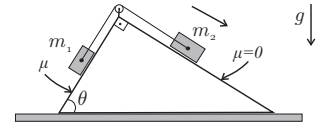


ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ 2008

ΘΕΜΑ 1 (2.5 μονάδες)

Δύο σώματα μαζών m_1 και m_2 συνδέονται με μη εκτατό νήμα και τοποθετούνται σε κεκλιμένα επίπεδα τα οποία τέμνονται καθέτως όπως στο σχήμα. Το κεκλιμένο επίπεδο στο οποίο βρίσκεται το σώμα m_1 σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο και ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στο επίπεδο και το σώμα είναι μ . Η σταθερά της βαρύτητας είναι g και δεν υπάρχουν τριβές στο κεκλιμένο επίπεδο που βρίσκεται το σώμα m_2 .



- (i) Να βρεθεί η συνθήκη ισορροπίας του συστήματος.
- (ii) Υποθέτοντας ότι οι μάζες επιλέγονται κατάλληλα έτσι ώστε το σύστημα να κινείται κατά τη φορά που φαίνεται στο σχήμα να υπολογιστούν οι επιταχύνσεις των δύο σωμάτων και η τάση του σχοινού.

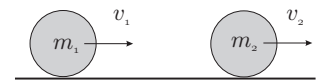
ΘΕΜΑ 2 (3 μονάδες)

Σωματίδιο μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα v_0 από την επιφάνεια της Γης. Η επιτάχυνση της βαρύτητας θεωρείται σταθερή και ίση με g . Αν η αντίσταση του αέρα είναι $-k v$ όπου v η ταχύτητα του σωματιδίου και $k > 0$ γνωστή σταθερά

- (i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου.
- (ii) Σε πόσο χρόνο το σωματίδιο θα φτάσει στο μέγιστο ύψος ;
- (iii) Να υπολογιστεί η απόσταση του σωματιδίου από την επιφάνεια της Γης συναρτήσει του χρόνου.
- (iv) Εξετάστε και σχολιάστε το όριο $k \rightarrow 0$

ΘΕΜΑ 3 (2.0 μονάδες, $A=1, B=1$)

A. Δύο σφαίρες μαζών $m_1 = m$ και $m_2 = 2m$ συγκρούονται ελαστικά όπως στο σχήμα. Αρχικά η σφαίρα μάζας m_2 κινείται με ταχύτητα $v_2 = v_0$ ενώ η σφαίρα m_1 κινείται με ταχύτητα $v_1 = 2v_0$ στο ΣΑ του εργαστηρίου.



Εργαζόμενοι στο ΣΑ του κέντρου μάζας να υπολογιστούν οι ταχύτητες των δύο σφαιρών μετά τη σύγκρουση.
 B. Δύο πλανήτες C και D ίδιας στροφορμής και μάζας εκτελούν τροχιές γύρω από ένα άστρο. Ο C κυκλική και ο D ελλειπτική εκκεντρότητας ϵ . Να υπολογιστεί η εκκεντρότητα αν είναι γνωστό ότι ο λόγος του μέτρου της ταχύτητας του D όταν βρίσκεται στο αφήλιο προς το μέτρο της ταχύτητας του C ισούται με $1/4$.

ΘΕΜΑ 4 (2.5 μονάδες)

Σώμα μάζας m το οποίο βρίσκεται υπό την επίδραση κεντρικής δύναμης έχει στροφορμή L . Αν το σώμα κινείται στην τροχιά

$$r = k e^{a\theta}$$

όπου k, a γνωστές σταθερές

- (i) Να υπολογιστεί η δύναμη που επιδρά στο σώμα.
- (ii) Να υπολογιστεί η θέση του σώματος συναρτήσει του χρόνου.

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \quad (\text{A1})$$

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \quad (\text{A2})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{A3})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad (\text{A4})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{A5})$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta \quad (\text{A6})$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad (\text{A7})$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta \quad (\text{A8})$$

Ολοκληρώματα

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \quad (\text{A9})$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctanh} x \quad (\text{A10})$$

$$\int \ln x = -x + x \ln x \quad (\text{A11})$$

Ανάπτυγματα σε σειρές

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \dots \quad (\text{A12})$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \dots \quad (\text{A13})$$

Πλάγια βολή

$$y = x \tan \theta - \frac{x^2 g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (\text{A14})$$

Μικρές Ταλαντώσεις

Στην περιοχή του ελάχιστου x_0 του δυναμικού $V(x)$

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}} \quad (\text{A15})$$

Συστήματα μεταβλητής μάζας

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} + \vec{v}' \frac{dm}{dt} \quad (\text{A16})$$

Πολικές συντεταγμένες

Ταχύτητα

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad (\text{A17})$$

Επιτάχυνση

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \hat{e}_\theta \quad (\text{A18})$$

Δύναμη

$$\vec{F} = F_r \hat{e}_r + F_\theta \hat{e}_\theta \quad (\text{A19})$$

2ος νόμος του Νεύτωνα

$$m (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) = F_r \quad (\text{A20})$$

$$m (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) = F_\theta$$

Κεντρικό δυναμικό

Εξισώσεις κίνησης

$$m r^2 \dot{\theta} = L \quad (\text{A21})$$

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m r^2} + V(r) = E \quad (\text{A22})$$

όπου L η στροφορμή και E η ενέργεια. Ειδικά για $V(r) = -GMm/r = -\alpha/r$ η τροχιά σώματος μάζας m δίνεται από

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (\text{A23})$$

με

$$r_0 = \frac{L^2}{m \alpha} \quad (\text{A24})$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \quad (\text{A25})$$

Για ελλειπτική τροχιά ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης δίνεται από

$$a = r_0 / (1 - \epsilon^2) \quad (\text{A26})$$

Τρίτος νόμος του Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \quad (\text{A27})$$