

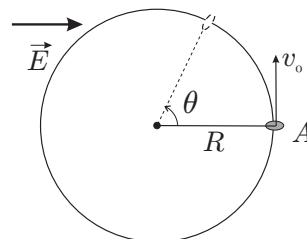
ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

ΘΕΜΑ 1 (2.5 μονάδες, $A=0.7$ $B=0.8$ $\Gamma=1.0$)

- A. Ναδειχθεί ότι αν ένα σώμα ισορροπεί υπό την επίδραση τριών δυνάμεων τότε οι διευθύνσεις τους περνούν από το ίδιο σημείο. Εξετάστε τυχόν εξαιρέσεις.
 B. Σώμα μάζας m κινείται στη μια διάσταση υπό την επίδραση δυναμικού $V(x)$. Να υπολογιστεί η συχνότητα μικρών ταλαντώσεων γύρω από ένα σημείο ευσταθούς ισορροπίας x_0 .
 Γ. Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί ο 3ος Νόμος του Kepler.

ΘΕΜΑ 2 (3 μονάδες)

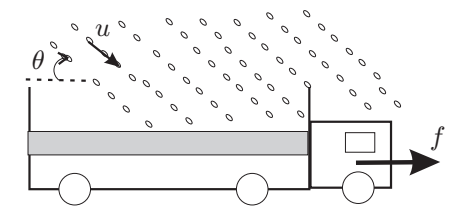
Δακτυλίδι μάζας m και φορτίου $q > 0$ μπορεί να κινείται χωρίς τριβές σε κυκλικό στεφάνι ακτίνας R το οποίο τοποθετείται σε οριζόντιο τραπέζι. Το σύστημα τοποθετείται εντός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} με διεύθυνση και φορά όπως στο σχήμα. Το δακτυλίδι εκτοξεύεται από το σημείο A με αρχική ταχύτητα v_0 ενώ το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου ρυθμίζεται έτσι ώστε $E = 2mv_0^2 R^3 / q$.



- (i) Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης του δακτυλιδιού.
 (ii) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του δακτυλιδιού συναρτήσει των v_0, θ .
 (iii) Εξετάστε κατά πόσο το δακτυλίδι θα μπορέσει να κάνει μια πλήρη περιστροφή ή αν υπάρχει μια οριακή γωνία την οποία δεν μπορεί να ξεπεράσει. Αν ισχύει η δεύτερη περίπτωση υπολογίστε την οριακή γωνία και εξηγήστε τι θα συμβεί όταν το δακτυλίδι φτάσει σε αυτήν.
 (iv) Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκεί το δακτυλίδι στο στεφάνι (συναρτήσει των m, v_0, R, θ).

ΘΕΜΑ 3 (2.5 μονάδες)

Φορτηγό μάζας m_0 κινείται μια βροχερή μέρα σε ευθύγραμμο δρόμο υπό την επίδραση μιας σταθερής δύναμης f . Η βροχή που πέφτει με ταχύτητα μέτρου u (ως προς το έδαφος) και διεύθυνση η οποία σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο (βλέπε Σχήμα), γεμίζει την καρότσα του φορτηγού με νερό έτσι ώστε η μάζα του να αυξάνεται με σταθερό ρυθμό $dm/dt = b$. Θεωρούμε ότι το φορτηγό είναι αρχικά άδειο και οι τριβές αγνοούνται.



- (i) Αν η βροχή πέφτει κάθετα $\theta = 90^\circ$ και το φορτηγό ξεκινάει από την ηρεμία βρείτε σε πόσο χρόνο το φορτηγό θα αποκτήσει ταχύτητα μέτρου V .
 (ii) Αν το φορτηγό ξεκινήσει από την ηρεμία μια μέρα που η βροχή πέφτει υπό γωνία $\theta = 45^\circ$, ποια η ταχύτητά του μετά την παρέλευση του χρόνου του ερωτήματος (i) ;

ΘΕΜΑ 4 (2.0 μονάδες)

Η εξίσωση τροχιάς ενός σώματος μάζας m , στροφορμής L και ενέργειας E το οποίο κινείται σε κεντρικό δυναμικό δίνεται από

$$\theta = \ln \frac{r}{r_0}$$

όπου r_0 θετική σταθερά.

- (i) Να βρεθεί το ενεργό δυναμικό.
 (ii) Να βρεθεί η δύναμη που ενεργεί στο σώμα.
 (iii) Να υπολογιστεί η θέση του σώματος συναρτήσει του χρόνου αν είναι γνωστό ότι $r(0) = r_0, \theta(0) = 0$.
 (iv) Να υπολογιστεί το μέτρο της ταχύτητας του σώματος συναρτήσει του χρόνου.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \quad (\text{A1})$$

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \quad (\text{A2})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{A3})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad (\text{A4})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{A5})$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta \quad (\text{A6})$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad (\text{A7})$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta \quad (\text{A8})$$

Ολοκληρώματα

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \quad (\text{A9})$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctanh} x \quad (\text{A10})$$

$$(\text{A11})$$

Ανάπτυγματα σε σειρές

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \dots \quad (\text{A12})$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \dots \quad (\text{A13})$$

Πλάγια βολή

$$y = x \tan \theta - \frac{x^2 g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (\text{A14})$$

Συστήματα μεταβλητής μάζας

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} + \vec{v}' \frac{dm}{dt} \quad (\text{A15})$$

Πολικές συντεταγμένες

Ταχύτητα

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad (\text{A16})$$

Επιτάχυνση

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{e}_\theta \quad (\text{A17})$$

Δύναμη

$$\vec{F} = F_r \hat{e}_r + F_\theta \hat{e}_\theta \quad (\text{A18})$$

2ος νόμος του Νεύτωνα

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r \quad (\text{A19})$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta$$

Κεντρικό δυναμικό

Εξισώσεις κίνησης

$$m r^2 \dot{\theta} = L \quad (\text{A20})$$

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2 m r^2} + V(r) = E \quad (\text{A21})$$

όπου L η στροφορμή και E η ενέργεια.
Ειδικά για $V(r) = -GMm/r = -\alpha/r$ η τροχιά σώματος μάζας m δίνεται από

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (\text{A22})$$

με

$$r_0 = \frac{L^2}{m \alpha} \quad (\text{A23})$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2 E L^2}{m \alpha^2}} \quad (\text{A24})$$

Για ελλειπτική τροχιά ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης δίνεται από

$$a = r_0 / (1 - \epsilon^2) \quad (\text{A25})$$