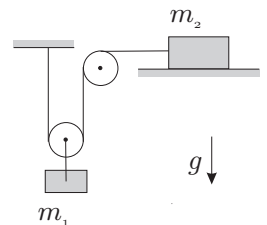


ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011

ΘΕΜΑ 1 (2.5 μονάδες, $A=2.0$ $B=0.5$)

A. Δύο σώματα μαζών m_1 και m_2 συνδέονται με αβαρές μη εκτατό σχοινί με τη βοήθεια αβαρών τροχαλιών όπως στο Σχήμα. Το σώμα m_1 μπορεί να κινείται κατακόρυφα χωρίς τριβές, ενώ ο οι συντελεστές στατικής τριβής και τριβής ολισθήσεως μεταξύ του σώματος m_2 και του οριζώντιου επιπέδου μπορούν να θεωρηθούν ίσοι με μ . Το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας είναι g .



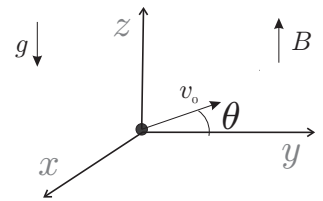
(i) Σχεδιάστε τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος και βρείτε τη συνθήκη ισορροπίας του συστήματος.

(ii) Αν δεν ισχύει η συνθήκη ισορροπίας βρείτε την επιτάχυνση κάθε σώματος καθώς και την τάση του σχοινιού.

B. Δείξτε ότι σε κεντρικό δυναμικό η στροφορμή διατηρείται.

ΘΕΜΑ 2 (2.5 μονάδες)

Σώμα μάζας m και φορτίου q εισέρχεται σε περιοχή με σταθερό μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ με αρχική ταχύτητα μέτρου v_0 , η οποία κείται στο επίπεδο $y-z$ και σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα των y όπως στο Σχήμα. Το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας είναι g .



(i) Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου.

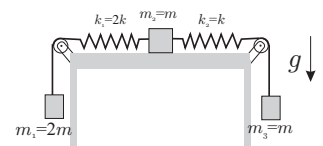
(ii) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου.

(iii) Σε πόσο χρόνο μετά την είσοδο στο πεδίο το σώμα φτάνει στο μέγιστο ύψος και πόση είναι η ταχύτητά του εκείνη τη στιγμή ;

(iv) Στην ειδική περίπτωση $\theta = \frac{\pi}{2}$ βρείτε την τροχιά του σώματος και δικαιολογήστε την.

ΘΕΜΑ 3 (2.5 μονάδες)

Τρεις μάζες $m_1 = 2m$, $m_2 = m_3 = m$ συνδέονται με δύο ιδανικά ελατήρια, σταθερών $k_1 = 2k$, $k_2 = k$, με τη βοήθεια δύο αβαρών τροχαλιών όπως στο Σχήμα. Οι τριβές αγνοούνται και το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας είναι g .



(i) Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος και να εξεταστεί το ομογενές σύστημα.

(ii) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του (i) να βρεθούν οι γωνιακές συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος.

(iii) Εξηγήστε τυχόν ειδικές τιμές των γωνιακών συχνοτήτων.

ΘΕΜΑ 4 (2.5 μονάδες, $A=1.7$ $B=0.8$)

A. Σώμα μάζας m , στροφορμής L κινείται σε κεντρικό δυναμικό σε τροχιά που δίνεται

$$r = A \sqrt{\theta}$$

όπου A θετική σταθερά.

(i) Να υπολογιστεί η θέση του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου συναρτήσει του χρόνου αν είναι γνωστό ότι $r(0) = r_0$.

(ii) Να βρεθεί η δύναμη που ενεργεί το σώμα.

B. Για τον κομήτη του Halley ο λόγος του μεγάλου προς τον μικρό ημιάξονα της ελλειπτικής τροχιάς είναι $k = 3.93$. Ποιος ο λόγος της μέγιστης προς την ελάχιστη απόσταση από τον Ήλιο ;

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \quad (\text{A1})$$

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \quad (\text{A2})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{A3})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad (\text{A4})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{A5})$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta \quad (\text{A6})$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad (\text{A7})$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta \quad (\text{A8})$$

Ολοκληρώματα

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \quad (\text{A9})$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctanh} x \quad (\text{A10})$$

$$(\text{A11})$$

Ανάπτυγματα σε σειρές

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \dots \quad (\text{A12})$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \dots \quad (\text{A13})$$

Πλάγια βολή

$$y = x \tan \theta - \frac{x^2 g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (\text{A14})$$

Συστήματα μεταβλητής μάζας

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} + \vec{v} \frac{dm}{dt} \quad (\text{A15})$$

Πολικές συντεταγμένες

Ταχύτητα

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad (\text{A16})$$

Επιτάχυνση

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \hat{e}_\theta \quad (\text{A17})$$

Δύναμη

$$\vec{F} = F_r \hat{e}_r + F_\theta \hat{e}_\theta \quad (\text{A18})$$

2ος νόμος του Νεύτωνα

$$m (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) = F_r \quad (\text{A19})$$

$$m (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) = F_\theta$$

Κεντρικό δυναμικό

Εξισώσεις κίνησης

$$m r^2 \dot{\theta} = L \quad (\text{A20})$$

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m r^2} + V(r) = E \quad (\text{A21})$$

όπου L η στροφορμή και E η ενέργεια.

Ειδικά για $V(r) = -GMm/r = -\alpha/r$ η τροχιά σώματος μάζας m δίνεται από

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (\text{A22})$$

με

$$r_0 = \frac{L^2}{m \alpha} \quad (\text{A23})$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2 E L^2}{m \alpha^2}} \quad (\text{A24})$$

Για ελλειπτική τροχιά οι ημιμάξονες της έλλειψης δίνονται από

$$a = r_0/(1 - \epsilon^2), \quad b = r_0/\sqrt{(1 - \epsilon^2)} \quad (\text{A25})$$

Δύναμη Lorentz

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{A26})$$