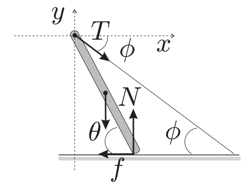
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: **ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ I** (ΤΜΗΜΑ ΑΡΤΙΩΝ)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Αναπληρωτής Καθηγητής Ι. ΡΙΖΟΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΟΥΛΙΟΥ 2006 (ΠΤΥΧΙΑΚΗ)

ΘΕΜΑ 1 (*2 μονάδες*)



Στο σώμα ασκείται η τάση του σχοινιού T το βάρος του $B = mg$ η αντίδραση του δαπέδου N καθώς και η τριφή $f = \mu N$ με διευθύνσεις και φορές όπως στο σχήμα. Αναλύοντας σε άξονες x, y όπως στο σχήμα η ισορροπία των δυνάμεων γράφεται

$$\begin{aligned} T\,\cos\phi &= \mu N & (1)\\ N &= T\,\sin\phi + m\,g & (2)\end{aligned}$$

Η ισορροπία των ροπών ως προς άξονα το σημείο επαφής με το έδαφος γράφεται

$$T\,L\,\sin(\pi-\theta+\phi) = m\,g\,\frac{L}{2}\,\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) \Rightarrow T\,\sin(\theta-\phi) = \frac{m\,g}{2}\,\cos\theta \qquad (3)$$

Από την (3) έχουμε

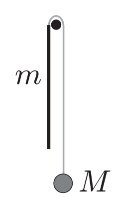
$$T = \frac{mg\cos\theta}{2\sin(\theta-\phi)} \qquad (4)$$

ενώ απαλείφοντας την αντίδραση από τις (1),(2) βρίσκουμε

$$\mu = \frac{T\,\cos\phi}{mg + T\,\sin\phi} = \frac{\cos\theta\,\cos\phi}{2\sin(\theta-\phi) + \sin\phi\,\cos\theta} = \frac{1}{2\tan\theta - \tan\phi} \qquad (5)$$

Από τον ορισμό του συντελεστή τριβής, έχουμε $\mu \geq 0$ το οποίο ισχύει καθώς από τη διάταξη του σχήματος $\theta > \phi$.

ΘΕΜΑ 2 (*2 μονάδες*)



(i) Θεωρούμε ότι τμήμα μήκους x της αλυσίδας έχει περάσει στα δεξιά του καρφιού. Η γραμμική πυκνότητα της αλυσίδας είναι $\mu = m/L$. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα γράφεται

$$(m+M)\,\ddot{x} = \mu\,g\,x + M\,g - \mu\,g\,(L-x) \Rightarrow \ddot{x} = g\left(2\frac{x}{L}+1\right) \qquad (6)$$

Χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση και θέτουμε $g = L = 1$ και κατά συνέπεια

$$\begin{aligned} &3\ddot{x} = 2\,x+1 \Rightarrow 3\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = 2\,x+1 \Rightarrow \frac{3}{2}\int_0^{\dot{x}} d\left(\dot{x}'^2\right) = \int_0^x dx'(2x'+1) \Rightarrow \\ &3\dot{x}^2 = 2\,x^2 + 2x \Rightarrow v(x) = \dot{x} = \sqrt{\frac{2\,(x^2+x)}{3}} \qquad (7)\end{aligned}$$

όπου επιλέξαμε τη θετική ρίζα (φορά κίνησης προς τα κάτω). Η ταχύτητα για $x = L = 1$ είναι

$$v(L) = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{g\,L}{3}} \qquad (8)$$

μετά την αποκατάσταση των διαστάσεων.

(ii) Ολοκληρώνοντας την (8)

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x^2+x)}} = \int_0^\tau dt \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{3}{2}}\ln(3+2\sqrt{2}) = \sqrt{\frac{3\,g}{2\,L}}\ln(3+2\sqrt{2}) \tag{9}$$

ΘΕΜΑ 3 (*2 μονάδες*)

Σώμα μάζας m μπορεί κινείται χωρίς τριβές στο εσωτερικό μιας σφαίρας ακτίνας R όπως στο σχήμα. Αρχικά το σώμα τοποθετείται στη θέση $\theta = \frac{\pi}{2}$ και αφήνεται να κινηθεί. Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκεί η σφαίρα στο σώμα συναρτήσει της γωνίας θ. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g.
Εφαρμόζουμε το νόμο του Νεύτωνα σε πολικές συντεταγμένες με $r = R \Rightarrow \dot{R} = \ddot{R} = 0$.

$$-mR\dot{\theta}^2 = m\,g\,\cos\theta - N \tag{10}$$
$$mR\ddot{\theta} = -m\,g\,\sin\theta \tag{11}$$

Η δεύτερη εξίσωση (12) γράφεται

$$\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -\frac{g}{R}\,\sin\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^{\dot{\theta}} d\dot{\theta}'^2 = -g\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta'\sin\theta' \Rightarrow \dot{\theta}^2 = 2\,\frac{g}{R}\,\cos\theta\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \Rightarrow \dot{\theta}^2 = 2\,\frac{g}{R}\,\cos\theta \tag{12}$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην (11) και επιλύοντας ως προς την αντίδραση

$$N = 3\,g\,\cos\theta$$

ΘΕΜΑ 4 (*2 μονάδες*)

Το δυναμικό μπορεί να προσδιοριστεί από τη σχέση διατήρησης της ενέργειας

$$\frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\,m\,r^2} + V(r) = E \tag{13}$$

όπου

$$\dot{r} = -e^{-\theta}\dot{\theta} = -r\frac{L}{mr^2} = -\frac{L}{mr} \tag{14}$$

Αντικαθιστώντας στην (14) παίρνουμε

$$V(r) = E_1 - \frac{L_1^2}{2mr^2} - \frac{L_1^2}{2mr^2} = E_1 - \frac{L_1^2}{mr^2} \tag{15}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την τροχιά $r = 1/\theta$ παίρνουμε ανάλογα

$$\dot{r} = -\frac{L_2}{2m^2} = -\frac{L_2}{mr^2}r^2 = -\frac{L_2}{m} \tag{16}$$

και ντικαθιστώντας στην (14) παίρνουμε

$$V(r) = E_2 - \frac{L_2^2}{2m} - \frac{L_2^2}{2mr^2} \tag{17}$$

Για να συμπίπτουν τα δύο δυναμικά πρέπει

$$E_1 = E_2 - \frac{L_2^2}{2m} \tag{18}$$
$$L_1 = L_2 \tag{19}$$

δηλαδή τα δύο σώματα έχουν την ίδια στροφορμή αλλά διαφορετική ενέργεια.

ΘΕΜΑ 5 (*2 μονάδες*)

Θεωρώντας x_1, x_2, x_3 τις μετατοπίσεις των τριών μαζών και εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα για κάθε μια από αυτές έχουμε

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x}_1 &= -2k\,x_1 + k\,x_2 + k\,x_3 && (20)\\ m\,\ddot{x}_2 &= -2k\,x_2 + k\,x_1 + k\,x_3 && (21)\\ m\,\ddot{x}_3 &= -2k\,x_3 + k\,x_1 + k\,x_2 && (22)\end{aligned}$$

οι οποίες γράφονται σε μορφή πίνακα ως

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{23}$$

όπου $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Σε έναν κανονικό τρόπο ταλάντωσης όλες οι μάζες ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα. Εισάγοντας τη δοκιμαστική λύση και θέτοντας $\omega_0 = 1$

$$x_1 = A_1\,e^{\rho t}\ ,\ x_2 = A_2\,e^{\rho t}\ ,\ x_3 = A_3\,e^{\rho t} \tag{24}$$

καταλήγουμε στο πρόβλημα ιδιοτιμών

$$\begin{pmatrix} -2-\rho^2 & 1 & 1 \\ 1 & -2-\rho^2 & 1 \\ 1 & 1 & -2-\rho^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

το οποίο έχει λύσεις για

$$\det\begin{pmatrix} -2+\rho^2 & 1 & 1 \\ 1 & -2+\rho^2 & 1 \\ 1 & 1 & -2+\rho^2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \tag{26}$$

$$\rho^6 - 6\rho^4 + 9\rho^2 = 0 \Rightarrow \rho^2(\rho^2+3)^2 = 0 \Rightarrow \rho^2 = 0\ ,\ \rho^2 = 3(\text{διπλή ρίζα}) \tag{27}$$

και οι συχνότητες είναι $\omega = \sqrt{-\rho^2}$ μετά την αποκατάσταση των μονάδων είναι

$$\omega_1 = 0\ ,\ \omega_2 = \omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \tag{28}$$

(ii) Η ειδική τιμή $\omega = 0$ αντιστοιχεί σε συνολική κίνηση του συστήματος χωρίς μεταβολή του μήκους των ελατηρίων. Η διπλή συχνότητα $\sqrt{\frac{3k}{m}}$ οφείλεται στην συμμετρία που παρουσιάζει το σύστημα ($m_1 = m_2 = m_3$, $k_1 = k_2 = k_3$).