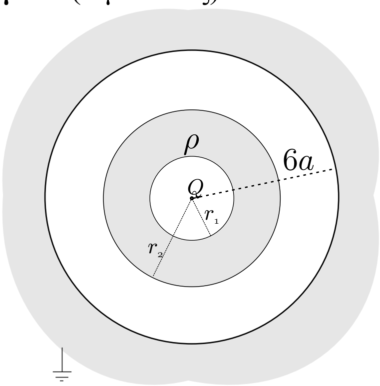
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ — ΜΑΘΗΜΑ: ΚΛΑΣΙΚΗ ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ Ι

ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ — ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι. ΡΙΖΟΣ

ΕΝΔΙΑΜΕΣΟ ΠΡΟΧΕΙΡΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ - 13-12-2012

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:.. ΑΜ:.....................

Θέμα 1 (3 μονάδες)



Σε σφαιρική κοιλότητα ακτίνας $6a$ στο εσωτερικό γειωμένου αγωγού τοποθετείται σφαιρικός φλοιός ακτίνων $r_1 = a, r_2 = 2a$ ο οποίος φέρει πυκνότητα φορτίου $\rho(r) = \frac{q_0\, a}{2\,\pi}\frac{1}{r^4}$. Στο κέντρο του φλοιού τοποθετείται σημειακό φορτίο $Q = -2q_0$, όπως στο Σχήμα.

(i) Χρησιμοποιώντας το νόμο του Gauss υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε όλο το χώρο.

(ii) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα (i) υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό σε όλο το χώρο.

Απαντήσεις

(i)

$$\vec{E}(r) = -\hat{r}\frac{q_0}{2\,\pi\,\epsilon_0}\begin{cases} 0 & ,\ r > 6a \\ \frac{1}{2r^2} & ,\ 2a < r < 6a \\ \frac{a}{r^3} & ,\ a < r < 2a \\ \frac{1}{r^2} & ,\ 0 < r < a \end{cases} \tag{1}$$

(ii)

$$V(r) = -\frac{q_0}{4\,\pi\,\epsilon_0}\begin{cases} 0 & ,\ r > 6a \\ \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{6a}\right) & ,\ 2a < r < 6a \\ \left(\frac{a}{r^2} + \frac{1}{12a}\right) & ,\ a < r < 2a \\ \left(\frac{2}{r} - \frac{11}{12a}\right) & ,\ 0 < r < a \end{cases} \tag{2}$$

Θέμα 2 (4 μονάδες)

Λεπτός σφαιρικός φλοιός ακτίνας a φέρει δυναμικό $V = V_0\, \cos(2\theta)$

(i) Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό δυναμικό σε όλο το χώρο.

(ii) Να υπολογιστεί ο ηλεκτρικό πεδίο σε όλο το χώρο.

(iii) Βρείτε την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στον φλοιό.

Απαντήσεις

(i) $r > a$

$$V(r,\theta) = -\frac{V_0}{3}\frac{a}{r} + \frac{2V_0}{3}\frac{a^3}{r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \tag{3}$$

$$\vec{E}(r,\theta) = \frac{V_0 a}{r^2}\left[\frac{2a^2}{r^2}(1 - 3\cos\theta^2) + \frac{1}{3}\right]\hat{r} + \frac{2V_0 a^3}{r^4}\sin(2\theta)\hat{\theta} \tag{4}$$

(ii) $r < a$

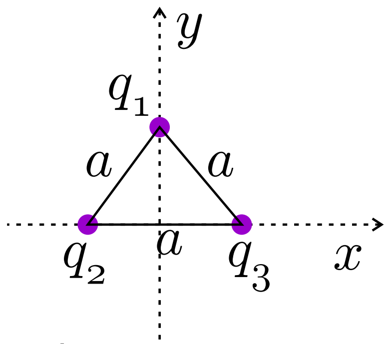
$$V(r,\theta) = -\frac{V_0}{3} + \frac{2V_0}{3}\frac{r^2}{a^2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \tag{5}$$

$$\vec{E}(r,\theta) = -\frac{4}{3}\frac{V_0 r}{a^2}(3\cos\theta^2 - 1)\hat{r} + \frac{2V_0 r}{a^2}\sin(2\theta)\hat{\theta} \tag{6}$$

(iii)

$$\sigma(a,\theta) = \frac{\epsilon_0 V_0}{\alpha}\cos(2\theta) \tag{7}$$

Θέμα 3 (3 μονάδες)



Τρία φορτία $q_1 = q, q_2 = -q, q_3 = 2q$ τοποθετούνται στις κορυφές ισόπλευρου τριγώνου πλευράς a. Για $r \gg a$, να υπολογιστούν προσεγγιστικά, λαμβάνοντας υπόψιν όρους μέχρι τετραπολικής ροπής
(i) Το ηλεκτρικό δυναμικό.
(ii) Το ηλεκτρικό πεδίο.

Απαντήσεις
(i)

$$\rho = q_1\,\delta(x)\delta\left(y - \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)\delta(z) + q_2\,\delta\left(x + \frac{a}{2}\right)\delta(y)\delta(z) + q_3\delta\left(x - \frac{a}{2}\right)\delta(y)\delta(z) \tag{8}$$

$$q_t = q_1 + q_2 + q_3 = q \tag{9}$$

$$\vec{p} = (q_3 - q_2)\,\frac{a}{2}\hat{x} + q_1\,\frac{\sqrt{3}a}{2}\hat{y} = \frac{3q\,a}{2}\hat{x} + \frac{\sqrt{3}q\,a}{2}\hat{y} \tag{10}$$

$$Q_{11} = -q_1\left(\frac{3a^2}{4}\right) + (q_2+q_3)\left(\frac{a^2}{2}\right) = -\frac{a^2\,q}{4} \tag{11}$$

$$Q_{22} = q_1\left(\frac{3a^2}{2}\right) - (q_2+q_3)\left(\frac{a^2}{4}\right) = \frac{5a^2\,q}{4} \tag{12}$$

$$Q_{33} = -q_1\left(\frac{3a^2}{4}\right) - (q_2+q_3)\left(\frac{a^2}{4}\right) = -a^2\,q \tag{13}$$

$$Q_{ij} = 0\ ,\ i \neq j \tag{14}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{r} + \frac{qa}{2}\frac{1}{r^3}\left(3x + \sqrt{3}y\right) + \frac{a^2\,q}{8r^5}\left(-x^2 + 5y^2 - 4z^2\right) + \dots\right]\ ,\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{15}$$

(ii)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\hat{x}\frac{\partial V}{\partial x} - \hat{y}\frac{\partial V}{\partial y} - \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z} = \dots \tag{16}$$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Εξισώσεις Maxwell

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{T2}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{T3}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \tag{T4}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\,\epsilon_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{T5}$$

Πεπερασμένη στατική κατανομή φορτίων

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\int d^3\vec{r}'\,\rho(\vec{r})\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \tag{T6}$$

$$V(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\vec{r}'\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{T7}$$

$$W=\frac{1}{2}\int d^3\vec{r}\rho(\vec{r})V(\vec{r})=\frac{\epsilon_0}{2}\int d^3\vec{r}\left|\vec{E}\right|^2 \tag{T8}$$

Ηλεκτροστατικές συνοριακές συνθήκες

$$E^2_{\parallel}-E^1_{\parallel}=0\;,\;E^2_{\perp}-E^1_{\perp}=\frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{T9}$$

Ηλεκτρικό Δυναμικό σε αξονική συμμετρία

$$V(r,\theta)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell\,r^\ell+\frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right)P_\ell(\cos\theta) \tag{T10}$$

Πολυπολικό ανάπτυγμα

$$V(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{r}+\frac{1}{r^3}\vec{r}\cdot\vec{p}+\frac{1}{2r^5}\sum_{i,j=1}^{3}r_i\,r_j\,Q_{ij}+\dots\right]\;,\;r\gg r' \tag{T11}$$

$$\vec{p}=\int d^3\vec{r}'\rho(\vec{r}')\vec{r}' \tag{T12}$$

$$Q_{ij}=\int d^3\vec{r}'\rho(\vec{r}')\left(3r'_i\,r'_j-r'^2\delta_{ij}\right) \tag{T13}$$

Διαφορικοί Τελεστές

$$\vec{\nabla}f=\frac{\hat{e}_1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\hat{e}_2}{h_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}+\frac{\hat{e}_3}{h_3}\frac{\partial f}{\partial x_3} \tag{T14}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2h_3A_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3h_1A_2)+\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1h_2A_3)\right] \tag{T15}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{1}{h_1\,h_2\,h_3}\begin{vmatrix}h_1\,\hat{e}_1 & h_2\,\hat{e}_2 & h_3\,\hat{e}_3\\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3}\\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3\end{vmatrix} \tag{T16}$$

Συντεταγμένες	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3
Καρτεσιανές	x	y	z	1	1	1
Σφαιρικές	r	θ	ϕ	1	r	$r\,\sin\theta$
Κυλινδρικές	r	ϕ	z	1	r	1

Ιδιότητες συνάρτησης δ

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}=4\,\pi\,\delta\,(\vec{r}-\vec{r}_0) \tag{T17}$$

Πολυώνυμα Legendre

$$P_0(x)=1\;,P_1(x)=x\;,P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$$
$$P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right) \tag{T18}$$

$$\int_{-1}^{+1}dx\,P_n(x)\,P_m(x)=\begin{cases}0 & ,m\neq n\\ \frac{2}{2n+1} & ,n=m\end{cases} \tag{T19}$$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\sin(\theta+\phi)=\sin\theta\,\cos\phi+\cos\theta\,\sin\phi \tag{T20}$$

$$\cos(\theta+\phi)=\cos\theta\,\cos\phi-\sin\theta\,\sin\phi \tag{T21}$$

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta \tag{T22}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\;,\;\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{T23}$$

Διάφορα Ολοκληρώματα

$$\int_0^d dx\sin\left(\frac{m\,\pi\,x}{d}\right)\sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{d}\right)=\frac{d}{2}\delta_{mn} \tag{T24}$$