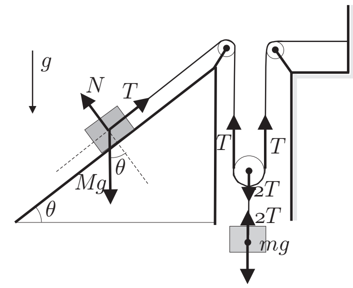
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: **ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι** (ΤΜΗΜΑ ΑΡΤΙΩΝ)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Αν. Καθηγητής Ι. ΡΙΖΟΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2008

ΘΕΜΑ 1 (*2.5 μονάδες*)



(i) Οι δυνάμεις που ενεργούν στα σώματα φαίνονται στο σχήμα, όπου T η τάση του σχοινιού. Στην κινούμενη τροχαλία, καθώς αυτή δεν έχει μάζα, έχουμε μηδενισμό του αθροίσματος των δυνάμεων, και συνεπώς η τάση στο σχοινί που συγκρατεί το σώμα μάζας m είναι $2T$. Θεωρώντας θετική φορά προς τα κάτω και a την επιτάχυνση του σώματος μάζας m η σχετική εξίσωση κίνησης είναι

$$m\,a = m\,g - 2\,T \tag{1}$$

Στο σώμα M η αντίδραση του επιπέδου εξουδετερώνει την κάθετη (στο κεκλιμένο επίπεδο) συνιστώσα του βάρους. Για τις παράλληλες με το κεκλιμένο επίπεδο συνιστώσες έχουμε

$$M\,a' = m\,g\,\sin\theta - T \tag{2}$$

όπου a' η επιτάχυνση της μάζας m. Καθώς το σχοινί είναι μη εκτατό, και λόγω της συνδεσμολογίας του σχήματος, το σώμα M διανύει διπλάσιο και αντίθετο διάστημα από το m και συνεπώς οι επιταχύνσεις συνδέονται

$$a' = -2\,a \tag{3}$$

Από τις (1)-(3) καταλήγουμε στο σύστημα

$$m\,a + 2\,T = m\,g \tag{4}$$
$$-2\,M\,a + T = M\,g\,\sin\theta \tag{5}$$

από το οποίο βρίσκουμε

$$a = \frac{g(m - 2M\sin\theta)}{m + 4M}\ ,\ T = \frac{gmM(\sin\theta + 2)}{m + 4M} \tag{6}$$

(ii) Κατά την ισορροπία για το σώμα μάζας m θα έχουμε

$$2T = m\,g \Rightarrow T = \frac{m\,g}{2} \tag{7}$$

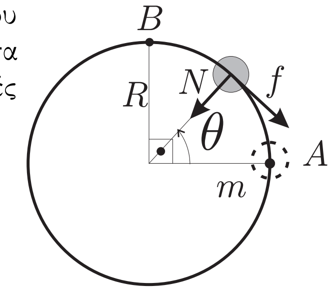
Για το σώμα M η συνθήκη ισορροπίας είναι

$$f + M\,g\,\sin\theta - T \Rightarrow f = M\,g\,\sin\theta - \frac{m\,g}{2} \tag{8}$$

Όπου f η τριβή για την οποία έχουμε

$$\begin{aligned}
|f| \le \mu\,N = \mu\,M\,g\,\cos\theta &\Rightarrow \\
\left|M\,g\,\sin\theta - \frac{m\,g}{2}\right| \le \mu\,M\,g\,\cos\theta &\Rightarrow \\
-\mu\,M\,g\,\cos\theta \le M\,g\,\sin\theta - \frac{m\,g}{2} \le \mu\,M\,g\,\cos\theta &\Rightarrow \\
-M\ (\mu\cos\theta + \sin\theta) \le -\frac{m}{2} \le -M\ (\sin\theta - \mu\cos\theta) &\Rightarrow \\
\mu\cos\theta + \sin\theta \ge \frac{m}{2\,M} \ge \sin\theta - \mu\cos\theta &
\end{aligned} \tag{9}$$

ΘΕΜΑ 2 (*2.5 μονάδες*)



(i) Στο σώμα ενεργεί η αντίδραση της στεφάνης $-N\,\hat{e}_r$ και η αντίσταση του αέρα όπως στο σχήμα. Η ταχύτητα του σώματος έχει μόνο τροχιακή συνιστώσα $\vec{v} = R\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$. Σύμφωνα με την (Α49) ο 2ος νόμος του Νεύτωνα σε πολικές συντεταγμένες γράφεται

$$m\left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right) = F_r$$
$$m\left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right) = F_\theta$$

Εδώ έχουμε $r = R \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$ και $F_r = -N$, $F_\theta = -k\,R\,\dot{\theta}$. Επομένως

$$-m\,R\,\dot{\theta}^2 = -N \tag{10}$$
$$m\,R\,\ddot{\theta} = -k\,R\,\dot{\theta} \tag{11}$$

Από την (11)

$$\ddot{\theta} = -\frac{k}{m}\dot{\theta} \Rightarrow \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} = -\frac{k}{m} \Rightarrow \frac{d\,\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = -\frac{k}{m}\,dt \Rightarrow \int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} \frac{d\,\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt \Rightarrow \ln\dot{\theta}\Big|_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} = -\frac{k}{m}\,t \tag{12}$$
$$\ln\frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}_0} = -\frac{k}{m}\,t \Rightarrow \dot{\theta} = \dot{\theta}_0\,e^{-\frac{k}{m}\,t} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_0}{R}\,e^{-\frac{k}{m}\,t} \tag{13}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $v_0 = \dot{\theta}_0\,R$. Αντικαθιστώντας στην (10) βρίσκουμε

$$N = \frac{m\,v_0^2}{R}\,e^{-\frac{2k}{m}\,t} \tag{14}$$

(ii) Ολοκληρώνοντας την (11) βρίσκουμε

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta' = \frac{v_0}{R}\int_0^\tau dt\,e^{-\frac{k}{m}\,t} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = -\frac{v_0\,m}{k\,R}\,e^{-\frac{k}{m}\,t}\Big|_0^\tau \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{v_0\,m}{k\,R}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}\,\tau}\right) \Rightarrow$$
$$e^{-\frac{k}{m}\,\tau} = 1 - \frac{k\,R\,\pi}{2\,v_0\,m} \Rightarrow \tau = -\frac{m}{k}\,\ln\left(1 - \frac{k\,R\,\pi}{2\,v_0\,m}\right) \tag{15}$$

Για να υπάρχει λύση θα πρέπει $1 - \frac{k\,R\,\pi}{2\,v_0\,m} \geq 0$, διαφορετικά το σώμα δεν φτάνει ποτέ στο Β.

ΘΕΜΑ 3 (*2.5 μονάδες*)

(i) Χρησιμοποιώντας την (Α45) για κίνηση στην κατακόρυφο (με θετική φορά προς τα πάνω)

$$\frac{d\,(m\,v)}{dt} = F + v'\,\frac{dm}{dt} \Rightarrow m\,\frac{dv}{dt} = F + \left(v' - v\right)\,\frac{dm}{dt} \tag{16}$$

Η εξωτερική δύναμη είναι $F = -m\,g$ και η ταχύτητα των αερίων ως προς την Γη θα είναι $v' = -u + v \Rightarrow v' - v = -u$. Αντικαθιστώντας

$$m\,\frac{dv}{dt} = m\,g - u\,\frac{dm}{dt} \Rightarrow dv = g\,dt - u\,\frac{dm}{m} \Rightarrow \int_0^v d\tilde{v} = -g\int_0^t d\tilde{t} - u\int_{m_0}^m \frac{d\tilde{m}}{\tilde{m}}$$
$$v = -g\,t - u\,\ln m|_{m_0}^m \Rightarrow v = -g\,t - u\,\ln\frac{m}{m_0} \tag{17}$$

Όμως

$$\frac{dm}{dt} = -\lambda \Rightarrow \int_{m_0}^m d\tilde{m} = -\lambda\int_0^t d\tilde{t} \Rightarrow m = m_0 - \lambda\,t \tag{18}$$

και τελικά

$$v = -g\,t - u\,\ln\frac{m_0 - \lambda\,t}{m_0} \Rightarrow v = -g\,t - u\,\ln\left(1 - \frac{\lambda}{m_0}t\right) \tag{19}$$

(ii) Από την (19) έχουμε

$$\frac{dy}{dt} = -g\,t - u\,\ln\left(1 - \frac{\lambda}{m_0}t\right) \Rightarrow \int_0^h dy = -g\int_0^t d\tilde{t}\tilde{t} - u\int_0^t d\tilde{t}\ln\left(1 - \frac{\lambda}{m_0}\tilde{t}\right)$$
$$h = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 - \frac{u\,m_0}{\lambda}\int_1^{1-\frac{\lambda}{m_0}\tilde{t}} dz\ln z$$

όπου θέσαμε $z = 1 - \frac{\lambda}{m_0}\,\tilde{t} \Rightarrow dz = -\frac{\lambda}{m_0}d\tilde{t}$. Χρησιμοποιώντας την (A40)

$$h = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + \frac{u\,m_0}{\lambda}\left[-z + z\ln z\right]_1^{1-\frac{\lambda}{m_0}\,t} \Rightarrow$$
$$h = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 - \frac{u\,m_0}{\lambda}\left(-1 + \frac{\lambda}{m_0}\,t + \left(1 - \frac{\lambda}{m_0}\,t\right)\ln\left(1 - \frac{\lambda}{m_0}\,t\right) + 1\right) \Rightarrow$$
$$h = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 - u\,t - \frac{u\,m_0}{\lambda}\,\left(1 - \frac{\lambda}{m_0}\,t\right)\ln\left(1 - \frac{\lambda}{m_0}\,t\right) \tag{20}$$

ΘΕΜΑ 4 (*2.5 μονάδες*)

(i) Έχουμε

$$\theta(t) = A\,t^2 \Rightarrow \dot{\theta} = 2\,A\,t \tag{21}$$

και επίσης

$$\theta(t) = A\,t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{\theta}{A}} \tag{22}$$

Επομένως

$$\dot{\theta} = 2\,A\sqrt{\frac{\theta}{A}} \Rightarrow \dot{\theta} = 2\sqrt{A\,\theta} \tag{23}$$

Χρησιμοποιώντας την (A50)

$$r^2 = \frac{L}{m\,\dot{\theta}} \Rightarrow \tag{24}$$
$$r^2 = \frac{L}{2\,m}\frac{1}{\sqrt{A\,\theta}} \tag{25}$$

(ii) Χρειάζεται να υπολογίσουμε το $\dot{r}$. Από την (24)

$$r^2 = \frac{L}{m\,\dot{\theta}} \Rightarrow r^2 = \frac{L}{2m\,A\,t} \tag{26}$$

Επίσης λύνοντας ως προς το χρόνο

$$t = \frac{L}{2m\,A\,r^2} \tag{27}$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο την (26) και χρησιμοποιώντας την (27)

$$2r\,\dot{r} = -\frac{L}{2m\,A}\frac{1}{t^2} \Rightarrow 2r\,\dot{r} = -\frac{L}{2m\,A}\frac{4\,m^2\,A^2\,r^4}{L^2} \Rightarrow \dot{r} = -\frac{m\,A}{L}\,r^3 \tag{28}$$

Από την (A51) βρίσκουμε

$$V(r) = E - \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 - \frac{L^2}{2\,m\,r^2} = E - \frac{m^3\,A^2}{2\,L^2}\,r^6 - \frac{L^2}{2\,m\,r^2} \tag{29}$$

Επομένως

$$F(r) = -\frac{dV(r)}{dr} = \frac{3\,m^3\,A^2}{L^2}\,r^5 - \frac{L^2}{m\,r^3}$$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\,\cos\phi + \cos\theta\,\sin\phi \tag{A30}$$

$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\,\cos\phi - \sin\theta\,\sin\phi \tag{A31}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{A32}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \tag{A33}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{A34}$$

$$\sin(2\theta) = 2\,\sin\theta\,\cos\theta \tag{A35}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \tag{A36}$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta \tag{A37}$$

Ολοκληρώματα

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \tag{A38}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \mathrm{arctanh} x \tag{A39}$$

$$\int \ln x = -x + x\,\ln x \tag{A40}$$

Ανάπτυγματα σε σειρές

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + \ldots \tag{A41}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5 + \ldots \tag{A42}$$

Πλάγια βολή

$$y = x\,\tan\theta - \frac{x^2 g}{2v_0^2\,\cos^2\theta} \tag{A43}$$

Μικρές Ταλαντώσεις

Στην περιοχή του ελάχιστου x_0 του δυναμικού $V(x)$

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}} \tag{A44}$$

Συστήματα μεταβλητής μάζας

$$\frac{d\,(m\,\vec{v})}{dt} = \vec{F} + \vec{v}'\,\frac{dm}{dt} \tag{A45}$$

Πολικές συντεταγμένες

Ταχύτητα

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta \tag{A46}$$

Επιτάχυνση

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta \tag{A47}$$

Δύναμη

$$\vec{F} = F_r\,\hat{e}_r + F_\theta\,\hat{e}_\theta \tag{A48}$$

2ος νόμος του Νεύτωνα

$$\begin{aligned} m\,\left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right) &= F_r \\ m\,\left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right) &= F_\theta \end{aligned} \tag{A49}$$

Κεντρικό δυναμικό

Εξισώσεις κίνησης

$$m\,r^2\,\dot{\theta} = L \tag{A50}$$

$$\frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\,m\,r^2} + V(r) = E \tag{A51}$$

όπου L η στροφορμή και E η ενέργεια. Ειδικά για $V(r) = -GMm/r = -\alpha/r$ η τροχιά σώματος μάζας m δίνεται από

$$r = \frac{r_0}{1+\epsilon\,\cos\theta} \tag{A52}$$

με

$$r_0 = \frac{L^2}{m\,\alpha} \tag{A53}$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2\,E\,L^2}{m\,\alpha^2}} \tag{A54}$$

Για ελλειπτική τροχιά ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης δίνεται από

$$a = r_0/(1-\epsilon^2) \tag{A55}$$

Τρίτος νόμος του Kepler

$$T^2 = \frac{4\,\pi^2}{G\,M}\,a^3 \tag{A56}$$