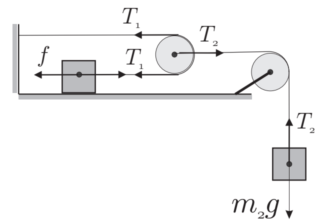
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: **ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι** (ΤΜΗΜΑ ΑΡΤΙΩΝ)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Αν. Καθηγητής Ι. ΡΙΖΟΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2009

ΘΕΜΑ 1 (*2.5 μονάδες*)



(i) Θεωρώντας T_1 και T_2 τις τάσεις των δυο σχοινιών και f την στατική τριβή όπως στο σχήμα έχουμε ισορροπία όταν

$$T_2 = 2T_1 \tag{1}$$
$$T_1 = f \leq \mu\, m_1\, g \tag{2}$$
$$T_2 = m_2\, g \tag{3}$$

απ'οπου συμπεραίνουμε ότι η συνθήκη ισορροπίας είναι

$$\frac{m_2}{2} \leq \mu\, m_1 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} \leq 2\,\mu \tag{4}$$

(ii) Στην περίπτωση κίνησης και εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα για τις μάζες m_1 και m_2 έχουμε

$$m_1\, a_1 = T_1 - f \tag{5}$$
$$m_2\, a_2 = m_2\, g - T_2 \tag{6}$$

όπου a_1 και a_2 της επιταχύνσεις των δύο μαζών και $f = \mu\, N = \mu\, m_1\, g$. Επίσης καθώς η μάζα των τροχαλιών είναι αμελητέα συνεχίζουμε να έχουμε $T_2 = 2\,T_1$. Λόγω της μη εκτατότητας των σχοινιών έχουμε $a_2 = 2\,a_1$ (καθώς το σώμα m_1 διανύει το μισό διάστημα από όσο διανύει το m_2). Αντικαθιστώντας στις (;;) παίρνουμε

$$m_1\, a_1 - T_1 = -\mu\, m_1\, g \tag{7}$$
$$2m_2\, a_1 + 2\,T_1 = m_2\, g \tag{8}$$

και επιλύοντας το σύστημα παίρνουμε

$$a_1 = \frac{a_2}{2} = \frac{m_2 - 2\mu\, m_1}{2(m_1 + m_2)}\, g \tag{9}$$
$$T_1 = \frac{T_2}{2} = \frac{m_1\, m_2(1 + 2\mu)}{2(m_1 + m_2)}\, g \tag{10}$$

ΘΕΜΑ 2 (*2.5 μονάδες*)

(i) Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα μας δίνει για την κάθοδο του σώματος

$$m\,\frac{dy^2}{dt^2} = -m\,g + k\,v^2 \tag{11}$$

όπου θεωρούμε θετική φορά προς τα πάνω. Η δεύτερη παράγωγος στο πρώτο μέλος της διαφορικής γράφεται

$$\frac{dy^2}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = v\,\frac{dv}{dy} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dy} \tag{12}$$

$v = \frac{dy}{dt}$. Επομένως η εξίσωση κίνησης γράφεται ως διαφορική πρώτου βαθμού[1]

$$\frac{dv^2}{g - \frac{k}{m}v^2} = -2dy \Rightarrow -\frac{m}{k}\int_0^v \frac{d\left(g - \frac{k}{m}v'^2\right)}{g - \frac{k}{m}v'^2} = -2\int_h^y dy' \Rightarrow \ln\left(g - \frac{k}{m}v'^2\right)\Bigg|_0^v = 2\,\frac{k}{m}(y')\Bigg|_h^y$$
$$\Rightarrow \ln\left(1 - \frac{k}{g\,m}v^2\right) = 2\frac{k}{m}(y - h) \Rightarrow 1 - \frac{k}{g\,m}v^2 = e^{2\frac{k(y-h)}{m}} \Rightarrow v^2 = \frac{g\,m}{k}\left[1 - e^{2\frac{k(y-h)}{m}}\right] \tag{13}$$

[1]Η χρήση διαστατικήε ανάλυσης $m = g = k = 1$ απλοποιεί σημαντικά τις παρακάτω πράξεις.

(ii) Όταν το σωματίδιο φτάνει στο δάπεδο έχει ταχύτητα v_0 η οποία δίνεται από την (13) για $y = 0$

$$v_0 = \sqrt{\frac{g\,m}{k}\left[1 - e^{-\frac{2\,k\,h}{m}}\right]} \tag{14}$$

και λόγω της ελαστικής κρούσης ξεκινάει ανοδική πορεία με αρχική ταχύτητα v_0. Εφαρμόζοντας το νόμο του Νεύτωνα για την άνοδο παίρνουμε

$$m\,\frac{dy^2}{dt^2} = -m\,g - k\,v^2 \tag{15}$$

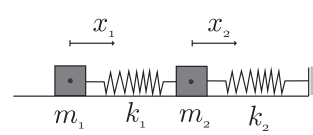
και επιλύοντας όπως στο (i) καταλήγουμε σε

$$\begin{aligned}&\frac{m}{k}\int_{v_0}^{0}\frac{dv^2}{g+\frac{k}{m}v^2} = -2\int_0^{h_1} dy \Rightarrow \ln\left(g+\frac{k}{m}v'^2\right)\Bigg|_{v_0}^{0} = -2\,\frac{k}{m}(y')\Bigg|_0^{h_1} \Rightarrow h_1 = \frac{m}{k}\ln\left(1+\frac{k}{g\,m}{v_0}^2\right)\Rightarrow\\ &h_1 = \frac{m}{2k}\ln\left(2 - e^{-\frac{2\,k\,h}{m}}\right)\end{aligned} \tag{16}$$

όπου αντικαταστήσαμε το v_0 από την (14)

ΘΕΜΑ 3 (*2.5 μονάδες*)

(i) Θεωρώντας μετατοπίσεις των μαζών m_1 και m_2 από τη θέση ισορροπίας κατά x_1 και x_2 αντίστοιχα και εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε τις εξισώσεις κίνησης



$$m_1\,\ddot{x}_1 = -k_1\,x_1 + k_1\,x_2 \tag{17}$$

$$m_2\,\ddot{x}_2 = k_1\,x_1 - k_1\,x_2 - k_2\,x_2 \tag{18}$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα του προβλήματος

$$m\,\ddot{x}_1 = -2\,k\,x_1 + 2\,k\,x_2 \tag{19}$$

$$2m\,\ddot{x}_2 = 2\,k\,x_1 - 5\,k\,x_2 \tag{20}$$

(ii) Σε μορφή πίνακα οι εξισώσεις κίνησης γράφονται

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega_0^2 & +2\omega_0^2 \\ +\omega_0^2 & -\frac{5}{2}\omega_0^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{21}$$

όπου $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Αντικαθιστώντας τη δοκιμαστική λύση

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{\rho t} \tag{22}$$

καταλήγουμε στο σύστημα

$$\begin{pmatrix} \rho^2 + 2\omega_0^2 & -2\omega_0^2 \\ \omega_0^2 & \rho^2 - \frac{5}{2}\omega_0^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

το οποίο έχει λύσεις όταν

$$\begin{aligned}&\det\begin{pmatrix} \rho^2 + 2\omega_0^2 & -2\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & \rho^2 + \frac{5}{2}\omega_0^2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\rho^2 + 2\omega_0^2\right)\left(\rho^2 + \frac{5}{2}\omega_0^2\right) - 2\omega_0^4 = 0\\ &\Rightarrow \rho^4 + \frac{9}{2}\,\rho^2 + 3\omega_0^4 = 0 \Rightarrow 2\rho^4 + 9\,\rho^2 + 6\omega_0^4 = 0 \Rightarrow \rho_1^2 = \frac{-9+\sqrt{33}}{4}\omega_0^2, \rho_2^2 = \frac{-9-\sqrt{33}}{4}\omega_0^2\end{aligned} \tag{24}$$

Επομένως οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης είναι ($\omega = \sqrt{-\rho^2}$)

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{9-\sqrt{33}}}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} \approx 1.9\sqrt{\frac{k}{m}}\ ,\ \omega_2 = \frac{\sqrt{9+\sqrt{33}}}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} \approx 0.90\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{25}$$

(iii)Αντικαθιστώντας κάθε μια από τις λύσεις ρ_1, ρ_2 στην (23) παίρνουμε αντίστοιχα

$$\begin{pmatrix} \frac{-9+\sqrt{33}}{4}\omega_0^2 + 2\omega_0^2 & -2\omega_0^2 \\ -2\omega_0^2 & \frac{-9+\sqrt{33}}{4}\omega_0^2 + \frac{5}{2}\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{-1+\sqrt{33}}{4}\,\omega_0^2 A_1 - 2\omega_0^2\, A_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\sqrt{33}-1}{8} \tag{26}$$

και

$$\begin{pmatrix} \frac{-9-\sqrt{33}}{4}\omega_0^2 + 2\omega_0^2 & -2\omega_0^2 \\ -2\omega_0^2 & \frac{-9-\sqrt{33}}{4}\omega_0^2 + \frac{5}{2}\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{-1-\sqrt{33}}{4} A_1 - 2\omega_0^2\, A_2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = -\frac{\sqrt{33}+1}{8} \tag{27}$$

ΘΕΜΑ 4 (*2.5 μονάδες*)

(i) Για παραβολική τροχιά η ενέργεια του κομήτη είναι μηδέν και η εκκεντρότητα ίση με τη μονάδα. Επομένως από την (A52) η εξίσωση κίνησης είναι

$$r = \frac{r_0}{1+\cos\theta} \tag{28}$$

με $r_0 = \frac{L^2}{M_K\,\alpha} = \frac{L^2}{G\,M\,M_K^2}$ (ii) Η ελάχιστη απόσταση (περιήλιο) δίνεται από την (28) για τη μέγιστη τιμή του $\cos\theta = 1$. Συνεπώς

$$r_{min} = \frac{r_0}{2} = \frac{L^2}{2G\,M\,M_K^2} \tag{29}$$

(iii) Η ταχύτητα δίνεται από την (A44)

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta \tag{30}$$

όπου χρησιμοποιώντας τις (28) και (A48)

$$\dot{\theta} = \frac{L}{M_K r^2} = \frac{L}{M_K\, r_0^2}(1+\cos\theta)^2 = \frac{G^2\,M^2\,M_K^3}{L^3}(1+\cos\theta)^2 \tag{31}$$

$$\dot{r} = \frac{r_0\,\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}\dot{\theta} = \frac{r_0\,\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}\frac{L}{M_K\,r_0^2}(1+\cos\theta)^2 = \frac{L}{M_K\,r_0}\,\sin\theta = \frac{G\,M\,M_K}{L}\,\sin\theta \tag{32}$$

Επομένως

$$\vec{v} = \frac{G\,M\,M_K}{L}\,\sin\theta\,\hat{e}_r + \frac{G\,M\,M_K}{L}(1+\cos\theta)\,\hat{e}_\theta = \frac{G\,M\,M_K}{L}\left[\sin\theta\,\hat{e}_r + (1+\cos\theta)\,\hat{e}_\theta\right] \tag{33}$$

(iv) Σύμφωνα με την (33)

$$|v| = \frac{G\,M\,M_K}{L}\sqrt{\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2} = \frac{2G\,M\,M_K}{L}\sqrt{1+\cos\theta} \tag{34}$$

η οποία παρουσιάζει μέγιστο για $cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$ που σύμφωνα με την (28) ο κομήτης βρίσκεται στο περιήλιο. Ελάχιστο έχουμε για $\cos\theta = -1$ για το οποίο σύμφωνα σύμφωνα με την (28) ο κομήτης βρίσκεται στο άπειρο.
(v) Η τροχιά της Γης δίνεται από

$$r_E = \frac{r_0^E}{1+\epsilon\cos\theta} = \frac{L^2}{G\,M\,M_E^2}\frac{1}{1+\epsilon\cos\theta} \tag{35}$$

Εξισώνοντας με την (28) παίρνουμε

$$\frac{L_E^2}{G\,M\,M_E^2}\frac{1}{1+\epsilon\cos\theta} = \frac{L^2}{G\,M\,M_K^2}\frac{1}{1+\cos\theta} \Rightarrow \frac{M_E^2}{L_E^2}(1+\epsilon\cos\theta) = \frac{M_K^2}{L_K^2}(1+\cos\theta) \Rightarrow \cos\theta = \frac{\frac{M_K^2}{L_K^2}+\frac{M_E^2}{L_E^2}}{\frac{M_K^2}{L_K^2}-\epsilon\frac{M_E^2}{L_E^2}}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{M_K^2\,L_E^2 + M_E^2\,L_K^2}{M_K^2 L_E^2 - \epsilon\,M_E^2 L_K^2} \tag{36}$$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\,\cos\phi + \cos\theta\,\sin\phi \tag{A37}$$

$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\,\cos\phi - \sin\theta\,\sin\phi \tag{A38}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{A39}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \tag{A40}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{A41}$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\,\cos\theta \tag{A42}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \tag{A43}$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta \tag{A44}$$

Ολοκληρώματα

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \tag{A45}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \mathrm{arctanh} x \tag{A46}$$

$$\tag{A47}$$

Ανάπτυγματα σε σειρές

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + \ldots \tag{A48}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5 + \ldots \tag{A49}$$

Πλάγια βολή

$$y = x\,\tan\theta - \frac{x^2 g}{2v_0^2\,\cos^2\theta} \tag{A50}$$

Μικρές Ταλαντώσεις

Στην περιοχή του ελάχιστου x_0 του δυναμικού $V(x)$

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}} \tag{A51}$$

Συστήματα μεταβλητής μάζας

$$\frac{d\,(m\,\vec{v})}{dt} = \vec{F} + \vec{v}'\,\frac{dm}{dt} \tag{A52}$$

Πολικές συντεταγμένες

Ταχύτητα

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta \tag{A53}$$

Επιτάχυνση

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta \tag{A54}$$

Δύναμη

$$\vec{F} = F_r\,\hat{e}_r + F_\theta\,\hat{e}_\theta \tag{A55}$$

2ος νόμος του Νεύτωνα

$$\begin{aligned} m\left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right) &= F_r \\ m\left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right) &= F_\theta \end{aligned} \tag{A56}$$

Κεντρικό δυναμικό

Εξισώσεις κίνησης

$$m\,r^2\,\dot{\theta} = L \tag{A57}$$

$$\frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\,m\,r^2} + V(r) = E \tag{A58}$$

όπου L η στροφορμή και E η ενέργεια. Ειδικά για $V(r) = -GMm/r = -\alpha/r$ η τροχιά σώματος μάζας m δίνεται από

$$r = \frac{r_0}{1+\epsilon\,\cos\theta} \tag{A59}$$

με

$$r_0 = \frac{L^2}{m\,\alpha} \tag{A60}$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2\,E\,L^2}{m\,\alpha^2}} \tag{A61}$$

Για ελλειπτική τροχιά ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης δίνεται από

$$a = r_0/(1-\epsilon^2) \tag{A62}$$

Τρίτος νόμος του Kepler

$$T^2 = \frac{4\,\pi^2}{G\,M}\,a^3 \tag{A63}$$