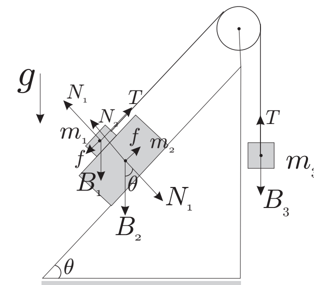
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: **ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι** (ΤΜΗΜΑ ΑΡΤΙΩΝ)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Αν. Καθηγητής Ι. ΡΙΖΟΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2009

ΘΕΜΑ 1 (*2.4 μονάδες*)



(i) Τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος φαίνονται στο σχήμα. Στο σώμα m_1 ασκείται το βάρος του $B_2 = m_2\, g$, η αντίδραση του σώματος m_2 την οποία συμβολίζουμε με N_1, η τάση του σχοινιού την οποία συμβολίζουμε με T και η τριβή την οποία συμβολίζουμε με f. Στο σώμα m_2 ασκείται το βάρος του $B_2 = m_2\, g$, η αντίδραση του επιπέδου την οποία συμβολίζουμε με N_2 και η αντίδραση του σώματος m_1 η οποία ισούται με N_1 και η τριβή f. Στο σώμα m_3 ασκείται η τάση T και το βάρος του $B_3 = m_3\, g$. Οι διευθύνσεις και φορές όλων των δυνάμεων φαίνονται στο σχήμα. Η φορά της τριβής στο σώμα m_2 για να έχουμε ισορροπία είναι αναγκαστικά όπως στο σχήμα. Οι συνθήκες ισορροπίας του συστήματος, αναλύοντας τις δυνάμεις σε δύο κάθετους άξονες, τον ένα παράλληλο προς την επιφάνεια για τα σώματα m_1, m_2 είναι:

$$
\begin{aligned}
(m_1): &\qquad m_1\, g\, \sin\theta + f - T = 0 &\quad (1)\\
&\qquad N_1 - m_1\, g\, \cos\theta = 0 &\quad (2)\\
(m_2): &\qquad m_2\, g\, \sin\theta - f = 0 &\quad (3)\\
&\qquad N_2 - m_2\, g\, \cos\theta - N_1 = 0 &\quad (4)\\
(m_3): &\qquad T - m_3\, g = 0 &\quad (5)
\end{aligned}
$$

όπου η τριβή f συνδέεται με την κάθετη δύναμη ανάμεσα στις επιφάνειες m_1 και m_2 (η οποία ισούται με N_1)

$$|f| \leq \mu N_1 \tag{6}$$

Επιλύοντας το σύστημα (2)-(5) παίρνουμε

$$T = m_3\, g\ ,\ f = m_2\, g\, \sin\theta\ ,\ N_1 = m_1\, g\, \cos\theta\ ,\ N_2 = (m_2 + m_1)\, g\, \cos\theta \tag{7}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε

$$(m_1 + m_2)\, g\, \sin\theta - m_3\, g = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{m_3}{m_1 + m_2} \tag{8}$$

Αντικαθιστώντας τη λύση (5) στην (6) μας δίνει επιπλέον

$$|m_2\, g\, \sin\theta| \leq \mu\, m_1\, g\, \cos\theta \Rightarrow \tan\theta \leq \mu \frac{m_1}{m_2} \tag{9}$$

Οι συνθήκες ισορροπίας των τριών σωμάτων είναι οι (8) και (9). Η (8) προσδριορίζει τη γωνία θ για την οποία έχουμε ισορροπία, ενώ η (9) προσδιορίζει για ποιες τιμές του συντελεστή τριβής μ είναι δυνατή η ισορροπία.
(ii) Θεωρώντας θετική φορά επιταχύνσεων προς τα δεξιά και a_i την επιτάχυνση του σώματος m_i έχουμε στην περίπτωση $m_1 = m_2 = m_3 = m$

$$
\begin{aligned}
(m_1): &\qquad m\, g\, \sin\theta + f - T = m\, a_1 &\quad (10)\\
(m_2): &\qquad m\, g\, \sin\theta - f = m\, a_2 &\quad (11)\\
(m_3): &\qquad T - m\, g = m\, a_3 &\quad (12)
\end{aligned}
$$

όπου λόγω της σύνδεσης με το σχοινί $a_1 = a_3$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις
(α) Τα σώματα m_1 και m_2 κινούνται μαζί οπότε $a_1 = a_2 = a_3 = a$ και καταλήγουμε σε σύστημα τριών εξισώσεων με αγνώστους f, a, T. (εδώ η στατική τριβή δεν είναι γνωστή απλά υπάρχει περιορισμός που θα εξετάσουμε παρακάτω). Επιλύοντας το σύστημα παίρνουμε

$$a = -\frac{1}{3}\left(1 - 2\sin\theta\right) \tag{13}$$
$$T = \frac{2}{3} g\, m\, \left(1 + \sin\theta\right) \tag{14}$$
$$f = \frac{1}{3}\, g\, m\, \left(1 + \sin\theta\right) \tag{15}$$

Η συνθήκη για την τριβή μας δίνει

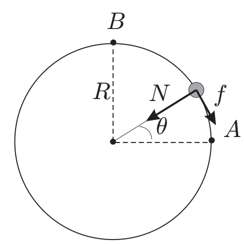
$$|f| \leq \mu N_1 = \mu\, m\, g\, \cos\theta \Rightarrow \frac{1}{3}\, g\, m\, \left(1 + \sin\theta\right) \leq \mu\, m\, g\, \cos\theta \tag{16}$$

(β) Τα σώματα m_1 και m_2 δεν κινούνται μαζί, οπότε υπάρχει αναμεσά τους τριβή ολισθήσεως $f = \mu\, N_1 = \mu\, m\, g\, \cos\theta$. Σε αυτήν την περίπτωση οι άγνωστοι είναι τα a_1 , a_2 και T. Επιλύοντας και πάλι τις (13)-(15) βρίσκουμε

$$a_1 = \frac{1}{2} g \left(\sin\theta + \mu\, \cos\theta - 1\right) \tag{17}$$
$$a_2 = g \left(\sin\theta - \mu\, \cos\theta\right) \tag{18}$$
$$T = \frac{m\, g}{2}\left(1 + \sin\theta + \mu\, \cos\theta\right) \tag{19}$$

ΘΕΜΑ 2 (*2.4 μονάδες*)

(i) Οι δυνάμεις που ασκούνται στο δακτυλίδι είναι η αντίδραση του στεφανιού N και η τριβή $f = \mu\, N$, με διεύθυνση και φορά όπως στο σχήμα. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του Νεύτωνα σε πολικές συντεταγμένες (A20) με $F_r = -N$, $F_\theta = -\mu\, N$ και $r = R \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$ έχουμε



$$m\, R\, \dot{\theta}^2 = N \tag{20}$$
$$m\, R\, \ddot{\theta} = -\mu\, N \tag{21}$$

Απ'οπου βρίσκουμε

$$\ddot{\theta} = -\mu\, \dot{\theta}^2 \Rightarrow \frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}^2} = -\mu\, dt \Rightarrow \int_{v_0/R}^{\dot{\theta}} \frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}^2} = -\mu\, \int_0^t dt \Rightarrow -\left.\frac{1}{\dot{\theta}}\right|_{v_0/R}^{\dot{\theta}} = -\mu\, t \Rightarrow \frac{1}{\dot{\theta}} = \frac{R}{v_0} + \mu\, t \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{1}{R/v_0 + \mu\, t} \tag{22}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R/v_0 + \mu\, t} \Rightarrow \int_0^\theta d\theta = \int_0^t \frac{dt}{R/v_0 + \mu\, t} \Rightarrow \theta(t) = \frac{1}{\mu}\, \ln\left(R/v_0 + \mu\, t\right)\Big|_0^t \Rightarrow \theta(t) = \frac{1}{\mu}\, \ln\frac{(R/v_0 + \mu\, t)}{R/v_0} \tag{23}$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \frac{1}{\mu}\, \ln\left(1 + \frac{\mu\, v_0}{R} t\right) \tag{24}$$

(ii) Χρησιμοποιώντας τις (20) και (22) βρίσκουμε

$$N = \frac{m\, R}{(R/v_0 + \mu\, t)^2} \tag{25}$$

(iii) Από την (24) βρίσκουμε

$$t = \frac{R}{\mu\, v_0}\,\left(e^{\mu\theta} - 1\right) \tag{26}$$

και για $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{R}{\mu\, v_0}\,\left(e^{\mu\pi/2} - 1\right)$

ΘΕΜΑ 3 (*2.4 μονάδες*)

(i) Παραγωγίζοντας την εξίσωση τροχιάς παίρνουμε

$$\dot{\theta} = n\,\left(\frac{r}{b}\right)^{n-1}\frac{\dot{r}}{b} \tag{27}$$

η οποία χρησιμοποιώντας την (A47) δίνει

$$\frac{L}{m\,r^2} = n\,\left(\frac{r}{b}\right)^{n-1}\frac{\dot{r}}{b} \Rightarrow \dot{r} = \frac{L\,b^n}{m\,n\,r^{n+1}} \tag{28}$$

Αντικαθιστώντας στη (A50) παίρνουμε

$$V(r) = E - \frac{L^2}{2m\,r^2} - \frac{1}{2}\frac{L^2\,b^{2n}}{m\,n^2\,r^{2(n+1)}} \Rightarrow F(r) = -V'(r) = +\frac{L^2}{m\,r^3} - (n+1)\frac{L^2\,b^{2n}}{m\,n^2\,r^{2n+3}} \tag{29}$$

(ii) Η (28) για $n = -2$ δίνει

$$\dot{r} = -\frac{L}{2m\,b^2}\,r \Rightarrow \frac{dr}{r} = -\frac{L}{-2m\,b^2}dt \Rightarrow \int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r} = -\int_0^t \frac{L}{2mb^2}dt \Rightarrow \ln r - \ln r_0 = -\frac{L}{2m\,b^2}\,t \Rightarrow r(t) = r_0\,e^{-\frac{L}{2m\,b^2}\,t} \tag{30}$$

Αντικαθιστώντας στην (A47) βρίσκουμε

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr_0^2}e^{\frac{L}{m\,b^2}\,t} \Rightarrow \int_0^{\theta} d\theta = \frac{L}{mr_0^2}\int_0^t dte^{\frac{L}{m\,b^2}\,t} \Rightarrow \theta(t) = \frac{b^2}{r_0^2}\,\left(e^{\frac{L}{m\,b^2}\,t} - 1\right) \tag{31}$$

ΘΕΜΑ 4 (*2.8μονάδες A=1.9 B=1.9*)

A. Από τη διατήρηση της ενέργειας έχουμε

$$\frac{1}{2}m\,v^2 + V(r) = E \Rightarrow v^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2a}{m}\frac{1}{r} \tag{32}$$

όπου $E < 0$ αφού πρόκειται για ελλειπτική τροχιά. Από την εξίσωση αυτή διαπιστώνουμε ότι η ταχύτητα είναι μέγιστη όταν το r είναι ελάχιστο και η ταχύτητα είναι ελάχιστη όταν το r είναι μέγιστο. Χρησιμοποιώντας την (A55) βρίσκουμε

$$r_{min} = \frac{r_0}{1+\epsilon}\ ,\ r_{max} = \frac{r_0}{1-\epsilon} \tag{33}$$

Στις θέσεις αυτές (ακρότατα) η ακτινική ταχύτητα μηδενίζεται και

$$v = v_\theta = r\dot{\theta} = \frac{L}{m\,r} \tag{34}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (A53). Επομένως

$$v_{min} = \frac{L}{m\,r_{max}} = \frac{L}{m\,r_0}(1-\epsilon) \tag{35}$$

$$v_{max} = \frac{L}{m\,r_{min}} = \frac{L}{m\,r_0}(1+\epsilon) \tag{36}$$

Διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\frac{v_{min}}{v_{max}} = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \Rightarrow 1-\epsilon = (1+\epsilon)\frac{v_{min}}{v_{max}} \Rightarrow \epsilon\left(\frac{v_{min}}{v_{max}}+1\right) = 1-\frac{v_{min}}{v_{max}} \Rightarrow \epsilon = \frac{v_{max}-v_{min}}{v_{max}+v_{min}} \tag{37}$$

Οι διατηρούμενες ποσότητες είναι η ενέργεια (E) και η στροφορμή (L). Έχουμε $r_0 = \frac{L^2}{m\alpha} = \frac{L^2}{m^2\,M\,G}$ και αντικαθιστώντας στην (35)

$$v_{min} = \frac{m\,M\,G}{L}(1-\epsilon) \Rightarrow L = \frac{m\,M\,G}{v_{min}}(1-\epsilon) \Rightarrow L = \frac{2m\,M\,G}{v_{max}+v_{min}} \tag{38}$$

Η ενέργεια δίνεται από την (A63)

$$E = \frac{m\alpha^2}{2L^2}\left(\epsilon^2-1\right) \tag{39}$$

όπου όλες οι ποσότητες είναι γνωστές.
Β. Βλέπε σημειώσεις.

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\,\cos\phi + \cos\theta\,\sin\phi \tag{A40}$$

$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\,\cos\phi - \sin\theta\,\sin\phi \tag{A41}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{A42}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \tag{A43}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{A44}$$

$$\sin(2\theta) = 2\,\sin\theta\,\cos\theta \tag{A45}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \tag{A46}$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta \tag{A47}$$

Ολοκληρώματα

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \tag{A48}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \mathrm{arctanh} x \tag{A49}$$

$$\int \ln x = -x + x\,\ln x \tag{A50}$$

Ανάπτυγματα σε σειρές

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + \ldots \tag{A51}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5 + \ldots \tag{A52}$$

Πλάγια βολή

$$y = x\,\tan\theta - \frac{x^2 g}{2v_0^2\,\cos^2\theta} \tag{A53}$$

Μικρές Ταλαντώσεις

Στην περιοχή του ελάχιστου x_0 του δυναμικού $V(x)$

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}} \tag{A54}$$

Συστήματα μεταβλητής μάζας

$$\frac{d\,(\,m\,\vec{v})}{dt} = \vec{F} + \vec{v}'\,\frac{dm}{dt} \tag{A55}$$

Πολικές συντεταγμένες

Ταχύτητα

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta \tag{A56}$$

Επιτάχυνση

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta \tag{A57}$$

Δύναμη

$$\vec{F} = F_r\,\hat{e}_r + F_\theta\,\hat{e}_\theta \tag{A58}$$

2ος νόμος του Νεύτωνα

$$\begin{aligned} m\,\left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right) &= F_r \\ m\,\left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right) &= F_\theta \end{aligned} \tag{A59}$$

Κεντρικό δυναμικό

Εξισώσεις κίνησης

$$m\,r^2\,\dot{\theta} = L \tag{A60}$$

$$\frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\,m\,r^2} + V(r) = E \tag{A61}$$

όπου L η στροφορμή και E η ενέργεια. Ειδικά για $V(r) = -GMm/r = -\alpha/r$ η τροχιά σώματος μάζας m δίνεται από

$$r = \frac{r_0}{1+\epsilon\,\cos\theta} \tag{A62}$$

με

$$r_0 = \frac{L^2}{m\,\alpha} \tag{A63}$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2\,E\,L^2}{m\,\alpha^2}} \tag{A64}$$

Για ελλειπτική τροχιά ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης δίνεται από

$$a = r_0/(1-\epsilon^2) \tag{A65}$$

Τρίτος νόμος του Kepler

$$T^2 = \frac{4\,\pi^2}{G\,M}\,a^3 \tag{A66}$$