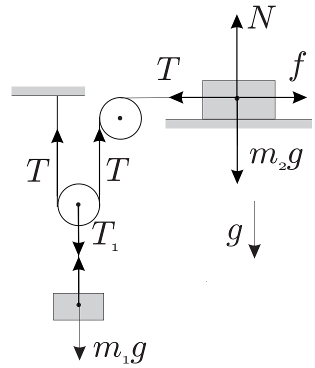
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: **ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι** (ΤΜΗΜΑ ΑΡΤΙΩΝ)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Αν. Καθηγητής Ι. ΡΙΖΟΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011

ΘΕΜΑ 1 (*2.5 μονάδες, Α=2.0 Β=0.5*)



Α.(i) Οι δυνάμεις που ενεργούν στο κάθε σώμα παρουσιάζονται στο Σχήμα. Από την ισορροπία της ελεύθερης τροχαλίας έχουμε

$$T_1 = 2T \tag{1}$$

ενώ συνθήκες ισορροπίας των δύο σωμάτων είναι

$$(m_2) \; : \; T = f \; , \quad N = m_2\, g \tag{2}$$
$$(m_1) \; : \; T_1 = m_1\, g \tag{3}$$

Η τριβή σχετίζεται με το μέτρο της κάθετης αντίδρασης ως $f \leq \mu\, N$. Επομένως η συνθήκη ισορροπίας είναι

$$\frac{m_1\, g}{2} \leq \mu\, m_2\, g \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} \leq 2\,\mu \tag{4}$$

(ii)Θεωρούμε a_1, a_2 τα μέτρα των επιταχύνσεων ων σωμάτων m_1, m_2 αντίστοιχα.

$$m_2\, a_2 = T - \mu\, m_2\, g \tag{5}$$
$$m_1\, a_1 = m_1\, g - T_1 \tag{6}$$

Η τροχαλία θεωρείται ότι έχει μηδενική μάζα $m_T = 0$ συνεπώς και ακόμη όταν κινείται $m_T\, a_T = 0 = T_1 - 2T \Rightarrow T_1 = 2T$. Επίσης, λόγω του σχοινιού όταν το σώμα m_2 διανύει απόσταση s_2 το σώμα m_1 διανύει απόσταση $s_1 = s_2/2$ συνεπώς $a_2 = 2a_1$. Αντικαθιστώντας

$$2m_2\, a_1 - T = -\mu\, m_2\, g \tag{7}$$
$$m_1\, a_1 + 2T = m_1\, g \tag{8}$$

Επομένως

$$a_1 = \frac{g}{m_1 + 4m_2}\,(m_1 - 2\mu\, m_2) \tag{9}$$
$$a_2 = \frac{2g}{m_1 + 4m_2}\,(m_1 - 2\mu\, m_2) \tag{10}$$

και

$$T = \frac{m_1\, m_2\, g(2+\mu)}{m_1 + 4m_2} \tag{11}$$

Β. Βλέπε σημειώσεις.

ΘΕΜΑ 2 (*2.5 μονάδες)*

(i) Στο σωματίδιο ασκείται η δύναμη του βάρους $-m\,g\,\hat{z}$ καθώς και η δύναμη Lorentz η οποία ισούται με

$$\vec{F}_L = q\,\vec{v}\times\vec{B} = q\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = q\,B_0\,(\dot{y}, -\dot{x}, 0) \tag{12}$$

Οι εξισώσεις κίνησης δίνονται από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα

$$m\,\frac{d\dot{x}}{dt} = q\,B_0\,\dot{y} \tag{13}$$

$$m\,\frac{d\dot{y}}{dt} = -q\,B_0\,\dot{x} \tag{14}$$

$$m\,\frac{d\dot{z}}{dt} = -m\,g \tag{15}$$

(ii) Παραγωγίζοντας την (13) εξίσωση και αντικαθιστώντας την (14)

$$\frac{d^2\dot{x}}{dt^2} = -\left(\frac{q\,B_0}{m}\right)^2\dot{x} \Rightarrow v_x = \dot{x} = A\,\sin\left(\frac{q\,B_0}{m}\,t\right) + B\,\cos\left(\frac{q\,B_0}{m}\,t\right) \tag{16}$$

Αντικαθιστώντας ξανά στην (13) βρίσκουμε

$$v_y = \dot{y} = A\,\cos\left(\frac{q\,B_0}{m}\,t\right) - B\,\sin\left(\frac{q\,B_0}{m}\,t\right) \tag{17}$$

Επιπλέον επιλύοντας την (15)

$$v_z = \dot{z} = -m\,g\,t + C \tag{18}$$

Από τις αρχικές συνθήκες

$$\vec{v}(0) = (0, v_0\,\cos\theta, v_0\,\sin\theta) \tag{19}$$

συνεπώς $B = 0, A = v_0\,\cos\theta, C = v_0\sin\theta$ και

$$\vec{v} = v_0\,\left[\cos\theta\,\sin\left(\frac{q\,B_0}{m}\,t\right), \cos\theta\,\cos\left(\frac{q\,B_0}{m}\,t\right), \sin\theta - m\,g\,t\right] \tag{20}$$

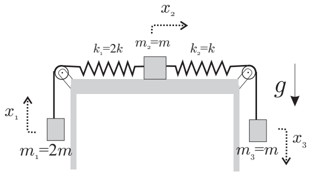
(iii) Όταν το σώμα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος

$$v_z = 0 \Rightarrow v_0\,\sin\theta - m\,g\,t = 0 \Rightarrow t_m = \frac{v_0\sin\theta}{mg}$$

και συνεπώς η ταχύτητά του θα δίνεται από

$$\vec{v}_m = v_0\,\cos\theta\,\left[\sin\left(\frac{q\,B_0}{m}\,\frac{v_0\,\sin\theta}{mg}\right), \cos\left(\frac{q\,B_0}{m}\,\frac{v_0\,\sin\theta}{mg}\right), 0\right] \tag{21}$$

ΘΕΜΑ 3 (*2.5 μονάδες*)



(i) Έστω x_1, x_2, x_3 οι μετατοπίσεις των μαζών m_1, m_2, m_3 από μια θέση στην οποία τα ελατήρια βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος , όπως στο Σχήμα. Χρησιμοποιώντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε για την κάθε μάζα έχουμε

$$
\begin{aligned}
(m_1) &: \quad m_1\, \ddot{x}_1 = -m_1\, g - k_1\, x_1 + k_1\, x_2 && (22)\\
(m_2) &: \quad m_2\, \ddot{x}_2 = +k_1\, x_1 - k_1\, x_2 - k_2\, x_2 + k_2\, x_3 && (23)\\
(m_3) &: \quad m_3\, \ddot{x}_3 = +m_3\, g + k_2\, x_2 - k_2\, x_3 && (24)
\end{aligned}
$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα του προβλήματος, παίρνουμε τις εξισώσεις κίνησης

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= -g - \omega_0^2\, (x_1 - x_2) && (25)\\
\ddot{x}_2 &= \omega_0^2\, (2x_1 - 3\, x_2 + x_3) && (26)\\
\ddot{x}_3 &= +g + \omega_0^2\, (x_2 - x_3) && (27)
\end{aligned}
$$

ή σε μορφή πίνακα

$$
\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -g \\ 0 \\ +g \end{pmatrix} \tag{28}
$$

(ii) Η γενική λύση του παραπάνω συστήματος θα δίνεται από το άθροισμα της γενικής λύσης της ομογενούς με μια ειδική λύση του πλήρους συστήματος. Το τμήμα της λύσης που σχετίζεται με τους κανονικών τρόπων ταλάντωσης αφορά την ομογενές σύστημα

$$
\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \tag{29}
$$

όπου από διαστατική ανάλυση μπορούμε να θέσουμε $\omega_0 = 1$. Αντικαθιστώντας τη δοκιμαστική λύση

$$
\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} e^{\rho t}
$$

καταλήγουμε στο σύστημα

$$
\begin{pmatrix} -1-\rho^2 & 1 & 0 \\ 2 & -3-\rho^2 & 1 \\ 0 & 1 & -1-\rho^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{30}
$$

το οποίο έχει μη τετριμμένη λύση του όταν

$$
\det \begin{vmatrix} -1-\rho^2 & 1 & 0 \\ 2 & -3-\rho^2 & 1 \\ 0 & 1 & -1-\rho^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\rho^2 \left(\rho^2 + 1\right) \left(\rho^2 + 4\right) = 0 \Rightarrow \rho^2 = 0,\, -1,\, -4 \tag{31}
$$

Οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης δίνονται από $\omega = \sqrt{-\rho^2}$

$$
\omega = 0, \omega_0, 2\,\omega_0 \Rightarrow \omega = 0, \sqrt{\frac{k}{m}}, 2\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{32}
$$

μετά την αποκατάσταση των διαστάσεων. (iii) Η ειδική τιμή $\omega = 0$ αντιστοιχεί σε μη ταλαντωτική κίνηση και στην προκείμενη περίπτωση σε κίνηση των τριών μαζών με σταθερή κοινή επιτάχυνση χωρίς ταλάντωση.

ΘΕΜΑ 4 (*2.5 μονάδες , A=1.7 B=0.8)*

(i) Από την εξίσωση τροχιάς

$$\dot{r} = \frac{A}{2\sqrt{\theta}}\dot{\theta} = \frac{A}{2\sqrt{\theta}}\frac{L}{m\,r^2} = \frac{A^2\,L}{2\,m}\frac{1}{r^3} \tag{33}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη διατήρηση της στροφορμής. Από την τελευταία εξίσωση

$$\int_{r_0}^{r} r'^3\,dr = \frac{A^2\,L}{2\,m}\int_0^t dt' \Rightarrow \frac{r^4}{4} - \frac{r_0^4}{4} = \frac{A^2\,L}{2\,m}\,t \Rightarrow r = \left[r_0^4 + \frac{2\,A^2\,L}{m}\,t\right]^{\frac{1}{4}} \tag{34}$$

Από την εξίσωση τροχιάς

$$\theta = \frac{r^2}{A^2} \Rightarrow \theta = \frac{1}{A^2}\sqrt{r_0^4 + \frac{2A^2\,L}{m}\,t} \tag{35}$$

(ii) Αντικαθιστώντας την (33) στην (A60) παίρνουμε

$$V(r) = E - \frac{L^2}{2\,m\,r^2} - \frac{1}{2}m\,\dot{r}^2 = E - \frac{L^2}{2\,m\,r^2} - \frac{A^4\,L^2}{8\,m}\frac{1}{r^6} \tag{36}$$

Επομένως

$$F_r(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{L^2}{m\,r^3} - \frac{3\,A^4\,L^2}{4\,m}\frac{1}{r^7} \tag{37}$$

B. Για τον κομήτη του Halley ο λόγος του μεγάλου προς τον μικρό ημιάξονα της ελλειπτικής τροχιάς είναι $k = 3.93$. Ποιος ο λόγος της μέγιστης προς την ελάχιστη απόσταση από τον Ήλιο ;
Σύμφωνα με την (A64)

$$k = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \Rightarrow \epsilon = \frac{\sqrt{k^2-1}}{k} \approx 0.967 \tag{38}$$

Η εξίσωση τροχιάς δίνεται από την (A61) και έχει μέγιστο και ελάχιστο για $\theta = \pi$ και $\theta = 0$ αντίστοιχα. Επομένως

$$\frac{r_{max}}{r_{min}} = \frac{\frac{r_0}{1-\epsilon}}{\frac{r_0}{1+\epsilon}} = \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \approx 59.8 \tag{39}$$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\,\cos\phi + \cos\theta\,\sin\phi \tag{A40}$$

$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\,\cos\phi - \sin\theta\,\sin\phi \tag{A41}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{A42}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \tag{A43}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{A44}$$

$$\sin(2\theta) = 2\,\sin\theta\,\cos\theta \tag{A45}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \tag{A46}$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta \tag{A47}$$

Ολοκληρώματα

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \tag{A48}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \mathrm{arctanh} x \tag{A49}$$

$$\tag{A50}$$

Ανάπτυγματα σε σειρές

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + \ldots \tag{A51}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5 + \ldots \tag{A52}$$

Πλάγια βολή

$$y = x\,\tan\theta - \frac{x^2 g}{2v_0^2\,\cos^2\theta} \tag{A53}$$

Συστήματα μεταβλητής μάζας

$$\frac{d\,(m\,\vec{v})}{dt} = \vec{F} + \vec{v}'\,\frac{dm}{dt} \tag{A54}$$

Πολικές συντεταγμένες

Ταχύτητα

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta \tag{A55}$$

Επιτάχυνση

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta \tag{A56}$$

Δύναμη

$$\vec{F} = F_r\,\hat{e}_r + F_\theta\,\hat{e}_\theta \tag{A57}$$

2ος νόμος του Νεύτωνα

$$\begin{aligned} m\left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right) &= F_r \\ m\left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right) &= F_\theta \end{aligned} \tag{A58}$$

Κεντρικό δυναμικό

Εξισώσεις κίνησης

$$m\,r^2\,\dot{\theta} = L \tag{A59}$$

$$\frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\,m\,r^2} + V(r) = E \tag{A60}$$

όπου L η στροφορμή και E η ενέργεια. Ειδικά για $V(r) = -GMm/r = -\alpha/r$ η τροχιά σώματος μάζας m δίνεται από

$$r = \frac{r_0}{1+\epsilon\,\cos\theta} \tag{A61}$$

με

$$r_0 = \frac{L^2}{m\,\alpha} \tag{A62}$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2\,E\,L^2}{m\,\alpha^2}} \tag{A63}$$

Για ελλειπτική τροχιά οι ημιάξονες της έλλειψης δίνονται από

$$a = r_0/(1-\epsilon^2)\ ,\ b = r_0/\sqrt{(1-\epsilon^2)} \tag{A64}$$

Δύναμη Lorentz

$$\vec{F} = q\,\vec{E} + q\,\vec{v}\times\vec{B} \tag{A65}$$