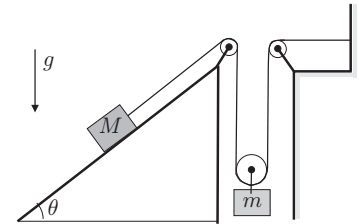


ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2008

ΘΕΜΑ 1 (2.5 μονάδες)

Δύο μάζες  $M$  και  $m$  συνδέονται με αβαρές μη εκτατό σχοιχί όπως στο διπλανό σχήμα. Η μάζα  $M$  βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης  $\theta$ . Η μάζα των τροχαλιών θεωρείται αμελητέα.

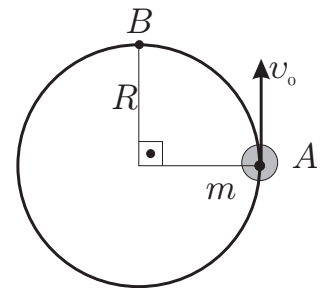
- (i) Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν τριβές να υπολογιστούν οι επιταχύνσεις των δύο σωμάτων καθώς και η τάση του σχοιγιού.  
 (ii) Αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ της μάζας  $M$  και του κεκλιμένου επιπέδου είναι  $\mu$  να βρεθεί η συνθήκη ισορροπίας του συστήματος.



ΘΕΜΑ 2 (2.5 μονάδες)

Σώμα μάζας  $m$  μπορεί να κινείται χωρίς τριβές σε οριζόντια κυκλική στεφάνη ακτίνας  $R$  όπως στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  το σώμα εκτοξεύεται, με αρχική ταχύτητα μέτρου  $v_0$ , από το σημείο  $A$ , όπως στο σχήμα. Η αντίσταση του αέρα δίνεται από τη σχέση  $-k\vec{v}$  όπου  $k$  γνωστή θετική σταθερά.

- (i) Να υπολογιστεί η δύναμη (οριζόντια συνιστώσα) που ασκεί η στεφάνη στο σώμα ως συνάρτηση του χρόνου.  
 (ii) Να βρεθεί ο χρόνος που θα διαρκέσει η μετάβαση του σώματος από το σημείο  $A$  στο σημείο  $B$ . Σχολιάστε τυχόν περιορισμούς στις παραμέτρους του προβλήματος.



ΘΕΜΑ 3 (2.5 μονάδες)

Πύραυλος εκτοξεύεται από την επιφάνεια της γης και κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα  $v_0$ . Ο πύραυλος κινείται εκτοξεύοντας αέρια με σταθερή ταχύτητα μέτρου  $u$  (ως προς τον πύραυλο). Η επιτάχυνση της βαρύτητας θεωρείται σταθερή και ίση με  $g$ . Αρχικά η μάζα του πυραύλου είναι  $m_0$  και ο ρυθμός μεταβολής της είναι  $\frac{dm}{dt} = -\lambda$  όπου  $\lambda > 0$ .

- (i) Να ευρεθεί η ταχύτητα του πυραύλου συναρτήσει του χρόνου.  
 (ii) Να υπολογιστεί η απόσταση του πυραύλου από την επιφάνεια της Γης συναρτήσει του χρόνου.

ΘΕΜΑ 4 (2.5 μονάδες)

Σώμα μάζας  $m$  το οποίο βρίσκεται υπό την επίδραση κεντρικής δύναμης έχει στροφορμή  $L$  και ενέργεια  $E$ . Σε πολικό σύστημα συντεταγμένων, στο επίπεδο της τροχιάς, η γωνία του διανύσματος θέσης συναρτήσει του χρόνου δίνεται από

$$\theta(t) = At^2$$

- όπου  $A$  γνωστή σταθερά. (i) Να βρεθεί η εξίσωση τροχιάς του σώματος.  
 (ii) Να υπολογιστεί η κεντρική δύναμη.

*Τριγωνομετρικές συναρτήσεις*

$$\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \quad (\text{A1})$$

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \quad (\text{A2})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{A3})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad (\text{A4})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{A5})$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta \quad (\text{A6})$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad (\text{A7})$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta \quad (\text{A8})$$

*Ολοκληρώματα*

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \quad (\text{A9})$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctanh} x \quad (\text{A10})$$

$$\int \ln x = -x + x \ln x \quad (\text{A11})$$

*Ανάπτυγματα σε σειρές*

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \dots \quad (\text{A12})$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \dots \quad (\text{A13})$$

*Πλάγια βολή*

$$y = x \tan \theta - \frac{x^2 g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (\text{A14})$$

*Μικρές Ταλαντώσεις*

Στην περιοχή του ελάχιστου  $x_0$  του δυναμικού  $V(x)$

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}} \quad (\text{A15})$$

*Συστήματα μεταβλητής μάζας*

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} + \vec{v}' \frac{dm}{dt} \quad (\text{A16})$$

*Πολικές συντεταγμένες*

Ταχύτητα

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad (\text{A17})$$

Επιτάχυνση

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \hat{e}_\theta \quad (\text{A18})$$

Δύναμη

$$\vec{F} = F_r \hat{e}_r + F_\theta \hat{e}_\theta \quad (\text{A19})$$

2ος νόμος του Νεύτωνα

$$m (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) = F_r \quad (\text{A20})$$

$$m (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) = F_\theta$$

*Κεντρικό δυναμικό*

Εξισώσεις κίνησης

$$m r^2 \dot{\theta} = L \quad (\text{A21})$$

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m r^2} + V(r) = E \quad (\text{A22})$$

όπου  $L$  η στροφορμή και  $E$  η ενέργεια. Ειδικά για  $V(r) = -GMm/r = -\alpha/r$  η τροχιά σώματος μάζας  $m$  δίνεται από

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (\text{A23})$$

με

$$r_0 = \frac{L^2}{m \alpha} \quad (\text{A24})$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \quad (\text{A25})$$

Για ελλειπτική τροχιά ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης δίνεται από

$$a = r_0 / (1 - \epsilon^2) \quad (\text{A26})$$

Τρίτος νόμος του Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \quad (\text{A27})$$