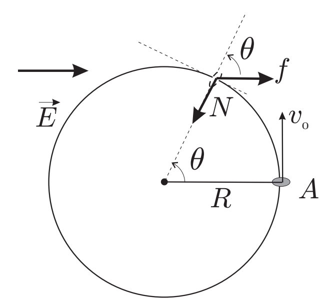
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: **ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι** (ΤΜΗΜΑ ΑΡΤΙΩΝ)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Αν. Καθηγητής Ι. ΡΙΖΟΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

ΘΕΜΑ 1 (*2.5 μονάδες, Α=0.7 Β=0.8 Γ=1.0)*

Βλέπε σημειώσεις

ΘΕΜΑ 2 (*2.5 μονάδες)*



(i) Στο επίπεδο του δακτυλιδιού, Οι δυνάμεις που ασκούνται στο δακτυλίδι είναι η αντίδραση του στεφανιού N και η δύναμη που ασκεί σε αυτό το ηλεκτρικό πεδίο $f = q\,E$ με διευθύνσεις και φορές όπως στο Σχήμα. Κάθετα στο επίπεδο του δακτυλιδιού ασκείται το βάρος το οποίο εξουδετερώνεται από την κάθετη αντίδραση του στεφανιού. Αναλύοντας τις δυνάμεις σε ακτινική και γωνιακή συνιστώσα βρίσκουμε $F_r = -N + q\,E\cos\theta$, $F_\theta = -q\,E\sin\theta$ και αντικαθιστώντας στις (A19) με $r = R \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

$$-m\,R\dot{\theta}^2 = -N + q\,E\cos\theta \Rightarrow N = q\,E\cos\theta + m\,R\,\dot{\theta}^2 \qquad (1)$$

$$m\,R\,\ddot{\theta} = -q\,E\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{q\,E}{m\,R}\sin\theta = -2v_0^2\,R^2\,\sin\theta \qquad (2)$$

(ii) Από την (2)

$$\ddot{\theta} = -2v_0^2\,R^2\,\sin\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = -2v_0^2\,R^2\,\sin\theta \int_{v_0 R}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}'^2 = -4v_0^2\,R^2 \int_0^{\theta} d\theta \sin\theta' \Rightarrow \qquad (3)$$

$$\dot{\theta}'^2\Big|_{v_0 R}^{\dot{\theta}} = 4v_0^2\,R^2\ \cos\theta'\Big|_0^{\theta} \Rightarrow \dot{\theta}^2 - v_0^2\,R^2 = 4v_0^2\,R^2\,(\cos\theta - 1) \Rightarrow \dot{\theta}^2 = v_0^2\,R^2\,(5\cos\theta - 4) \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = v_0\,R\sqrt{5\cos\theta - 4} \Rightarrow v = \frac{\dot{\theta}}{R} = v_0\sqrt{5\cos\theta - 4} \qquad (5)$$

όπου διαλέξαμε το θετικό πρόσημο στη γωνιακή ταχύτητα καθώς το σώμα κινείται σύμφωνα με τη φορά αύξησης του θ.
(iii) Η ρίζα στην (5) δείχνει ότι $\cos\theta \leq \frac{4}{5}$. Η ταχύτητα μηδενίζεται για $\cos\theta = \frac{4}{5} \Rightarrow \theta = 41.4^\circ$. Όταν το δακτυλίδι φτάσει σε αυτή τη θέση μετά η γωνιακή ταχύτητά του θα αναστραφεί $\dot{\theta} = -v_0\,R\sqrt{5\cos\theta - 4}$.
(iv) Αντικαθιστώντας την (4) στην (1) βρίσκουμε

$$N = 2m\,v_0^2\,R^3\ \cos\theta + m\,v_0^2\,R^3\,(5\cos\theta - 4) = m\,v_0^2\,R^3\,(7\cos\theta - 4) \qquad (6)$$

που είναι η δύναμη που ασκεί το στεφάνη στο δακτυλίδι. Λόγω δράσησ-αντίδρασης η δύναμη που ασκείται στο στεφάνι είναι $-N$. Επιπλέον στο στεφάνι ασκείται το βάρος του δακτυλιδιού m, g με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο και φορά προς το τραπέζι. Η συνισταμένη δύναμη είναι $F = -N\hat{r} - m\,g\hat{z}$ έχει μέτρο

$$F = \sqrt{N^2 + m^2 g^2} = m\sqrt{v_0^4\,R^6\,(7\cos\theta - 4)^2 + g^2}$$

και έχει διεύθυνση που σχηματίζει γωνία $\tan\phi = \frac{g}{\sqrt{v_0^4\,R^6(7\cos\theta - 4)^2 + g^2}}$ με το οριζόντιο επίπεδο.

ΘΕΜΑ 3 (*2.5 μονάδες)*

(i) Η συνιστώσα της ταχύτητας της βροχής κατά μήκος της κίνησης του φορτηγού είναι $v' = u\,\cos\theta$. Χρησιμοποιώντας την (A15) γράφουμε την εξίσωση κίνησης

$$\frac{d(m\,v)}{dt} = f + u\,b\,cos\theta \qquad (7)$$

(ii) Αντικαθιστώντας $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta = 0$ και ολοκληρώνοντας την (7) βρίσκουμε

$$\int_0^{mV} d(m\,v') = f \int_0^t dt \Rightarrow m\,V = f\,t \Rightarrow (m_0 + b\,t)\,V = f\,t \Rightarrow t = \frac{m_0\,V}{f - b\,V} \tag{8}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $\frac{dm}{dt} = b \Rightarrow m = m_0 + b\,t$
(iii) Επαναλαμβάνοντας τα βήματα του (ii) για $\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ βρίσκουμε

$$m\,v = \left(f + \frac{u\,b}{\sqrt{2}}\right) t \Rightarrow v = \frac{(f + \frac{u\,b}{\sqrt{2}})t}{m_0 + b\,t} \tag{9}$$

και αντικαθιστώντας το χρόνο από την (8)

$$v = \left(1 + \frac{u\,b}{f\,\sqrt{2}}\right) V \tag{10}$$

ΘΕΜΑ 4 (*2.5 μονάδες*)

(i) Παραγωγίζοντας την εξίσωση τροχιάς

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{r}}{r} \xrightarrow{\text{(A20)}} L = m\,r\,\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{L}{m\,r} \tag{11}$$

Αντικαθιστώντας στην (A21) βρίσκουμε

$$m\,\frac{L^2}{2m^2 r_0^2} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E \Rightarrow V(r) = E - \frac{L^2}{mr^2} \tag{12}$$

Επομένως

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = E - \frac{L^2}{2mr^2} \tag{13}$$

(ii)

$$F = -\frac{dV}{dr} = -\frac{2L^2}{mr^3} \tag{14}$$

(iii) Από την (11) βρίσκουμε

$$r\,\frac{dr}{dt} = \frac{L}{m} \Rightarrow \int_{r_0}^{r} r'dr' = \frac{L}{m}\int_0^t dt \Rightarrow \left.\frac{r'^2}{2}\right|_{r_0}^{r} = \frac{L}{m}\,t \Rightarrow r^2 = r_0^2 + \frac{2L}{m}\,t \Rightarrow \tag{15}$$

$$r(t) = \sqrt{r_0^2 + \frac{2L}{m}\,t} \tag{16}$$

Και αντικαθιστώντας στην (11) βρίσκουμε

$$\theta(t) = \ln\sqrt{r_0^2 + \frac{2L}{m}\,t} - \ln r_0 = \frac{1}{2}\ln\frac{r_0^2 + \frac{2L}{m}\,t}{r_0^2} = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{2L}{m\,r_0^2}\,t\right) \tag{17}$$

(iv) Από την (A16) βρίσκουμε

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + r^2\frac{\dot{r}^2}{r^2} = 2\dot{r}^2 = \frac{2L^2}{m^2\,r^2} = \frac{2L^2}{m^2}\frac{1}{r_0^2 + \frac{2L}{m}\,t} \tag{18}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (16).

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\,\cos\phi + \cos\theta\,\sin\phi \tag{A1}$$

$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\,\cos\phi - \sin\theta\,\sin\phi \tag{A2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{A3}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \tag{A4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{A5}$$

$$\sin(2\theta) = 2\,\sin\theta\,\cos\theta \tag{A6}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \tag{A7}$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta \tag{A8}$$

Ολοκληρώματα

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \tag{A9}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \mathrm{arctanh} x \tag{A10}$$

(A11)

Ανάπτυγματα σε σειρές

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + \ldots \tag{A12}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5 + \ldots \tag{A13}$$

Πλάγια βολή

$$y = x\,\tan\theta - \frac{x^2 g}{2v_0^2\,\cos^2\theta} \tag{A14}$$

Συστήματα μεταβλητής μάζας

$$\frac{d\,(\,m\,\vec{v})}{dt} = \vec{F} + \vec{v}'\,\frac{dm}{dt} \tag{A15}$$

Πολικές συντεταγμένες

Ταχύτητα

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta \tag{A16}$$

Επιτάχυνση

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta \tag{A17}$$

Δύναμη

$$\vec{F} = F_r\,\hat{e}_r + F_\theta\,\hat{e}_\theta \tag{A18}$$

2ος νόμος του Νεύτωνα

$$\begin{aligned} m\,\left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right) &= F_r \\ m\,\left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right) &= F_\theta \end{aligned} \tag{A19}$$

Κεντρικό δυναμικό

Εξισώσεις κίνησης

$$m\,r^2\,\dot{\theta} = L \tag{A20}$$

$$\frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\,m\,r^2} + V(r) = E \tag{A21}$$

όπου L η στροφορμή και E η ενέργεια. Ειδικά για $V(r) = -GMm/r = -\alpha/r$ η τροχιά σώματος μάζας m δίνεται από

$$r = \frac{r_0}{1+\epsilon\,\cos\theta} \tag{A22}$$

με

$$r_0 = \frac{L^2}{m\,\alpha} \tag{A23}$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2\,E\,L^2}{m\,\alpha^2}} \tag{A24}$$

Για ελλειπτική τροχιά ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης δίνεται από

$$a = r_0/(1-\epsilon^2) \tag{A25}$$