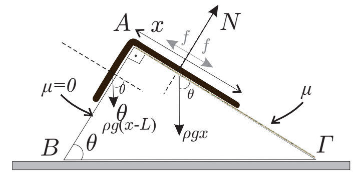
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: **ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι** (ΤΜΗΜΑ ΑΡΤΙΩΝ)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Αναπληρωτής Καθηγητής Ι. ΡΙΖΟΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΑΥΓΟΥΣΤΟΥ 2007

ΘΕΜΑ 1 (*2.5 μονάδες*)



(i) Έστω f η δύναμη της τριβής στην πλευρά ΑΓ. Κατά την ισορροπία το μέτρο της είναι μικρότερο ή ίσο της κάθετης δύναμης $N = \rho\, g\, x\, \sin\theta$

$$|f| \leq \mu\, \rho\, g\, x\, \sin\theta \tag{1}$$

όπου ρ η γραμμική πυκνότητα της αλυσίδας. Κατά την ισορροπία η απόλυτη τιμή της διαφοράς της παράλληλη προς το κεκλιμένο επίπεδο συνιστώσας του βάρους από την αριστερή πλευρά μείον την παράλληλη προς το επίπεδο συνιστώσα του βάρους από τη δεξιά πλευρά πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση της απόλυτης τιμής της τριβής

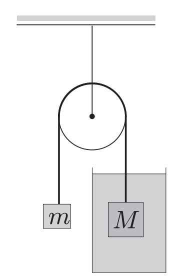
$$\begin{aligned}
|\rho\, g\, x\, \cos\theta - \rho\, g\,(L-x)\, \sin\theta| \leq |f| &\Rightarrow \\
-|f| \leq \rho\, g\, x\, \cos\theta - \rho\, g\,(L-x)\, \sin\theta \leq |f| &\Rightarrow \\
-\mu\, x\, \sin\theta \leq x\, \cos\theta - (L-x)\, \sin\theta \leq \mu\, x\, \sin\theta &\Rightarrow \\
-x\,[(1+\mu)\, \sin\theta + \cos\theta] \leq -L\, \sin\theta \leq -x\,[(1-\mu)\, \sin\theta + \cos\theta] &\Rightarrow \\
\frac{L\, \sin\theta}{(1+\mu)\, \sin\theta + \cos\theta} \leq x \leq \frac{L\, \sin\theta}{(1-\mu)\, \sin\theta + \cos\theta} &\Rightarrow \\
\frac{L\, \tan\theta}{1+(1+\mu)\tan\theta} \leq x \leq \frac{L\, \tan\theta}{1+(1-\mu)\tan\theta +} &
\end{aligned} \tag{2}$$

(ii) Στην περίπτωση $\mu = 0$ η (2) δίνει

$$\frac{L\, \tan\theta}{1+\tan\theta} \leq x \leq \frac{L\, \tan\theta}{1+\, \tan\theta} \Rightarrow x = \frac{L\, \tan\theta}{1+\, \tan\theta}$$

που σημαίνει ότι η αλυσίδα ισορροπεί μόνο για μια συγκεκριμένη τιμή του x η οποία εξαρτάται από τη γωνία θ.

ΘΕΜΑ 2 (*2.5 μονάδες*)



(i) Έστω T η τάση του σχοινιού και y η κάθετη απόσταση της μάζας M από την κορυφή της τροχαλίας. Το σχοινί είναι μη εκτατό, επομένως τα δύο σώματα έχουν επιταχύνσεις $-a$ και a αντίστοιχα όπου $a = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} =$ θεωρούμε τη θετική φορά προς τα κάτω. Οι εξισώσεις κίνησης των δύο μαζών είναι

$$(m) \quad : \quad -m\,\frac{dv}{dt} = m\, g - T \tag{3}$$

$$(M) \quad : \quad M\,\frac{dv}{dt} = M\, g - T - b\, v \tag{4}$$

Απαλείφοντας την τάση καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(M+m)\,\frac{dv}{dt} = (M-m)\, g - b\, v \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{g}{2} - \frac{b}{4m}\, v \tag{5}$$

όπου αντικαταστήσαμε τα δεδομένα του προβλήματος. Επιλύοντας τη διαφορική

$$\int_0^v \frac{dv'}{\frac{g}{2} - \frac{b}{4m}\, v'} = \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{4}{b}\, \ln\left(\frac{g}{2} - \frac{b}{4m}\, v'\right)\Bigg|_0^v = t \Rightarrow \ln\frac{\frac{g}{2} - \frac{b}{4}\, v}{\frac{g}{2}} = -\frac{b}{4m}\, t \Rightarrow$$

$$\frac{g}{2} - \frac{b}{4m}\, v = \frac{g}{2}\, e^{-\frac{b}{4m}\, t} \Rightarrow v = \frac{2\, g\, m}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{4m}\, t}\right) \tag{6}$$

(ii) Η τάση του σχοινιού υπολογίζεται από τις (3) και (6)

$$T = m\,g + m\frac{dv}{dt} = m\,g + \frac{m\,g}{2}\,e^{-\frac{b}{4m}\,t} \tag{7}$$

Παρατηρούμε ότι $T(0) = \frac{3mg}{2}$. Αυτό γιατί για $t = 0$ το σύστημα των δύο μαζών έχει συνολική μάζα $M + m = 4m$ και πάνω του ενεργεί δύναμη ίση με τη διαφορά των βαρών $Mg - mg = 3mg - mg = 2mg$ και συνεπώς επιταχύνεται με $a = \frac{2mg}{4m} = \frac{g}{2}$. Η τάση του σχοινιού για να μεταφέρει προς τα πάνω με αυτή την επιτάχυνση το σώμα m θα είναι $m\,g + m\frac{g}{2} = \frac{3mg}{2}$.
Μετά την παρέλευση μεγάλου χρόνου $t \to \infty$ βρίσκουμε $T(\infty) = m\,g$. Εδώ ξέρουμε πως και τα δύο σώματα κινούνται με σταθερή ταχύτητα $v = \frac{2\,g\,m}{b}$ και συνεπώς η συνολική δύναμη πάνω τους θα μηδενίζεται. Εφαρμόζοντας για το σώμα m παίρνουμε πράγματι $T = m\,g$.

ΘΕΜΑ 3 (*3 μονάδες*)

(i) Το σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά όταν βρίσκεται σε ακρότατο του ενεργού δυναμικού

$$V'_{eff}(r) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(\frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r)\right) = 0 \Rightarrow -\frac{\ell^2}{mr^3} + \frac{dV(r)}{dr} = 0 \Rightarrow$$
$$-\frac{\ell^2}{mr^3} - F(r) = 0 \Rightarrow -\frac{\ell^2}{mr^3} + \frac{k}{r^2}\left(1 - \frac{r}{b}\right) = 0 \Rightarrow k\,m\,r^2 - k\,b\,m\,r + b\,\ell^2 = 0 \tag{8}$$

Χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση μπορούμε να απλοποιήσουμε τις υπόλοιπες πράξεις. Έχουμε

$$[m] = M\ ,\ [k] = \frac{ML^3}{T^2}\ ,[\ell] = \frac{ML^2}{T} \tag{9}$$

συνεπώς μπορούμε να θέσουμε $m = k = \ell = 1$ και να αποκαταστήσουμε τις διαστάσεις όποτε απαιτηθεί. (Δεν μπορούμε να θέσουμε επιπλέον $b = 1$ καθώς δεν είναι ανεξάρτητο από τα προηγούμενα $[b] = L = \frac{[\ell]^2}{[k][m]}$.)
Η (8) γράφεται

$$r^2 - b\,r + b = 0 \Rightarrow r = r_{1,2} = \frac{1}{2}\left(b \pm \sqrt{b^2 - 4b}\right) = \frac{b}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{b}}\right) \tag{10}$$

Οι παραπάνω λύσεις είναι πραγματικές για $b > 4$.Αποκαθιστώντας τις διαστάσεις υπάρχουν δύο αποδεκτές ακτίνες

$$R = R_{1,2} = \frac{b}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\ell^2}{b\,m\,k}}\right) \tag{11}$$

υπό την προϋπόθεση

$$b \geq \frac{4\ell^2}{m\,k} \tag{12}$$

(ii) Από τα δεδομένα του προβλήματος

$$\frac{b}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{b}}\right) = \frac{b}{3} \Rightarrow 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{b}} = \frac{2}{3} \tag{13}$$

Προφανώς το θετικό πρόσημο απορρίπτεται (δεξί μέλος μεγαλύτερο της μονάδος) και

$$1 - \sqrt{1 - \frac{4}{b}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} = \sqrt{1 - \frac{4}{b}} \Rightarrow \frac{8}{9} = \frac{4}{b} \Rightarrow b = \frac{9}{2} > 4 \tag{14}$$

και βέβαια $r = \frac{b}{3} = \frac{3}{2}$. (ii) Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο του ενεργού δυναμικού

$$V''_{eff}(r) = \frac{d}{dr}\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r\,b}\right) = \frac{3}{r^4} - \frac{2}{r^3} + \frac{1}{r^2\,b} = \frac{1}{r^4\,b}\left(3b - 2br + r^2\right) \tag{15}$$

όπου αντικαθιστώντας $r = \frac{b}{3} = \frac{3}{2}$ βρίσκουμε

$$V''_{eff}(b/3) = \frac{8}{81} > 0 \tag{16}$$

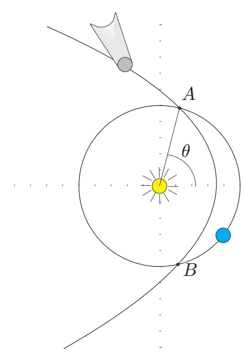
και συνεπώς η ισορροπία είναι ευσταθής.
(iii) Η συχνότητα των ταλαντώσεων γύρω από το σημείο ευσταθούς ισορροπίας δίνεται από (έχουμε θέσει $m = 1$)

$$\omega = \sqrt{V''_{eff}(b/3)} = \sqrt{\frac{8}{81}} = \frac{2\sqrt{2}}{9} \tag{17}$$

και αποκαθιστώντας τις διαστάσεις

$$\omega = \frac{2\sqrt{2}}{9}\,\frac{k^2 m}{\ell^3} \tag{18}$$

ΘΕΜΑ 4 (*2.5 μονάδες*)



(i) Στην παραβολική τροχιά έχουμε εκκεντρότητα $\epsilon = 1$ και συνεπώς το περιήλιο ($\cos\theta = +1$) δίνεται από

$$\frac{r_0}{2} = p \Rightarrow \frac{L_K^2}{2m_K\,\alpha} = p \Rightarrow L_K = \sqrt{2pm_K M\alpha} \Rightarrow L_K = m_K\,\sqrt{2pMG} \tag{19}$$

(ii) Από τη διατήρηση της ενέργειας

$$\frac{1}{2}m_K\,v^2 + V(r) = E \tag{20}$$

Η ενέργεια όμως σε παραβολική τροχιά μηδενίζεται συνεπώς

$$12m_K\,v^2 = \frac{\alpha}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\alpha}{m_K\,r}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{r}} \tag{21}$$

(ii) Ο ζητούμενος λόγος είναι

$$\frac{v_A}{v_p} = \frac{p}{R} \tag{22}$$

(iii) Η ταχύτητα του κομήτη γράφεται ως

$$\vec{v} = v_r\,\hat{e}_r + v_\theta\,\hat{e}_\theta = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta \tag{23}$$

(iv) Η γωνία ϕ που σχηματίζει με το διάνυσμα θέσης θα δίνεται από

$$\tan\phi = \frac{v_\theta}{v_r} = \frac{r\dot{\theta}}{\dot{r}} = \frac{L}{m_K\,r\dot{r}} = \frac{\sqrt{2p\,M\,G}}{r\dot{r}} \tag{24}$$

Όμως από την (A20) και για $E=0$

$$\frac{1}{2}m_K\,\dot{r}^2=-\frac{L^2}{2m_K\,r^2}+\frac{G\,M\,m_K}{r}\Rightarrow\dot{r}=\sqrt{\frac{2G\,M}{r}-\frac{L^2}{m_K^2\,r^2}}\Rightarrow\dot{r}=\sqrt{\frac{2G\,M}{r}-\frac{2p\,M\,G}{r^2}}\tag{25}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (19). Από τις (24), (25) βρίσκουμε

$$\tan\phi=\sqrt{\frac{p}{r-p}}\Rightarrow\phi=\arctan\sqrt{\frac{p}{r-p}}\tag{26}$$

(iv) Η τροχιά του κομήτη δίνεται από

$$r=\frac{r_0}{1+\cos\theta}\tag{27}$$

και τέμνει την τροχιά της Γης όταν

$$r=R\Rightarrow\frac{r_0}{1+\cos\theta}=R\Rightarrow\frac{2p}{1+\cos\theta}=R\frac{R}{2(1+\cos\theta)}=R\Rightarrow 1+\cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\pm\frac{\pi}{3}\tag{28}$$