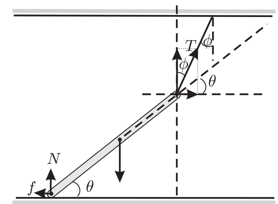
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: **ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι** (ΤΜΗΜΑ ΑΡΤΙΩΝ)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Αν. Καθηγητής Ι. ΡΙΖΟΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΡΙΟΥ 2005

ΘΕΜΑ 1 (*2.4 μονάδες* $A = 1.5, B = 1.$)



(i) Οι δυνάμεις που ενεργούν στό σοκάρι είναι το βάρος της $M\,g$ (στο κέντρο μάζας) η τάση του σχοινιού T, η αντίδραση του δαπέδου (N) και η τριβή f όπως στο σχήμα. Για να ισορροπεί το σύστημα θα πρέπει το άθροισμα των δυνάμεων και το άθροισμα των ροπών που ενεργούν στο δοκάρι να ισούται με μηδέν. Αναλύοντας τις δυνάμεις σε άξονες (x) κατά μήκος του δαπέδου και (y) κάθετα , έχουμε

$$(x) \quad : \quad T\,\sin\phi = f \tag{1}$$

$$(y) \quad : \quad N + T\,\cos\phi = M\,g \tag{2}$$

όπου η τριβή ισούται με

$$T = \mu\,N \tag{3}$$

Για τις ροπές θεωρώντας ότι το δοκάρι έχει μήκος ℓ και ως άξονα περιστροφής το σημείο επαφής με τον τοίχο έχουμε

$$T\,\ell\sin(\frac{\pi}{2} - \theta - \phi) \;=\; M\,g\frac{\ell}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \Rightarrow \tag{4}$$

$$T\,\ell\sin(\theta + \phi) \;=\; M\,g\frac{\ell}{2}\sin\theta \tag{5}$$

(ii) Από την (5) έχουμε

$$T = \frac{\cos\theta}{2\cos(\theta + \phi)}\,m\,g \tag{6}$$

(iii) Από (1),(2), (3) βρίσκουμε τα N και

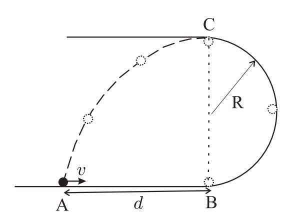
$$\mu = \frac{1}{2\,\tan\theta - \cot\phi} \tag{7}$$

Για τον συντελεστή τριβής εξ'ορισμού έχουμε $\mu \geq 0$ που στην περίπτωσή μας συνεπάγεται

$$2\tan\theta - \cot\phi > 0 \tag{8}$$

B. Βλέπε σημειώσεις.

ΘΕΜΑ 2 (*2.5 μονάδες*)



(i) Από την διατήρηση της ενέργειας, αν η ταχύτητα της σφαίρας στο σημείο C είναι v_c

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\,m\,v_c^2 + 2\,m\,g\,R \Rightarrow v_c^2 = v^2 - 4\,g\,R \tag{9}$$

Σε πολικές συντεταγμένες ($A17$) η ταχύτητα v_c έχει μόνο γωνιακό μέρος

$$v_c = R\,\dot\theta \Rightarrow \dot\theta = \frac{v_c}{R} \tag{10}$$

Ο νόμος του Νεύτωνα σε πολικές συντεταγμένες $(A19)$ συνεπάγεται (εδώ έχουμε $\dot{r} = \ddot{r} = 0$)

$$-m\,R\dot{\theta}^2 = -N - m\,g \Rightarrow N = m\,R\dot{\theta}^2 - m\,g = m\left(\frac{v_c^2}{R} - g\right) \geq 0 \Rightarrow v_c^2 \geq g\,R \tag{11}$$

Η τελευταία σχέση είναι απαραίτητη για να υπάρχει επαφή στο σημείο C. Στο σημείο C η σφαίρα εκτελεί πλάγια βολή με αρχική γωνία $\theta = 0$ για την οποία σύμφωνα με την $(A16)$ έχουμε

$$-2R = -\frac{(3R)^2\,g}{2\,v_c^2} \Rightarrow v_c^2 = \frac{9}{4}\,g\,R \tag{12}$$

όπου θέσαμε $x = d = 3R$ για να πέσει η σφαίρα στο ίδιο σημείο. Η απαιτούμενη ταχύτητα ικανοποιεί τον περιορισμό για την επαφή με την στεφάνη και αντικαθιστώντας στην (9) δίνει

$$v^2 = \frac{9}{4}\,g\,R + 4\,g\,R \Rightarrow v^2 = \frac{25}{4}\,g\,R \Rightarrow v = \frac{5}{2}\,\sqrt{g\,R} \tag{13}$$

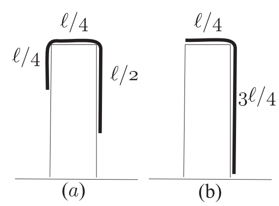
(ii) Έστω ότι στην (12) $x = d$

$$-2R = -\frac{d^2\,g}{2\,v_c^2} \tag{14}$$

Αντικαθιστώντας την ελάχιστη απαιτούμενη ταχύτητα $v_c^2 = g\,R$ παίρνουμε την ελάχιστη δυνατή απόσταση

$$4R^2 = d^2 \Rightarrow d = 2R$$

ΘΕΜΑ 3 (*2.5 μονάδες*)



(i)Η γραμμική πυκνότητα της αλυσίδας είναι $\rho = m/\ell$. Έστω ότι στην δεξιά πλευρά του τραπεζιού το μήκος της αλυσίδας είναι x, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα γράφεται

$$\begin{aligned}
\rho\,\ell\,\frac{d^2x}{dt^2} &= \rho\,x\,g - \rho\left(\ell - x - \frac{\ell}{4}\right)g \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2\,g\,x}{\ell} - \frac{3\,g}{4} \Rightarrow \\
\frac{1}{2}\,\frac{d\dot{x}^2}{dx} &= \frac{2\,g\,x}{\ell} - \frac{3\,g}{4} \Rightarrow \int_0^v d\dot{x}^2 = \int_{\ell/2}^x dx'\left(\frac{4\,g\,x'}{\ell} - \frac{3\,g}{2}\right) \Rightarrow \\
v^2 &= \left[\frac{2\,g\,x'^2}{\ell} - \frac{3\,g\,x'}{2}\right]_{\frac{\ell}{2}}^x \Rightarrow v^2 = \frac{2\,g}{\ell}\left(x^2 - \frac{3\,\ell\,x}{4} + \frac{\ell^2}{8}\right) \Rightarrow \\
v &= \sqrt{\frac{2\,g}{\ell}}\sqrt{x^2 - \frac{3\,\ell\,x}{4} + \frac{\ell^2}{8}}
\end{aligned} \tag{15}$$

Αντικαθιστώντας $x = \frac{3\ell}{4}$ βρίσκουμε την ταχύτητα στη θέση (b)

$$v\left(\frac{3\ell}{4}\right) = \frac{\sqrt{g\,\ell}}{2} \tag{16}$$

(ii) Για να υπολογίσουμε το χρόνο , ολοκληρώνουμε την (15)

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2\,g}{\ell}}\sqrt{x^2 - \frac{3\,\ell\,x}{4} + \frac{\ell^2}{8}} \Rightarrow \int_{\ell/2}^{3\ell/4} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \frac{3\,\ell\,x}{4} + \frac{\ell^2}{8}}} = \sqrt{\frac{2\,g}{\ell}}\int_0^t dt' \tag{17}$$

Χρησιμοποιώντας την $(A11)$ βρίσκουμε

$$\left[\ln\left(2\,x - \frac{3\ell}{4} + 2\,\sqrt{x^2 - \frac{3\,\ell\,x}{4} + \frac{\ell^2}{8}}\right)\right]_{\ell/2}^{3\ell/4} = \sqrt{\frac{2\,g}{\ell}}\,t \Rightarrow t = \sqrt{\frac{\ell}{2\,g}}\,\ln(3 + 2\sqrt{2}) \tag{18}$$

ΣΗΜ: Θα μπορούσαμε εξάρχής να θέσουμε $g = \ell = 1$ απλοποιώντας τις πράξεις και να επαναφέρουμε τις μονάδες στα τελικά αποτελέσματα.

ΘΕΜΑ 4 (*2.5 μονάδες: A=1.5, B=1*)

A. (i) Αρχικά το σώμα βρίσκεται στο $\theta(0) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r(0) = \frac{k\pi}{2}$. Παραγωγίζοντας την εξίσωση τροχιάς $\dot{r} = k\,\dot{\theta}$ και αντικαθιστώντας στην $(A20)$

$$\begin{aligned} m\,r^2\,\frac{\dot{r}}{k} &= L \Rightarrow \int_{\frac{k\pi}{2}}^{r} dr'\,r'^2 = \frac{k\,L}{m}\int dt_0^t \Rightarrow r^3 - \left(\frac{k\,\pi}{2}\right)^3 = \frac{3k\,L}{m}t \Rightarrow r^3 = \frac{k\,L}{m}\,t + \left(\frac{k\,\pi}{2}\right)^3 \\ \Rightarrow r(t) &= \left[\frac{k\,L}{m}\,t + \left(\frac{k\,\pi}{2}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \tag{19}$$

και $\theta(t) = r(t)/k$.

(ii) Η κεντρική δύναμη δίνεται από την $(A19)$

$$F_r = m\left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right) \tag{20}$$

Από την $(A20)$ $\dot{\theta} = \frac{L}{m\,r^2}$ και κατά συνέπεια $\dot{r} = \frac{k\,L}{m\,r^2} \Rightarrow \ddot{r} = -\frac{2\,k\,L}{m\,r^3}\dot{r} = -\frac{2\,k^2\,L^2}{m^2\,r^5}$. Αντικαθιστώντας στην δύναμη

$$F_r = m\left(-\frac{2\,k^2\,L^2}{m^2\,r^5} - r\,\frac{L^2}{m^2\,r^4}\right) = -\frac{L^2}{m}\left(\frac{2k^2}{r^5} + \frac{1}{r^3}\right) \tag{21}$$

B. Από την εξίσωση τροχιάς $(A22)$ η ελάχιστη r_P και μέγιστη απόσταση r_A είναι αντίστοιχα

$$r_P = \frac{r_0}{1+\varepsilon}\ ,\ r_A = \frac{r_0}{1-\varepsilon} \tag{22}$$

Σύμφωνα με το πρόβλημα

$$\frac{r_P}{r_A} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{7} - 2 \approx 0.65 \tag{23}$$

Η αρνητική ρίζα απορρίπτεται.