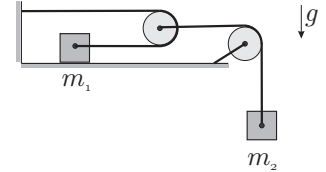


ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2009

ΘΕΜΑ 1 (2.5 μονάδες)

Δύο σώματα μαζών  $m_1$  και  $m_2$  συνδέονται όπως στο σχήμα. Οι τροχαλίες είναι αβαρείς και τα σχοινιά μη εκτατά. Θεωρούμε ότι ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του σώματος  $m_1$  και του οριζόντιου τραπέζιου είναι  $\mu$  και ισούται κατά προσέγγιση με τον συντελεστή τριβής ολισθήσεως. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι  $g$ .



- Να βρεθεί η συνθήκη ισορροπίας του συστήματος.
- Στην περίπτωση που το σύστημα κινείται να υπολογιστούν οι επιταχύνσεις των μαζών και οι τάσεις των σχοινιών.

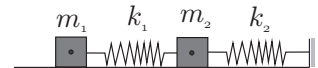
ΘΕΜΑ 2 (2.5 μονάδες)

Σωματίδιο μάζας  $m$  αφήνεται να πέσει κατακόρυφα από ύψος  $h$  πάνω από οριζόντιο δάπεδο. Το μέτρο της αντίστασης του αέρα είναι  $k v^2$  όπου  $k$  θετική σταθερά και  $v$  η ταχύτητα του σωματιδίου και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι  $g$ .

- Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σωματιδίου συναρτήσει του ύψους στο οποίο βρίσκεται καθώς πέφτει (πριν συγκρουστεί με το δάπεδο).
- Αν η κρούση με το δάπεδο είναι πλήρως ελαστική, να υπολογιστεί το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει το σωματίδιο μετά την πρώτη κρούση με το δάπεδο.

ΘΕΜΑ 3 (2.5 μονάδες)

Δύο μάζες  $m_1 = m$ ,  $m_2 = 2m$  συνδέονται με δύο ιδανικά ελατήρια σταθερών  $k_1 = 2k$ ,  $k_2 = 3k$  όπως στο σχήμα και τοποθετούνται σε οριζόντιο τραπέζι. Αγνοώντας τις τριβές



- Να γραφτούν οι εξισώσεις κίνησης των δύο μαζών.
- Να προσδιοριστούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος.
- Να προσδιοριστεί ο λόγος/οι των πλατών των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος.

ΘΕΜΑ 4 (2.5 μονάδες)

Κομήτης μάζας  $M_K$  και στροφορμής  $L$  εισέρχεται στο ηλιακό σύστημα κινούμενος στο επίπεδο της τροχιάς της Γης εκτελώντας παραβολική τροχιά. Θεωρώντας γνωστή τη μάζα του Ηλίου  $M$  και τη σταθερά του Νεύτωνα  $G$

- Να γραφεί η εξίσωση κίνησης του κομήτη σε πολικές συντεταγμένες.
- Να υπολογιστεί η ελάχιστη απόσταση του κομήτη από τον ήλιο κατά τη διέλευσή του από το ηλιακό σύστημα.
- Να υπολογιστεί η ταχύτητα του κομήτη συναρτήσει της γωνίας  $\theta$  του ερωτήματος (i).
- Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα (iii) βρείτε για ποιες γωνίες  $\theta$  έχουμε μέγιστο και ελάχιστο του μέτρου της ταχύτητας. Σε ποια απόσταση από τον Ήλιο βρίσκεται ο κομήτης σε αυτές τις θέσεις ;
- Θεωρώντας ότι η Γη έχει μάζα  $M_E$  και στροφορμή  $L_E$  και κινείται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τον ήλιο εκκεντρότητας  $\epsilon$ , βρείτε σε ποιες γωνίες τέμνει ο κομήτης της τροχιάς της Γης.

---

**ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ**

---

*Τριγωνομετρικές συναρτήσεις*

$$\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \quad (\text{A1})$$

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \quad (\text{A2})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{A3})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad (\text{A4})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{A5})$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta \quad (\text{A6})$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad (\text{A7})$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta \quad (\text{A8})$$

*Ολοκληρώματα*

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \quad (\text{A9})$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctanh} x \quad (\text{A10})$$

$$(\text{A11})$$

*Ανάπτυγματα σε σειρές*

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \dots \quad (\text{A12})$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \dots \quad (\text{A13})$$

*Πλάγια βολή*

$$y = x \tan \theta - \frac{x^2 g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (\text{A14})$$

*Μικρές Ταλαντώσεις*

Στην περιοχή του ελάχιστου  $x_0$  του δυναμικού  $V(x)$

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}} \quad (\text{A15})$$

*Συστήματα μεταβλητής μάζας*

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} + \vec{v}' \frac{dm}{dt} \quad (\text{A16})$$

*Πολικές συντεταγμένες*

Ταχύτητα

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad (\text{A17})$$

Επιτάχυνση

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \hat{e}_\theta \quad (\text{A18})$$

Δύναμη

$$\vec{F} = F_r \hat{e}_r + F_\theta \hat{e}_\theta \quad (\text{A19})$$

2ος νόμος του Νεύτωνα

$$m (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) = F_r \quad (\text{A20})$$

$$m (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) = F_\theta$$

*Κεντρικό δυναμικό*

Εξισώσεις κίνησης

$$m r^2 \dot{\theta} = L \quad (\text{A21})$$

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2 m r^2} + V(r) = E \quad (\text{A22})$$

όπου  $L$  η στροφορμή και  $E$  η ενέργεια.  
Ειδικά για  $V(r) = -GMm/r = -\alpha/r$  η τροχιά σώματος μάζας  $m$  δίνεται από

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (\text{A23})$$

με

$$r_0 = \frac{L^2}{m \alpha} \quad (\text{A24})$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2 E L^2}{m \alpha^2}} \quad (\text{A25})$$

Για ελλειπτική τροχιά ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης δίνεται από

$$a = r_0 / (1 - \epsilon^2) \quad (\text{A26})$$

Τρίτος νόμος του Kepler

$$T^2 = \frac{4 \pi^2}{GM} a^3 \quad (\text{A27})$$