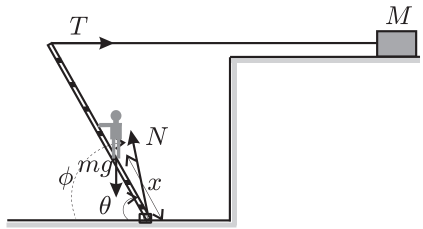
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: **ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι** (ΤΜΗΜΑ ΑΡΤΙΩΝ)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Αναπληρωτής Καθηγητής Ι. ΡΙΖΟΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΟΥΛΙΟΥ 2007

ΘΕΜΑ 1 (*2 μονάδες*)



(i)Στη σκάλα ενεργεί η τάση του σχοινιού T και το βάρος του ανθρώπου $m\,g$ με διευθύνσεις και φορές όπως στο Σχήμα καθώς και η αντίδραση του επιπέδου N η οποία θεωρούμε ότι σχηματίζει γωνία ϕ με το οριζόντιο επίπεδο. Η σκάλα ισορροπεί, συνεπώς από την ισορροπία των δυνάμεων

$$\begin{aligned} m\,g &= N\sin\phi && (1)\\ T &= N\cos\phi && (2)\end{aligned}$$

και των ροπών ως προς το σημείο πρόσδεσης της σκάλας στο έδαφος

$$m\,g\,x\,\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = T\,L\,\sin(\pi-\theta) \Rightarrow m\,g\,x\,\cos\theta = T\,L\,\sin\theta \tag{3}$$

Από την (3) βρίσκουμε

$$T = \frac{m\,g\,x}{L}\cot\theta \tag{4}$$

και διαιρώντας τις (1) και (2)

$$\tan\phi = \frac{T}{m\,g} = \frac{x}{L}\cot\theta \Rightarrow \phi = \arctan\left(\frac{x}{L}\cot\theta\right) \tag{5}$$

ενώ υψώνοντας στο τετράγωνο τις (1) και (2) και προσθέτοντας

$$N^2 = m^2\,g^2 + T^2 = m^2\,g^2\left(1+\frac{x^2}{L^2}\cot^2\theta\right) \Rightarrow N = m\,g\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{L^2}\cot^2\theta\right)} \tag{6}$$

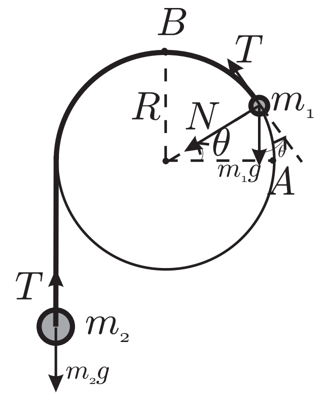
(ii) Η μάζα M και συνεπώς η σκάλα θα παραμένει ακίνητη όσο η τάση του σχοινιού είναι μικρότερη από την τριβή

$$T \le \mu\,M\,g \Rightarrow \frac{m\,g\,x}{L}\cot\theta \le \mu\,M\,g \Rightarrow x \le \frac{M}{m}\mu\,L\tan\theta \tag{7}$$

(iii) Χρησιμοποιώντας το άνω όριο της τελευταίας σχέσης για $x = L$

$$\tan\theta = \frac{m}{M\,\mu} = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = 33.7^\circ \tag{8}$$

ΘΕΜΑ 2 (*3 μονάδες*)



(i) Στη μάζα m_1 ενεργεί το βάρος $m_1\, g$ η τάση του σχοινιού T και η αντίδραση του στεφανιού N ενώ στη μάζα m_2 ενεργεί το βάρος της $m_2\, g$ και η τάση του σχοινιού T. Οι διευθύνσεις και φορές των δυνάμεων φαίνονται στο Σχήμα. (ii) Για το διάστημα που μας ενδιαφέρει (AB) η μάζα m_1 εκτελεί κυκλική κίνηση. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του Νεύτωνα σε πολικές συντεταγμένες (A53), και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $r = R$=σταθερό συνεπώς $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, οι εξισώσεις κίνησής της γράφονται

$$-m_1\, R\dot{\theta}^2 = -N - m_1\, g\, \sin\theta \tag{9}$$

$$m_1\, R\ddot{\theta} = T - m_1\, g\, \cos\theta \tag{10}$$

Η μάζα m_2 κινείται ευθύγραμμα προς τα κάτω συνεπώς η εξίσωση κίνησής της είναι

$$m_2\, a_2 = m_2\, g - T \tag{11}$$

Το σχοινί είναι μη εκτατό συνεπώς η m_2 διανύει ίδιο διάστημα με την m_1 , $s = R\theta$ συνεπώς $a_2 = \ddot{s} = R\ddot{\theta}$ και η εξίσωση κίνησης της μάζας m_2 γράφεται

$$m_2\, R\ddot{\theta} = m_2\, g - T \tag{12}$$

(iii) Επιλύοντας την (12) ως προς την τάση και αντικαθιστώντας στην (10) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} m_1\, R\ddot{\theta} = m_2\, g - m_2\, R\ddot{\theta} - m_1\, g\, \cos\theta \Rightarrow (m_1 + m_2)\, R\ddot{\theta} = m_2\, g - m_1\, g\, \cos\theta \Rightarrow \\ \ddot{\theta} = \frac{m_2\, g}{R(m_1 + m_2)} - \frac{m_1\, g}{R(m_1 + m_2)}\, \cos\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{R(1 + a)} - \frac{a\, g}{R(1 + a)}\, \cos\theta \end{aligned} \tag{13}$$

Αλλάζοντας μεταβλητή $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ η (13) γράφεται

$$\frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = \frac{g}{1 + a} - \frac{a\, g}{1 + a}\, \cos\theta \Rightarrow \int_0^{\dot{\theta}} d\dot{\theta}'^2 = \frac{2g}{R(1 + a)}\int_0^{\theta} d\theta' - \frac{2a\, g}{R(1 + a)}\int_0^{\theta} d\theta' \cos\theta' \tag{14}$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R(1 + a)}\, \theta - \frac{2a\, g}{R(1 + a)}\, \sin\theta \Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R(1 + a)}}\, \sqrt{\theta - \sin\theta} \tag{15}$$

όπου διαλέξαμε το θετικό πρόσημο γιατί η γωνία θ (που επιλέξαμε) αυξάνει με το χρόνο.
(iv) Από τις (9) και (15) βρίσκουμε

$$N = -m_1\, g\, \sin\theta + m_1\frac{2g}{1 + a}\, \theta - \frac{2m_1\, a\, g}{1 + a}\, \sin\theta \Rightarrow N = -m_1\, g\, \left(\frac{1 + 3a}{1 + a}\right)\sin\theta + m_1\frac{2g}{1 + a}\, \theta \tag{16}$$

Η οποία παρουσιάζει ακρότατα για

$$\frac{dN}{d\theta} = 0 \Rightarrow m_1\, g\, \left(\frac{1 + 3a}{1 + a}\right)\cos\theta - m_1\frac{2g}{1 + a} = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{1 + 3a} \tag{17}$$

και $\frac{d^2N}{d\theta^2} = -m_1\, g\, \left(\frac{1+3a}{1+a}\right)\sin\theta < 0$ για $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ συνεπώς η αντίδραση του στεφανιού παρουσιάζει μέγιστο για

$$\theta = \arccos\left(\frac{2}{1 + 3a}\right)$$

ΘΕΜΑ 3 (*2.5 μονάδες*)

(i) Από την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας σε πολικές συντεταγμένες (A55), έχουμε

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{L^2}{2mr^2}+V(r)=E \tag{18}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση τροχιάς $r=c\theta^2 \Rightarrow \theta=\pm\sqrt{\frac{r}{c}}$ και την (A54)

$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\dot{\theta}=\frac{d(c\theta^2)}{d\theta}\,\frac{L}{mr^2}=2c\theta\,\frac{L}{mr^2}=\pm 2c\sqrt{\frac{r}{c}}\frac{L}{mr^2}=\pm 2c^{1/2}\frac{L}{m}r^{-3/2} \tag{19}$$

και αντικαθιστώντας στην (18)

$$\frac{2L^2c}{m}r^{-3}+\frac{L^2}{2m}r^{-2}+\alpha\,r^p+\beta\,r^q=E \Rightarrow p=-3\ ,\ q=-2 \tag{20}$$

(ii) Από την τελευταία εξίσωση έχουμε επίσης

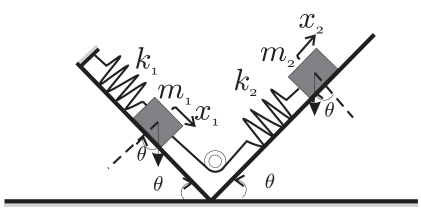
$$E=0\ ,\ \alpha=-\frac{2L^2c}{m}\ ,\beta=-\frac{L^2}{2m}\Rightarrow L=\sqrt{2mc\beta}\ ,\ \alpha=4c\beta\Rightarrow L=\sqrt{\frac{m\alpha}{2}} \tag{21}$$

(iii)

$$\dot{\theta}=\frac{L^2}{2mr^2}\Rightarrow\dot{\theta}=\frac{L^2}{2mc^2\theta^4}\Rightarrow\int_0^\theta d\theta'\,\theta'^4=\frac{L^2}{2mc^2}\int_0^t dt'\Rightarrow\frac{\theta^5}{5}=\frac{L^2}{2mc^2}t\Rightarrow\theta=\left(\frac{5L^2}{2mc^2}\right)^{\frac{1}{5}}t^{\frac{1}{5}} \tag{22}$$

ΘΕΜΑ 4 (*2.5 μονάδες*)

(i) Εφαρμόζοντας το νόμο του Νεύτωνα για κάθε μία από τις δύο μάζες



$$\begin{aligned}(m_1)\ &:\ m_1\ddot{x}_1=-k_1x_1-k_2x_1+k_2x_2+m_1g\sin\theta & (23)\\ (m_2)\ &:\ m_2\ddot{x}_2=k_2x_1-k_2x_2-m_2g\sin\theta & (24)\end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας τα δεδομένα του προβλήματος

$$\ddot{x}_1=-\frac{k}{m}x_1+\frac{k}{3m}x_2+g\sin\theta \tag{25}$$

$$\ddot{x}_2=\frac{k}{m}x_1-\frac{k}{m}x_2-g\sin\theta \tag{26}$$

(ii) Να βρεθούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος. Το σύστημα των εξισώσεων κίνησης μπορεί να μετατραπεί σε ομογενές με αλλαγή μεταβλητών $X_1=x_1+\delta_1$, $X_2=x_2+\delta_2$ όπου δ_1,δ_2 σταθερές. Αντικαθιστώντας

$$\ddot{X}_1=-\frac{k}{m}X_1+\frac{k}{3m}X_2+\left[-\frac{k}{m}\delta_1+\frac{k}{3m}\delta_2+g\sin\theta\right] \tag{27}$$

$$\ddot{X}_2=\frac{k}{m}X_1-\frac{k}{m}X_2+\left[\frac{k}{m}\delta_1-\frac{k}{m}\delta_2-g\sin\theta\right] \tag{28}$$

Οι όροι στις αγκύλες μηδενίζονται για $\delta_1=\frac{gm}{k}\sin\theta,\delta_2=0$ και το σύστημα γράφεται ως

$$\ddot{X}_1=-\frac{k}{m}X_1+\frac{k}{3m}X_2 \tag{29}$$

$$\ddot{X}_2=\frac{k}{m}X_1-\frac{k}{m}X_2 \tag{30}$$

όπου από διαστατική ανάλυση μπορούμε να θέσουμε $k = m = 1$ και το σύστημα γράφεται με τη χρήση πινάκων

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \tag{31}$$

Αντικαθιστώντας τη δοκιμαστική λύση

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = e^{\rho\, t}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \tag{32}$$

το σύστημα γράφεται

$$\begin{pmatrix} -1-\rho^2 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1-\rho^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{33}$$

Οι ιδιοσυχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης υπολογίζονται από τις ιδιοτιμές του πίνακα ($\omega = \sqrt{-\rho^2}$)

$$\det\begin{pmatrix} -1-\rho^2 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1-\rho^2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left(1-\rho^2\right)^2 - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \left(\rho^2+1+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(\rho^2+1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 0$$
$$\rho_1^2 = -1+\sqrt{\frac{1}{3}}\ ,\ \rho_2^2 = -1-\sqrt{\frac{1}{3}} \tag{34}$$

και αποκαθιστώντας τις διαστάσεις

$$\omega_1 = \sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{3}}}\sqrt{\frac{k}{m}} \approx 0.650\sqrt{\frac{k}{m}}\ ,\ \omega_2 = \sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{3}}}\sqrt{\frac{k}{m}} \approx 1.26\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{35}$$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\sin(\theta+\phi)=\sin\theta\,\cos\phi+\cos\theta\,\sin\phi \qquad \text{(A36)}$$

$$\cos(\theta+\phi)=\cos\theta\,\cos\phi-\sin\theta\,\sin\phi \qquad \text{(A37)}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{(A38)}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2} \qquad \text{(A39)}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{(A40)}$$

$$\sin(2\theta) = 2\,\sin\theta\,\cos\theta \qquad \text{(A41)}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta-\sin^2\theta \qquad \text{(A42)}$$

Ολοκληρώματα

$$\int dx\frac{1}{x^2+1}=\arctan x \qquad \text{(A43)}$$

$$\int dx\frac{1}{x^2-1}=\mathrm{arctanh}x \qquad \text{(A44)}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+b\,x+c}}= = \ln\left(b+2\,x+2\sqrt{x^2+b\,x+c}\right) \qquad \text{(A45)}$$

Ανάπτυγματα σε σειρές

$$\cos x=1-\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{24}\,x^4+\dots \qquad \text{(A46)}$$

$$\sin x=x-\frac{1}{6}\,x^3+\frac{1}{120}\,x^5+\dots \qquad \text{(A47)}$$

Πλάγια βολή

$$y=x\,\tan\theta-\frac{x^2g}{2v_0^2\,\cos^2\theta} \qquad \text{(A48)}$$

Μικρές Ταλαντώσεις
Στην περιοχή του ελάχιστου x_0 του δυναμικού $V(x)$

$$\omega=\sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}} \qquad \text{(A49)}$$

Πολικές συντεταγμένες
Ταχύτητα

$$\vec{v}=\dot{r}\,\hat{e}_r+r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta \qquad \text{(A50)}$$

Επιτάχυνση

$$\vec{a}=\left(\ddot{r}-r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r+\left(r\,\ddot{\theta}+2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta \qquad \text{(A51)}$$

Δύναμη

$$\vec{F}=F_r\,\hat{e}_r+F_\theta\,\hat{e}_\theta \qquad \text{(A52)}$$

2ος νόμος του Νεύτωνα

$$\begin{aligned} m\left(\ddot{r}-r\,\dot{\theta}^2\right)&=F_r\\ m\left(r\,\ddot{\theta}+2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)&=F_\theta \end{aligned} \qquad \text{(A53)}$$

Κεντρικό δυναμικό
Εξισώσεις κίνησης

$$m\,r^2\,\dot{\theta}= L \qquad \text{(A54)}$$

$$\frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2+\frac{L^2}{2\,m\,r^2}+V(r)= E \qquad \text{(A55)}$$

όπου L η στροφορμή και E η ενέργεια. Ειδικά για $V(r)=-GMm/r=-\alpha/r$ η τροχιά σώματος μάζας m δίνεται από

$$r=\frac{r_0}{1+\epsilon\,\cos\theta} \qquad \text{(A56)}$$

με

$$r_0=\frac{L^2}{m\,\alpha} \qquad \text{(A57)}$$

$$\epsilon=\sqrt{1+\frac{2\,E\,L^2}{m\,\alpha^2}} \qquad \text{(A58)}$$

Για ελλειπτική τροχιά ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης δίνεται από

$$a=r_0/(1-\epsilon^2) \qquad \text{(A59)}$$

Τρίτος νόμος του Kepler

$$T^2=\frac{4\,\pi^2}{G\,M}\,a^3 \qquad \text{(A60)}$$