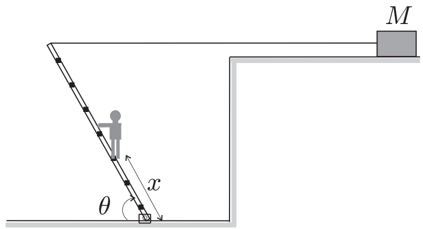
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: **ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι** (ΤΜΗΜΑ ΑΡΤΙΩΝ)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Αναπληρωτής Καθηγητής Ι. ΡΙΖΟΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΟΥΛΙΟΥ 2007

ΘΕΜΑ 1 (*2 μονάδες*)

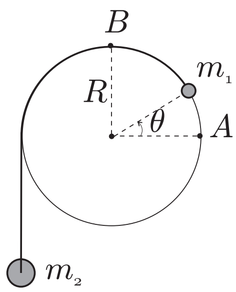
Άνθρωπος μάζας m ανεβαίνει αργά σε σκάλα, μήκους L και αμελητέου βάρους, της οποίας το κάτω άκρο είναι στερεωμένο στο δάπεδο και το άνω άκρο στηρίζεται με οριζόντιο μη εκτατό σκοινί συνδεδεμένο με μάζα M η οποία βρίσκεται σε υπερυψωμένο δάπεδο όπως στο Σχήμα. Η γωνία που σχηματίζει η σκάλα με το οριζόντιο επίπεδο είναι θ και ο συντελεστής τριμής μεταξύ της μάζας M και του υπερυψωμένου δαπέδου είναι μ.



(i) Να σχεδιαστούν όλες οι δυνάμεις που ενεργούν στη σκάλα και να υπολογιστούν τα μέτρα και οι διευθύνσεις τους.
(ii) Ποια είναι η μέγιστη απόσταση x από το δάπεδο στην οποία μπορεί να ανέβει ο άνθρωπος χωρίς να πέσει η σκάλα ;
(iii) Αν $M = 3m$ και $\mu = 0.5$ ποια είναι η ελάχιστη γωνία θ για την οποία ο άνθρωπος μπορεί να ανέβει μέχρι το άνω άκρο της σκάλας ;

ΘΕΜΑ 2 (*3 μονάδες*)

Σώμα μάζας m_1, το οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές σε στεφάνι στερεωμένο σε κατακόρυφο τοίχο, συνδέεται με ελαφρύ μη εκτατό σχοινί με σώμα μάζας m_2 όπως στο Σχήμα. Αρχικά το σώμα m_1 αφήνεται στη θέση Α και μας ενδιαφέρει η κίνησή του μέχρι το σημείο Β. Είναι γνωστός ο λόγος των μαζών $\alpha = \frac{m_2}{m_1} > 1$ η ακτίνα του στεφανιού R και η επιτάχυνση της βαρύτητας g.



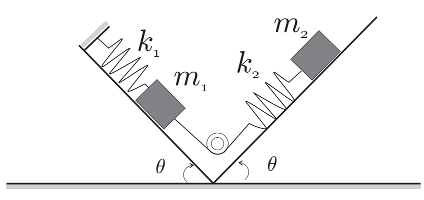
(i) Να σχεδιαστούν όλες οι δυνάμεις που ενεργούν στα σώματα με μάζες m_1 και m_2.
(ii) Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης των δύο μαζών.
(iii) Να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα του σώματος μάζας m_1 ως συνάρτηση της γωνίας θ.
(iv) Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκεί το στεφάνι στο σώμα μάζας m_1 ως συνάρτηση της γωνίας θ (θεωρείστε γνωστή την m_1 αυτό το ερώτημα) και να βρεθεί σε ποια γωνία γίνεται μέγιστη.

ΘΕΜΑ 3 (*2.5 μονάδες*)

Σώμα μάζας m κινείται σε κεντρικό δυναμικό της μορφής $V(r) = \alpha\, r^p + \beta\, r^q$.
(i) Να υπολογιστούν τα p, q έτσι ώστε το σώμα να ακολουθεί σπειροειδή τροχιά της μορφής $r = c\theta^2$ όπου c μια σταθερά.
(ii) Να υπολογιστεί η ενέργεια και η στροφορμή και η μάζα του του σώματος συναρτήσει των α, β, c.
(iii) Να υπολογιστεί η $\theta(t)$ αν δίνεται ότι $\theta(0) = 0$.

ΘΕΜΑ 4 (*2.5 μονάδες*)

Το σύστημα του σχήματος αποτελείται από δύο ιδανικά ελατήρια σταθερών $k_1 = 2\,k$ και $k_2 = k$ συνδεδεμένα με δύο μάζες $m_1 = 3m$ και $m_2 = m$. Τριβές δεν υπάρχουν και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g.



(i) Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης των δύο μαζών
(ii) Να βρεθούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\,\cos\phi + \cos\theta\,\sin\phi \tag{A1}$$

$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\,\cos\phi - \sin\theta\,\sin\phi \tag{A2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{A3}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \tag{A4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{A5}$$

$$\sin(2\theta) = 2\,\sin\theta\,\cos\theta \tag{A6}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \tag{A7}$$

Ολοκληρώματα

$$\int dx \frac{1}{x^2+1} = \arctan x \tag{A8}$$

$$\int dx \frac{1}{x^2-1} = \mathrm{arctanh} x \tag{A9}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b\,x+c}} = \ln\left(b+2\,x+2\sqrt{x^2+b\,x+c}\right) \tag{A10}$$

Ανάπτυγματα σε σειρές

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + \ldots \tag{A11}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5 + \ldots \tag{A12}$$

Πλάγια βολή

$$y = x\,\tan\theta - \frac{x^2 g}{2 v_0^2\,\cos^2\theta} \tag{A13}$$

Μικρές Ταλαντώσεις

Στην περιοχή του ελάχιστου x_0 του δυναμικού $V(x)$

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}} \tag{A14}$$

Πολικές συντεταγμένες

Ταχύτητα

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta \tag{A15}$$

Επιτάχυνση

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta \tag{A16}$$

Δύναμη

$$\vec{F} = F_r\,\hat{e}_r + F_\theta\,\hat{e}_\theta \tag{A17}$$

2ος νόμος του Νεύτωνα

$$\begin{aligned} m\left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right) &= F_r \\ m\left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right) &= F_\theta \end{aligned} \tag{A18}$$

Κεντρικό δυναμικό

Εξισώσεις κίνησης

$$m\,r^2\,\dot{\theta} = L \tag{A19}$$

$$\frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\,m\,r^2} + V(r) = E \tag{A20}$$

όπου L η στροφορμή και E η ενέργεια. Ειδικά για $V(r) = -GMm/r = -\alpha/r$ η τροχιά σώματος μάζας m δίνεται από

$$r = \frac{r_0}{1+\epsilon\,\cos\theta} \tag{A21}$$

με

$$r_0 = \frac{L^2}{m\,\alpha} \tag{A22}$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2\,E\,L^2}{m\,\alpha^2}} \tag{A23}$$

Για ελλειπτική τροχιά ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης δίνεται από

$$a = r_0/(1-\epsilon^2) \tag{A24}$$

Τρίτος νόμος του Kepler

$$T^2 = \frac{4\,\pi^2}{G\,M}\,a^3 \tag{A25}$$