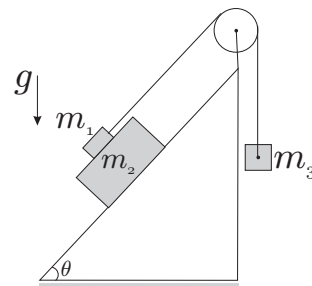


ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2009

ΘΕΜΑ 1 (2.4 μονάδες)

Δύο σώματα μαζών  $m_1$  και  $m_2$  τοποθετούνται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης  $\theta$  όπως στο σχήμα. Το σώμα  $m_1$  συνδέεται με μη εκτατό νήμα με σώμα  $m_3$  με τη βοήθεια αβαρούς τροχαλίας όπως στο σχήμα και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι  $g$ . Ο συντελεστής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων είναι  $\mu$  (στατικής και ολισθήσεως) ενώ δεν υπάρχουν τριβές μεταξύ του σώματος  $m_2$  και του κεκλιμένου επιπέδου.

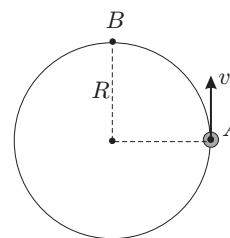


(i) Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος και να βρεθούν οι συνθήκες ισορροπίας του συστήματος.

(ii) Στην περίπτωση  $m_1 = m_2 = m_3 = m$  να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης και να υπολογιστούν οι επιταχύνσεις όλων των σωμάτων και η τάση του σχοινοῦ όσο τα σώματα  $m_1$  και  $m_2$  βρίσκονται σε επαφή.

ΘΕΜΑ 2 (2.4 μονάδες)

Δακτυλίδι μάζας  $m$  μπορεί να κινείται περασμένο σε στεφάνι ακτίνας  $R$  στερεωμένο σε θάλαμο έλλειψης βαρύτητας. Ο συντελεστής τριβής ολισθήσεως μεταξύ του στεφανιού και του δακτυλιδιού είναι  $\mu$ . Θεωρήστε ότι το δακτυλίδι εκτοξεύεται από το σημείο A με αρχική ταχύτητα  $v_0$ .



(i) Να υπολογιστεί η θέση του σώματος συναρτήσει του χρόνου.

(ii) Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκείται από το στεφάνι στο δακτυλίδι.

(iii) Να υπολογιστεί ο χρόνος που θα χρειαστεί το δακτυλίδι να κινηθεί από τη θέση A στη θέση B.

ΘΕΜΑ 3 (2.4 μονάδες)

Σώμα μάζας  $m$  το οποίο βρίσκεται υπό την επίδραση κεντρικής δύναμης έχει στροφορμή  $L$ . Αν το σώμα κινείται στην τροχιά

$$\theta(r) = \left(\frac{r}{b}\right)^n$$

όπου  $n$  γνωστός ακέραιος και  $b$  γνωστή σταθερά με διαστάσεις μήκους.

(i) Να υπολογιστεί η δύναμη που επιδρά στο σώμα.

(ii) Για  $n = -2$  υπολογιστεί η θέση του σώματος συναρτήσει του χρόνου αν δίνεται  $\theta(t=0) = 0, r(t=0) = r_0$ .

ΘΕΜΑ 4 (2.8 μονάδες  $A=1.9$   $B=1.9$ )

A. Πλανήτης μάζας  $m$  εκτελεί ελλειπτική τροχιά γύρω από ένα άστρο μάζας  $M$ . Η σταθερά παγκόσμιας έλξης είναι  $G$ . Αν γνωρίζεται τη μέγιστη  $v_{max}$  και ελάχιστη  $v_{min}$  ταχύτητα του πλανήτη

(i) Να υπολογιστεί η εκκεντρότητα της ελλειπτικής τροχιάς.

(ii) Να υπολογίσετε όσες μπορείτε από τις διατηρούμενες ποσότητες της κίνησης του πλανήτη.

B. Δείξτε την εξίσωση τροχιάς για ένα σώμα σε κεντρικό δυναμικό

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2m}{L^2} (E - V(1/u)) - u^2$$

όπου  $u = 1/r$ .

*Τριγωνομετρικές συναρτήσεις*

$$\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \quad (\text{A1})$$

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \quad (\text{A2})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{A3})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad (\text{A4})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{A5})$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta \quad (\text{A6})$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad (\text{A7})$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta \quad (\text{A8})$$

*Ολοκληρώματα*

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \quad (\text{A9})$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctanh} x \quad (\text{A10})$$

$$\int \ln x = -x + x \ln x \quad (\text{A11})$$

*Ανάπτυγματα σε σειρές*

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots \quad (\text{A12})$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots \quad (\text{A13})$$

*Πλάγια βολή*

$$y = x \tan \theta - \frac{x^2 g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (\text{A14})$$

*Μικρές Ταλαντώσεις*

Στην περιοχή του ελάχιστου  $x_0$  του δυναμικού  $V(x)$

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}} \quad (\text{A15})$$

*Συστήματα μεταβλητής μάζας*

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} + \vec{v}' \frac{dm}{dt} \quad (\text{A16})$$

*Πολικές συντεταγμένες*

Ταχύτητα

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad (\text{A17})$$

Επιτάχυνση

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \hat{e}_\theta \quad (\text{A18})$$

Δύναμη

$$\vec{F} = F_r \hat{e}_r + F_\theta \hat{e}_\theta \quad (\text{A19})$$

2ος νόμος του Νεύτωνα

$$m (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) = F_r \quad (\text{A20})$$

$$m (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) = F_\theta$$

*Κεντρικό δυναμικό*

Εξισώσεις κίνησης

$$m r^2 \dot{\theta} = L \quad (\text{A21})$$

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m r^2} + V(r) = E \quad (\text{A22})$$

όπου  $L$  η στροφορμή και  $E$  η ενέργεια.  
Ειδικά για  $V(r) = -GMm/r = -\alpha/r$  η τροχιά σώματος μάζας  $m$  δίνεται από

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (\text{A23})$$

με

$$r_0 = \frac{L^2}{m \alpha} \quad (\text{A24})$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \quad (\text{A25})$$

Για ελλειπτική τροχιά ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης δίνεται από

$$a = r_0 / (1 - \epsilon^2) \quad (\text{A26})$$

Τρίτος νόμος του Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \quad (\text{A27})$$