vec{K}_M(r = 3a_-) = \vec{M}_1 \times \hat{r} = \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1\right) H_1(3a)\hat{\phi} \times \hat{r} = \frac{(\mu_1 - \mu_0)I}{4\pi\mu_0 a}\hat{z} \tag{32}$$

(iv) Τα ελεύθερα ρεύματα μηδενίζονται παντού. Επομένως με κατάλληλη εφαρμογή του νόμου του Ampère βρίσκουμε $\vec{H} = 0$ παντού. Για το πεδίο $\vec{B}$ έχουμε για $r < a$

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}_2 - \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{B}_2 = \mu_0\vec{M}\ ,\ r < a \tag{33}$$

Για $r > a$ έχουμε επίσης $\vec{M} = \chi_M\,\vec{H} = 0$ και $\vec{B} = \mu\,\vec{H} = 0$.