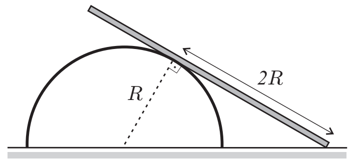
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ - ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: **ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι** (ΤΜΗΜΑ ΑΡΤΙΩΝ)
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Αναπληρωτής Καθηγητής Ι. ΡΙΖΟΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΡΙΟΥ 2007

ΘΕΜΑ 1 (*2.5 μονάδες*)

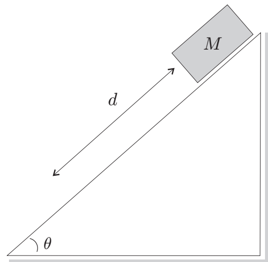
Ομογενές δοκάρι βάρους B και μήκους $3R$ ισορροπεί στηριζόμενο σε ημικυκλικό σιλό ακτίνας R και στο οριζόντιο δάπεδο όπως στο Σχήμα. Η απόσταση από το σημείο επαφής στο σιλό μέχρι το σημείο επαφής στο δάπεδο είναι $2R$ και ο συντελεστής τριβής μεταξύ του δαπέδου και του του δοκαριού είναι μ.



(i) Να υπολογιστούν όλες οι δυνάμεις που ενεργούν στο δοκάρι.
(ii) Προσδιορίστε την περιοχή τιμών του μ για την οποία είναι δυνατή η ισορροπία του δοκαριού.

ΘΕΜΑ 2 (*2.5 μονάδες*)

Σώμα μάζας M αφήνεται να κινηθεί υπό την επίδραση της βαρύτητας σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης θ. Αν η δύναμη της αντίστασης στην κίνηση του σώματος είναι $f = -b\,M\,v^2$ όπου v η ταχύτητα του σώματος να υπολογιστεί
(i) Η ταχύτητα του σώματος συναρτήσει του χρόνου.
(ii) Ο χρόνος που θα χρειαστεί το σώμα για να διανύσει απόσταση d πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο όπως στο Σχήμα.



ΘΕΜΑ 3 (*2.5 μονάδες*)

Η τροχιά ενός σώματος, μάζας m, στροφορμής L και ενέργειας E, το οποίο κινείται σε κεντρικό δυναμικό δίνεται από την εξίσωση

$$r = \frac{a}{\tan\theta}\ , 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

όπου a γνωστή θετική σταθερά (με διαστάσεις μήκους). Να ευρεθεί το ενεργό δυναμικό και η δύναμη που ενεργεί στο σώμα.

ΘΕΜΑ 4 (*2.5 μονάδες*)

Σώμα μάζας m και στροφορμής L και ενέργειας $E > 0$ υπόκειται σε κεντρική δύναμη

$$F(r) = -\frac{L^2}{m}\frac{1}{r^3}$$

Να προσδιοριστεί η θέση του σώματος συναρτήσει του χρόνου καθώς και η εξίσωση τροχιάς. Μπορείτε να επιλέξετε κατάλληλα σχέσεις μεταξύ των αρχικών συνθηκών $t_0, r_0 = r(t_0), \theta_0 = \theta(t_0)$ έτσι ώστε να απλοποιηθούν οι εκφράσεις που προκύπτουν.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\,\cos\phi + \cos\theta\,\sin\phi \tag{A1}$$

$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\,\cos\phi - \sin\theta\,\sin\phi \tag{A2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{A3}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \tag{A4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{A5}$$

$$\sin(2\theta) = 2\,\sin\theta\,\cos\theta \tag{A6}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \tag{A7}$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta \tag{A8}$$

Ολοκληρώματα

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \tag{A9}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \mathrm{arctanh} x \tag{A10}$$

$$\int dx\, \tanh(x) = \ln[\cosh(x)] \tag{A11}$$

Ανάπτυγματα σε σειρές

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + \ldots \tag{A12}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5 + \ldots \tag{A13}$$

Πλάγια βολή

$$y = x\,\tan\theta - \frac{x^2 g}{2v_0^2\,\cos^2\theta} \tag{A14}$$

Μικρές Ταλαντώσεις

Στην περιοχή του ελάχιστου x_0 του δυναμικού $V(x)$

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}} \tag{A15}$$

Πολικές συντεταγμένες

Ταχύτητα

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta \tag{A16}$$

Επιτάχυνση

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta \tag{A17}$$

Δύναμη

$$\vec{F} = F_r\,\hat{e}_r + F_\theta\,\hat{e}_\theta \tag{A18}$$

2ος νόμος του Νεύτωνα

$$\begin{aligned} m\left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right) &= F_r \\ m\left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right) &= F_\theta \end{aligned} \tag{A19}$$

Κεντρικό δυναμικό

Εξισώσεις κίνησης

$$m\,r^2\,\dot{\theta} = L \tag{A20}$$

$$\frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\,m\,r^2} + V(r) = E \tag{A21}$$

όπου L η στροφορμή και E η ενέργεια. Ειδικά για $V(r) = -GMm/r = -\alpha/r$ η τροχιά σώματος μάζας m δίνεται από

$$r = \frac{r_0}{1+\epsilon\,\cos\theta} \tag{A22}$$

με

$$r_0 = \frac{L^2}{m\,\alpha} \tag{A23}$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2\,E\,L^2}{m\,\alpha^2}} \tag{A24}$$

Για ελλειπτική τροχιά ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης δίνεται από

$$a = r_0/(1-\epsilon^2) \tag{A25}$$

Τρίτος νόμος του Kepler

$$T^2 = \frac{4\,\pi^2}{G\,M}\,a^3 \tag{A26}$$