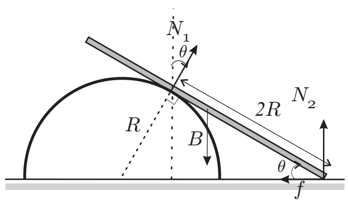
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: **ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι** (ΤΜΗΜΑ ΑΡΤΙΩΝ)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Αναπληρωτής Καθηγητής Ι. ΡΙΖΟΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΡΙΟΥ 2007

ΘΕΜΑ 1 (*2.5 μονάδες*)



(i) Οι δυνάμεις που ενεργούν στο δοκάρι είναι το βάρος του B, η αντίδραση του σιλό N_1, η αντίδραση του δαπέδου N_2 και η τριβή f με διευθύνσεις και φορές όπως στο Σχήμα. Για να ισορροπεί το δοκάρι πρέπει το άθροισμα των δυνάμεων που ενεργούν επάνω του να ισούται να μηδενίζεται και επίσης να μηδενίζεται το άθροισμα των ροπών ως προς ένα σημείο το οποίο επιλέγουμε να είναι το σημείο επαφή με το έδαφος. Επομένως από την ισορροπία των δυνάμεων

$$N_1 \sin\theta = f \tag{1}$$

$$N_1 \cos\theta + N_2 = B \tag{2}$$

και των ροπών

$$B\,\frac{3R}{2}\,\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) - N_1\,2R = 0 \Rightarrow 2N_1 = B\,\frac{3R}{2}\,\cos\theta \tag{3}$$

όπου $\sin\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2+4R^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ και $\cos\theta = \frac{2R}{\sqrt{R^2+4R^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Η (3) δίνει

$$2\,N_1 = B\,\frac{3}{2}\,\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow N_1 = \frac{3}{2\sqrt{5}}\,B \sim 0.67\,B \tag{4}$$

Αντικαθιστώντας στην (2)

$$N_2 = B - \frac{3}{2\sqrt{5}}\,\frac{2}{\sqrt{5}}\,B = \frac{2}{5}\,B = 0.40\,B \tag{5}$$

και στην (1)

$$f = \frac{3}{2\sqrt{5}}\,\frac{1}{\sqrt{5}}\,B = \frac{3}{10}\,B = 0.30\,B \tag{6}$$

(ii) Για την δύναμη της τριβής θα πρέπει

$$f \le \mu\,N_2 \Rightarrow \frac{3}{10}\,B \le \mu\,\frac{2}{5}\,B \Rightarrow \mu \ge \frac{3}{4} = 0.75 \tag{7}$$

ΘΕΜΑ 2 (*2.5 μονάδες*)

Η εξίσωση κίνησης του σώματος είναι

$$M\,\frac{d^2x}{dt^2} = M\,g\,\sin\theta - b\,M\,v^2 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = g\,\sin\theta - b\,v^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g\,\sin\theta - b\,v^2 \tag{8}$$

Χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση και λαμβάνοντας υπόψιν ότι οι διαστάσεις $[g] = \frac{L}{T^2}$, $[b] = \frac{1}{L}$ μπορούμε να θέσουμε $b = g = 1$ και να αποκαταστήσουμε τις διαστάσεις αργότερα. Επομένως

$$dv = \left(\sin\theta - v^2\right) dt \Rightarrow \int_0^v \frac{dv'}{\sin\theta - v'^2} = \int_0^t dt' \Rightarrow t = \frac{1}{\sin\theta}\int_0^v \frac{dv'}{1-(\frac{v'}{\sqrt{\sin\theta}})^2}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\int_0^v \frac{v'}{\sqrt{\sin\theta}}\frac{1}{1-(\frac{v'}{\sqrt{\sin\theta}})^2} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\ \operatorname{arctanh}\frac{v'}{\sqrt{\sin\theta}}\bigg|_0^v$$

$$\frac{v}{\sqrt{\sin\theta}} = \tanh\left(\sqrt{\sin\theta}\,t\right) \Rightarrow v = \sqrt{\sin\theta}\,\tanh\left(\sqrt{\sin\theta}\,t\right) \tag{9}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (A20). Αποκαθιστώντας τις διαστάσεις

$$v = \sqrt{\frac{g}{b}\,\sin\theta}\,\tanh\left(\sqrt{b\;g\sin\theta}\,t\right) \tag{10}$$

Από την (9)

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\sin\theta}\,\tan\left(\sqrt{\sin\theta}\,t\right) \Rightarrow \int_0^x dx' = \int_0^t dt\sqrt{\sin\theta}\tan\left(\sqrt{\sin\theta}\,t\right)$$
$$\Rightarrow x = \ln\left[\cosh\left(\sqrt{\sin\theta}\,t\right)\right]_0^t \Rightarrow x = \ln\left[\cosh\left(\sqrt{\sin\theta}\,t\right)\right] \tag{11}$$

Επιλύοντας ως προς το χρόνο

$$e^x = \cosh\left(\sqrt{\sin\theta}\,t\right) \Rightarrow \sqrt{\sin\theta}\,t = \text{arccosh}\,(e^x) \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\text{arccosh}\,(e^x) \tag{12}$$

Για $x = d$ και αποκαθιστώντας τις διαστάσεις έχουμε

$$t = \frac{1}{\sqrt{b\,g\,\sin\theta}}\text{arccosh}\left(e^{bd}\right) \tag{13}$$

ΘΕΜΑ 3 (*2.5 μονάδες*)

Η τροχιά ενός σώματος, μάζας m, στροφορμής L και ενέργειας E, το οποίο κινείται σε κεντρικό δυναμικό δίνεται από την εξίσωση

$$r = \frac{a}{\tan\theta}\ , 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

όπου a γνωστή θετική σταθερά (με διαστάσεις μήκους). Να ευρεθεί το ενεργό δυναμικό και η δύναμη που ενεργεί στο σώμα.

$$r = \frac{a}{\tan\theta} \Rightarrow \dot{r} = -\frac{a}{\tan^2\theta}(1+\tan\theta^2)\dot{\theta} = -a\left(1+\frac{1}{\tan^2\theta}\right)\frac{L}{m\,r^2} \Rightarrow \dot{r} = -a\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)\frac{L}{m\,r^2} \tag{14}$$

Χρησιμοποιώντας την (A41)

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = E - \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 = E - \frac{1}{2}\,m\,a^2\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)^2\frac{L^2}{m^2\,r^4} \Rightarrow$$
$$V_{eff}(r) = E - \frac{L^2}{2ma^2} - \frac{L^2}{mr^2} - \frac{L^2a^2}{2mr^4} \tag{15}$$

Το δυναμικό δίνεται από

$$V(r) = V_{eff} - \frac{L^2}{2mr^2} = E - \frac{L^2}{2ma^2} - \frac{3}{2}\frac{L^2}{mr^2} - \frac{L^2a^2}{2mr^4} \tag{16}$$

και επομένως η δύναμη δίνεται από

$$F(r) = -\frac{dV(r)}{dr} = -\frac{3L^2}{mr^3} - \frac{4L^2a^2}{2mr^5} \tag{17}$$

ΘΕΜΑ 4 (*2.5 μονάδες*)

Το κεντρικό δυναμικό $V(r)$ που αντιστοιχεί στη δύναμη δίνεται από

$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} drF(r') = -\frac{L^2}{2m}\frac{1}{r^2} + \frac{L^2}{2m}\frac{1}{r_0^2} \tag{18}$$

όπου η σταθερά μηδενίζεται επιλέγοντας το σημείο αναφοράς r_0 στο άπειρο. Συνεπώς

$$V(r) = -\frac{L^2}{2mr^2} \tag{19}$$

και αντικαθιστώντας στην (A33)

$$\frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 = E \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}} \Rightarrow dr = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}}dt \Rightarrow \int_{r_0}^{r} dr' = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}}\int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow r = r_0 \pm \sqrt{\frac{2E}{m}}(t - t_0) \tag{20}$$

Η έκφραση απλοποιείται αν επιλέξουμε το t_0 έτσι ώστε $r_0 \pm \sqrt{\frac{2E}{m}}\,t_0 = 0$ και συνεπώς

$$r = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}}\,t \tag{21}$$

Αντικαθιστώντας στην (A36)

$$\dot{\theta} = \frac{L}{m\,r^2} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2Et^2} \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' = \frac{L}{2E}\int_{t_0}^{t}\frac{dt'}{t'^2} \Rightarrow \theta = \theta_0 - \frac{L}{2E}\left[\frac{1}{t'}\right]_{t_0}^{t} \Rightarrow \theta = \theta_0 - \frac{L}{2E}\left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t_0}\right] \tag{22}$$

όπου και πάλι μπορούμε να επιλέξουμε το θ_0 έτσι ώστε $\theta_0 + \frac{L}{2Et_0} = 0$ και

$$\theta = -\frac{L}{2E}\,\frac{1}{t} \tag{23}$$

Από τις (21), (23) έχουμε

$$r = \mp\frac{L}{\sqrt{2mE}}\frac{1}{\theta} \tag{24}$$