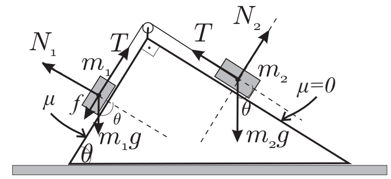
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: **ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι** (ΤΜΗΜΑ ΑΡΤΙΩΝ)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Αν. Καθηγητής Ι. ΡΙΖΟΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ 2008

ΘΕΜΑ 1 (*2.5 μονάδες*)



(i) Οι δυνάμεις που ενεργούν στα σώματα φαίνονται στο σχήμα. Για την τριβή θεωρούμε θετική φορά αυτή του σχήματος. Για το σώμα m_2 οι συνθήκες ισορροπίας είναι

$$T = m_2\, g\, \cos\theta \tag{1}$$
$$N_2 = m_2\, g\, \sin\theta \tag{2}$$

και για το σώμα m_1

$$T = f + m_1\, g\, \sin\theta \tag{3}$$
$$N_1 = m_1\, g\, \cos\theta \tag{4}$$

όπου

$$|f| \leq \mu\, N_2 \tag{5}$$

Χρησιμοποιώντας τις (1),(3),(4) η (5) γράφεται

$$|m_2\, g\, \cos\theta - m_1\, g\, \sin\theta| \leq \mu\, m_1\, g\, \cos\theta \Rightarrow \tag{6}$$
$$-\mu\, m_1\, \cos\theta \leq m_2\, \cos\theta - m_1\, \sin\theta \leq \mu\, m_1\, \cos\theta \tag{7}$$
$$m_1\, (\sin\theta - \mu\, \cos\theta) \leq m_2\, \cos\theta \leq m_1\, (\mu\, \cos\theta + \sin\theta) \tag{8}$$
$$\tan\theta - \mu \leq \frac{m_2}{m_1} \leq \tan\theta + \mu \tag{9}$$

που είναι και η ζητούμενη σχέση ισορροπίας.
(ii) Έστω a η επιτάχυνση του σώματος m_2. Εφαμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα για καθένα από τα δύο σώματα και λαμβάνοντας υπ'οψιν ότι το σχοινί είναι μη εκτατό έχουμε

$$m_2\, a = m_2\, g\, \cos\theta - T \tag{10}$$
$$m_1\, a = T - f - m_1\, g\, \cos\theta \tag{11}$$

όπου

$$f = \mu\, N_1 = \mu\, m_1\, g\, \cos\theta \tag{12}$$

Χρησιμοποιώντας την (12) το σύστημα (10),(11) γράφεται

$$m_2\, a + T = m_2\, g\, \cos\theta \tag{13}$$
$$m_1\, a - T = -m_1\, g\, (\sin\theta + \mu\, \cos\theta) \tag{14}$$

Επιλύοντας το σύστημα βρίσκουμε

$$a = \frac{g}{m_1 + m_2}\, [m_2\, \cos\theta - m_1\, (\sin\theta + \mu\, \cos\theta)] \tag{15}$$
$$T = \frac{m_1\, m_2\, g}{m_1 + m_2}\, [\sin\theta + (1 + \mu)\cos\theta] \tag{16}$$

ΘΕΜΑ 2 (*3 μονάδες*)

(i) Έστω y το ύψος στο οποίο βρίσκεται το σωματίδιο. Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$m\,\ddot{y} = -m\,g - k\,\dot{y} \tag{17}$$

Θέτοντας $v = \dot{y}$ η διαφορική εξίσωση γράφεται

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} = -g - \frac{k}{m}\,v \Rightarrow \frac{dv}{g + \frac{k}{m}\,v} = -dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{d\left(\frac{k}{m}v'\right)}{g + \frac{k}{m}\,v'} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt' \\
\ln\left(g + \frac{k}{m}\,v'\right)\Big|_{v_0}^{v} = -\frac{k}{m}\,t \Rightarrow \ln\left(\frac{1 + \frac{k}{g\,m}\,v}{1 + \frac{k}{g\,m}\,v_0}\right) = -\frac{k}{m}\,t \Rightarrow \\
1 + \frac{k}{g\,m}\,v = \left(1 + \frac{k}{g\,m}\,v_0\right) e^{-\frac{k}{m}\,t} \Rightarrow v = -\frac{g\,m}{k} + \left(v_0 + \frac{g\,m}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}\,t}
\end{aligned} \tag{18}$$

(ii) Στο μέγιστο ύψος θα έχουμε

$$v = 0 \Rightarrow -\frac{g\,m}{k} + \left(v_0 + \frac{g\,m}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}\,t} = 0 \Rightarrow t = -\frac{k}{m}\ln\left(\frac{\frac{g\,m}{k}}{1 + \frac{g\,m}{k}}\right) \Rightarrow t = \frac{k}{m}\ln\left(1 + \frac{k}{g\,m}v_0\right) \tag{19}$$

(iii) Από την (18)

$$\begin{aligned}
v = \frac{dy}{dt} = -\frac{g\,m}{k} + \left(v_0 + \frac{g\,m}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}\,t} \Rightarrow \int_0^y dy' = -\frac{g\,m}{k}\int_0^t dt' + \left(v_0 + \frac{g\,m}{k}\right)\int_0^t dt' e^{-\frac{k}{m}\,t'} \\
y = -\frac{g\,m}{k}\,t - \frac{m}{k}\left(v_0 + \frac{g\,m}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}\,t'}\Big|_0^t \Rightarrow y = -\frac{g\,m}{k}\,t + \frac{m}{k}\left(v_0 + \frac{g\,m}{k}\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}\,t}\right)
\end{aligned} \tag{20}$$

(iv) Στο όριο $k \to 0$ και με την προϋπόθεση ότι $\frac{k\,t}{m} << 1$

$$e^{-\frac{k}{m}\,t} = 1 - \frac{k}{m}\,t + \frac{1}{2}\frac{k^2}{m^2}\,t^2 + \ldots \tag{21}$$

Αντικαθιστώντας στην (18)

$$v = -\frac{g\,m}{k} + \left(v_0 + \frac{g\,m}{k}\right)\left(1 - \frac{k}{m}\,t + \frac{1}{2}\frac{k^2}{m^2}\,t^2 + \ldots\right) = v_0 - \left(\frac{v_0\,k}{m} + g\right)\,t + \frac{1}{2}\left(\frac{v_0\,k}{m} + g\right)\frac{k^2}{m^2}\,t^2 + \ldots$$

Ενώ από την (20)

$$y = -\frac{g\,m}{k}\,t + \frac{m}{k}\left(v_0 + \frac{g\,m}{k}\right)\left(\frac{k}{m}\,t - \frac{1}{2}\frac{k^2}{m^2}\,t^2 + \ldots\right) = v_0\,t - \frac{1}{2}g\,t^2 - \frac{k\,v_0}{2m}\,t^2 + \ldots \tag{22}$$

Παρατηρούμε ότι παίρνουμε το σωστό όριο της κίνησης σε βαρυτικό πεδίο για $k = 0$

$$v = v_0 - g\,t \tag{23}$$

$$y = v_0\,t - \frac{1}{2}g\,t^2 \tag{24}$$

ΘΕΜΑ 3 (*2.0 μονάδες, A=1, B=1*)

A. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας δίνεται από

$$v_{CM} = \frac{m_1\,v_1 + m_2\,v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m\,2v_0 + 2m\,v_0}{m + 2m} = \frac{4}{3}v_0 \tag{25}$$

Επομένως στο ΣΑ του κέντρου μάζας οι ταχύτητες των δύο μαζών θα είναι

$$v_1' = v_1 - v_{CM} = 2\,v_0 - \frac{4}{3}v_0 = \frac{2}{3}\,v_0 \tag{26}$$

$$v_2' = v_2 - v_{CM} = v_0 - \frac{4}{3}v_0 = -\frac{1}{3}\,v_0 \tag{27}$$

Έστω V_1' και V_2' οι τελικές ταχύτητες των μαζών m_1 και m_2 αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας τη διατήρηση ενέργειας και ορμής έχουμε

$$m_1\,v_1' + m_2\,v_2' = m_1\,V_1' + m_2\,V_2' \Rightarrow m_1(v_1' - V_1') = -m_2(v_2' - V_2') \tag{28}$$

$$\frac{1}{2}m_1\,{v_1'}^2 + \frac{1}{2}m_2\,{v_2'}^2 = \frac{1}{2}m_1\,{V_1'}^2 + \frac{1}{2}m_2\,{V_2'}^2 \Rightarrow m_1\left({v_1'}^2 - {V_1'}^2\right) = -m_2\left({v_2'}^2 - {V_2'}^2\right) \tag{29}$$

Διαιρώντας κατά μέλη αφού αναπτύξουμε τις διαφορές τετραγώνων παίρνουμε

$$m_1(v_1' + V_1') = m_2(v_2' + V_2') \tag{30}$$

η οποία μαζί με την (28) αποτελούν σύστημα εξισώσεων για τα άγνωστα V_1', V_2'. Επιλύοντας παίρνουμε

$$V_1' = \frac{m_2}{m_1}v_2' = -\frac{2}{3}v_0 \tag{31}$$

$$V_2' = \frac{m_1}{m_2}v_1' = \frac{1}{3}v_0 \tag{32}$$

B. Η εξίσωση τροχιάς σε βαρυτικό δυναμικό $V = -\alpha/r$ σύμφωνα με την $(A22)$ είναι

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon\,\cos\theta} \tag{33}$$

όπου $r_0 = \frac{L^2}{m\,\alpha}$ Αφού τα δύο σώματα έχουν ίδια στροφορμή και μάζα και γυρνούν γύρω από τον ίδιο πλανήτη το r_0 είναι κοινό και για τα δύο. Η ακτίνα του τροχιάς του πρώτου είναι σταθερή

$$r_C = r_0$$

ενώ του δευτέρου στο απήλιο είναι

$$r_D = \frac{r_0}{1 - \varepsilon}$$

Η ταχύτητα του πρώτου έχει μόνο γωνιακή συνιστώσα (βλ $(A17)$)

$$v_C = r_C\,\dot{\theta}_C = r_C\,\frac{L^2}{m\,r_C^2} = \frac{L^2}{m\,r_C}$$

και το ίδιο ισχύει για την ταχύτητα του δευτέρου στο απήλιο

$$v_D = r_C\,\dot{\theta}_D = r_C\,\frac{L^2}{m\,r_D^2} = \frac{L^2}{m\,r_D}$$

Άρα ο λόγος των ταχυτήτων είναι

$$\frac{v_D}{v_C} = \frac{r_D}{r_C} = 1 - \varepsilon$$

και σύμφωνα με τα δεδομένα

$$1 - \varepsilon = \frac{1}{4} \Rightarrow \varepsilon = \frac{3}{4}$$

ΘΕΜΑ 4 (*2.5 μονάδες*)

(i) Από την εξίσωση τροχιάς

$$r = k\, e^{a\,\theta} \Rightarrow \dot{r} = k\, a\, e^{a\,\theta}\dot{\theta} \Rightarrow \dot{r} = r\, a\, \dot{\theta} \Rightarrow \dot{r} = \frac{a\, L}{m\, r} \tag{34}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (A46). Αντικαθιστώντας στην (A48)

$$\frac{1}{2}\, m\, \frac{a^2\, L^2}{m^2\, r^2} + \frac{L^2}{2\, m\, r^2} + V(r) = E \Rightarrow V(r) = E - \frac{L^2(1+a^2)}{2\, m\, r^2} \tag{35}$$

Επομένως

$$\vec{F} = -\frac{dV}{dr}\hat{e}_r = \frac{L^2(1+a^2)}{m\, r^3}\hat{e}_r \tag{36}$$

(i) Χρησιμοποιώντας την (34)

$$\int r\, dr = \frac{a\, L}{m}\int dt + c \Rightarrow \frac{r^2}{2} = \frac{a\, L}{m}\, t + c \Rightarrow r^2 = \frac{2a\, L}{m}\, t + r_0 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{2a\, L}{m}\, t + r_0} \tag{37}$$

και από

$$\dot{\theta} = \frac{L}{m\, r^2} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{L}{2a\, L\, t + m\, r_0} \Rightarrow \int d\theta = \int dt \frac{L}{2a\, L\, t + m\, r_0} + c_1 \Rightarrow \theta = \frac{1}{2a}\ln\left[2a\, L\, t + m\, r_0\right] + c_1 \tag{38}$$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\,\cos\phi + \cos\theta\,\sin\phi \quad (A39)$$

$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\,\cos\phi - \sin\theta\,\sin\phi \quad (A40)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (A41)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad (A42)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (A43)$$

$$\begin{aligned} \sin(2\theta) &= 2\,\sin\theta\,\cos\theta & (A44) \\ \cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta & (A45) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta \quad (A46)$$

Ολοκληρώματα

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \quad (A47)$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \mathrm{arctanh} x \quad (A48)$$

$$\int \ln x = -x + x\,\ln x \quad (A49)$$

Ανάπτυγματα σε σειρές

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + \ldots \quad (A50)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5 + \ldots \quad (A51)$$

Πλάγια βολή

$$y = x\,\tan\theta - \frac{x^2 g}{2v_0^2\,\cos^2\theta} \quad (A52)$$

Μικρές Ταλαντώσεις

Στην περιοχή του ελάχιστου x_0 του δυναμικού $V(x)$

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}} \quad (A53)$$

Συστήματα μεταβλητής μάζας

$$\frac{d\,(\,m\,\vec{v})}{dt} = \vec{F} + \vec{v}'\,\frac{dm}{dt} \quad (A54)$$

Πολικές συντεταγμένες

Ταχύτητα

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta \quad (A55)$$

Επιτάχυνση

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta \quad (A56)$$

Δύναμη

$$\vec{F} = F_r\,\hat{e}_r + F_\theta\,\hat{e}_\theta \quad (A57)$$

2ος νόμος του Νεύτωνα

$$\left.\begin{aligned} m\,\left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right) &= F_r \\ m\,\left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right) &= F_\theta \end{aligned}\right. \quad (A58)$$

Κεντρικό δυναμικό

Εξισώσεις κίνησης

$$\begin{aligned} m\,r^2\,\dot{\theta} &= L & (A59) \\ \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\,m\,r^2} + V(r) &= E & (A60) \end{aligned}$$

όπου L η στροφορμή και E η ενέργεια. Ειδικά για $V(r) = -GMm/r = -\alpha/r$ η τροχιά σώματος μάζας m δίνεται από

$$r = \frac{r_0}{1+\epsilon\,\cos\theta} \quad (A61)$$

με

$$r_0 = \frac{L^2}{m\,\alpha} \quad (A62)$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2\,E\,L^2}{m\,\alpha^2}} \quad (A63)$$

Για ελλειπτική τροχιά ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης δίνεται από

$$a = r_0/(1-\epsilon^2) \quad (A64)$$

Τρίτος νόμος του Kepler

$$T^2 = \frac{4\,\pi^2}{G\,M}\,a^3 \quad (A65)$$