Κβαντικές Καταστάσεις

Δομή Διάλεξης

Σύντομη ιστορική ανασκόπηση

Ανασκόπηση Πιθανότητας

Το ΄Πλάτος Πιθανότητας' – Πείραμα διπλής οπής

Κβαντικές καταστάσεις (ket)

Ο δυϊκός χώρος (bra)

Σύνοψη

Κβαντική Φυσική

Όχι τελείως κατανοητή θεωρία (ανοιχτα ερευνητικά θέματα - δυσκολίες)

Απαραίτητη η λύση πολλών ασκήσεων για σωστή κατανόηση

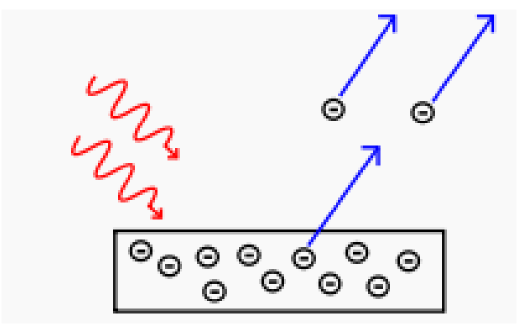
Κλασσική Φυσική: Μόνη πηγή αβεβαιότητας σφάλμα (αβεβαιότητα) μετρήσεων (δεδομένων) που οδηγεί σε κατανομή πιθανότητας προβλέψεων.

Κβαντική Φυσική: Η αβεβαιότητα σε ορισμένες μετρήσεις είναι ενδογενής στην θεωρία και στην φύση!!

Ιστορική Αναδρομή

Αρχικό πρόβλημα (τέλη 19ου αιώνα): Μέλαν σώμα θα έπρεπε να ακτινοβολεί άπειρη ενέργεια με βάση την κλασσική φυσική. Πείραμα: ακτινοβολούμενη ενέργεια ~ T^4.

1900 Max Planck: Εξήγησε το πείραμα με την υπόθεση ότι η ΗΜ ακτινοβολία αποτελείται απο φωτόνια με διακριτές τιμές ενέργειας (κβαντισμένες) E=nhv (v η συχότητα).
https://www.youtube.com/watch?v=ErRhupNgFS8

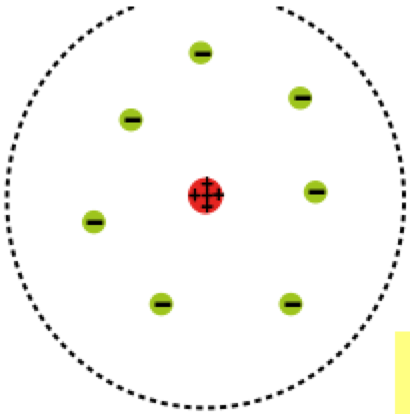


Άλλο πρόβλημα: Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο: Αύξηση της έντασης της ακτινοβολίας (πλάτος ταλάντωσης πεδίου) δεν οδηγεί σε εκπομπή ηλεκτρονιων αν η συχνότητα ακτινοβολίας δεν είναι αρκετά μεγάλη!

Einstein 1905: η ΗΜ ενέργεια αποτελείται απο κυματοπακέτα ενέργειας μεγέθους hv.

Ιστορική Αναδρομή

1911 το άτομο του Rutherford θα έπρεπε να καταρεύσει με βάση την κλασσική φυσική



1913 Niels Bohr: το άτομο είναι ευσταθές αν η στροφορμή των ηλεκτρονίων μπορεί να πάρει μόνο διακριτές τιμες $nh/2\pi$ που εξηγεί και φασματοσκοπικά δεδομένα.

1924 Luis de Broglie: Τα σωμάτια συμπεριφέρονται σαν κύματα με μήκος κύματος λ που συνδέεται με την ορμή τους p ως: $p=h/\lambda$. Άρα τα ηλεκτρόνια συμπεριφέρονται σαν στάσιμα κύματα γύρω απο τον πυρήνα και δεν μπορουν να έχουν οποιοδήποτε μήκος κύματος (λογω οριακών συνθηκών). Άρα δεν μπορούν να έχουν και οποιαδήποτε ορμή (άρα και στροφρομή, ενέργεια κλπ) παρά μόνο συγκεκριμένες (κβαντισμένες) τιμές.

Ιστορική Αναδρομή

1926 Schrodinger: Τα σωματια συμπεριφέρονται σαν κύματα. Η ποσότητα που ταλαντώνεται είναι το πλάτος πιθανότητας εύρεσης του σωματίου σε μια θέση στο χώρο (κυματοσυνάρτηση Ψ). Το πλάτος αυτό υπακούει συγκεκριμένη κυματική εξίσωση.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r},t)\right]\Psi(\mathbf{r},t)$$

1925 Heisenberg: Τα μετρήσιμα μεγέθη (ενέργεια, στροφορμή κλπ) μπορούν να περιγραφούν απο πίνακες που εξελίσονται χρονικά (τελεστές) με βαση συγκεριμένες εξισώσεις (μηχανική των μητρών). Η περιγραφή αυτή είναι ισδοδύναμη με την περιγραφή του Scrodinger και οδηγει στις ίδιες φυσικές προβλεψεις (Dirac 1926).

Ιστορική Αναδρομή

Einstein: Είναι η αβεβαιότητα-κύμα πιθανότητας της κβαντομηχανίκής αποτέλεσμα ελλειπους γνώσης της πραγματικής θεωρίας; Υπάρχουν ‘κρυμένες μεταβλητές’ που θα οδηγήσουν σε θεωρία χωρίς αβεβαιότητα και πιθανότητα; Απάντηση Bell 1964: Όχι, δεν υπάρχει πιο πλήρης θεωρία απο την κβαντομηχανική. Δεν υπάρχουν κρυμμένες μεταβλητές (πειραματική επιβεβαίωση 1972).

Ανασκόπηση Πιθανότητας

Πιθανότητα αποτελέσματος Χ: Λόγος διαδικασιών που δίνουν το αποτέλεσμα Χ προς σύνολο διαδικασιών μετά απο άπειρες μετρήσεις

$$P(X) = \lim_{\Omega(\Sigma)\to\infty} \frac{\Omega(X)}{\Omega(\Sigma)}$$

Αριθμός μεταξύ 0 και 1

Πιθανότητα απόκτησης είτε αποτελεσματος Χ είτε αποτελέσματος Υ:

$$P(X \mid Y) = \lim_{\Omega(\Sigma)\to\infty} \frac{\Omega(X \mid Y)}{\Omega(\Sigma)}$$

Προφανώς ισχύει (αν δεν μπορούμε να πάρουμε ταυτόχρονα Χ και Υ):

$$\Omega(X \mid Y) = \Omega(X) + \Omega(Y)$$

Άρα :

$$P(X \mid Y) = P(X) + P(Y)$$

Επίσης για το σύνολο Μ των πιθανών αποτελεσμάτων έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{M} P(X_i) = 1$$

Συνδυασμός στατιστικά ανεξάρτητων μετρήσεων

Συνδυασμός στατιστικά ανεξάρτητών μετρήσεων: $\Omega(X \otimes Y) = \Omega(X)\,\Omega(Y)$

Άρα η πιθανότητα να πάρουμε πρώτα το αποτέλεσμα X και μετά το αποτέλεσμα Y σε στατιστικά ανεξάρτητες μετρήσεις είναι:

$$P(X \otimes Y) = \lim_{\Omega(\Sigma)\to\infty} \frac{\Omega(X \otimes Y)}{\Omega(\Sigma \otimes \Sigma)} = P(X)\,P(Y)$$

Παράδειγμα: Η πιθανότητα να΄ φέρουμε στο ζάρι πρώτα άσσο και μετα 2 είναι 1/6 x 1/6=1/36

Μέσος Όρος

Ο μέσος όρος (mean) ή αναμενόμενη τιμή τυχαίας μεταβλητής u με M πιθανές τιμές είναι:

$$\langle u \rangle \equiv \sum_{i=1}^{M} P(u_i)\, u_i.$$

Για συναρτήσεις τυχαίας μεταβλητής έχουμε:

$$\langle f(u) \rangle \equiv \sum_{i=1}^{M} P(u_i)\, f(u_i)$$

Ισχύει ακόμα:

$$\langle f(u) + g(u) \rangle = \sum_{i=1}^{M} P(u_i)\,[f(u_i) + g(u_i)] = \sum_{i=1}^{M} P(u_i)\, f(u_i) + \sum_{i=1}^{M} P(u_i)\, g(u_i).$$

Άρα :

$$\langle f(u) + g(u) \rangle = \langle f(u) \rangle + \langle g(u) \rangle$$

Όμοια δείχνουμε ότι :

$$\langle c\, f(u) \rangle = c\, \langle f(u) \rangle.$$

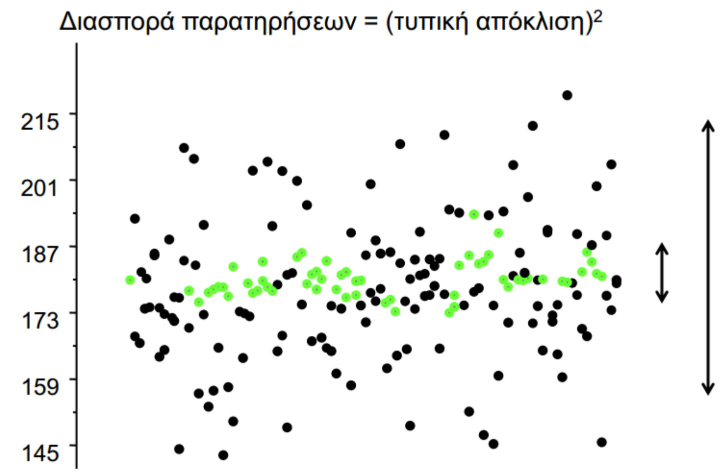
1a+

Διασπορά

Η διασπορά (variance) περιγράφει το εύρος των πιθανών αποτελεσμάτων μετρήσεων γύρω απο την μέση τιμή και ορίζεται ώς ο θετικός αριθμός::

$$\left\langle (\Delta u)^2 \right\rangle = \sum_{i=1}^{M} P(u_i)\,(u_i - \langle u \rangle)^2$$

Πόσο διασκορπισμένες είναι οι **παρατηρήσεις;**



Για την διασπορά ισχύει γενικά ότι:

$$\left\langle (u - \langle u \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle (u^2 - 2\,u\,\langle u \rangle + \langle u \rangle^2) \right\rangle = \left\langle u^2 \right\rangle - 2\,\langle u \rangle\,\langle u \rangle + \langle u \rangle^2$$

$$\Downarrow$$

$$\left\langle (\Delta u)^2 \right\rangle = \left\langle u^2 \right\rangle - \langle u \rangle^2.$$

Η τυπική απόκλιση ορίζεται ως:

$$\sigma_u = \left[\left\langle (\Delta u)^2 \right\rangle \right]^{1/2}$$

Συνεχεις Κατανομές Πιθανότητας

Η συνεχής κατανομή πιθανότητας ορίζεται ως: $P(u \in u : u + du) = P(u)\, du$

Απο τις διακριτες κατανομές προκύπτουν οι παρακάτω γενικεύσεις (απλά αντικαθιστούμε το άθροισμα με ολοκλήρωμα επι du και ολοκληρώνουμε σε όλα τα πιθανά αποτελέσματα δηλ. απο – απειρο μέχρι άπειρο):

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} P(u)\, du, \\
\langle u \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} P(u)\, u\, du, \\
\left\langle (\Delta u)^2 \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} P(u)\, (u - \langle u \rangle)^2\, du = \left\langle u^2 \right\rangle - \langle u \rangle^2
\end{aligned}
$$

Πλάτος Πιθανότητας

Πλάτος πιθανότητας ορίζεται ως ο μιγαδικός αριθμος A απο τον οποίο προκύπτει η πιθανότητα P ως:

$$P = |A|^2$$

Η κβαντομηχανική μπορεί να προβλέψει πλατη πιθανότητας (εμφανίζονται μόνο στην κβαντομηχανική).

Φυσική συνέπεια πλάτους πιθανότητας: Έστω πείραμα με δυο πιθανές διεργασίες S και T που οδηγούν στο ίδιο μετρούμενο αποτέλεσμα.

Η ολίκή πιθανότητα να συμβεί το αποτέλεσμα είναι P(S ή T):

$$P(S \text{ ή } T) = P(S) + P(T) \xrightarrow{\text{κβαντικό σύστημα}} A(S \text{ ή } T) = A(S) + A(T)$$

$$\left.\begin{array}{l} P = |A|^2 \\ \\ A(S \text{ ή } T) = A(S) + A(T) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} P(S \text{ ή } T) &= |A(S \text{ ή } T)|^2 = |A(S) + A(T)|^2 \\ &= |A(S)|^2 + A(S)A^*(T) + A^*(S)A(T) + |A(T)|^2 \\ &= P(S) + P(T) + 2\Re(A(S)A^*(T)) \end{aligned}$$

Πλάτος Πιθανότητας

$$P(S \text{ ή } T) = P(S) + P(T) \Longrightarrow A(S \text{ ή } T) = A(S) + A(T)$$

$$P = |A|^2$$

$$A(S \text{ ή } T) = A(S) + A(T)$$

$$P(S \text{ ή } T) = |A(S \text{ ή } T)|^2 = |A(S) + A(T)|^2$$

$$= |A(S)|^2 + A(S)A^*(T) + A^*(S)A(T) + |A(T)|^2$$

$$= P(S) + P(T) + 2\Re(A(S)A^*(T))$$

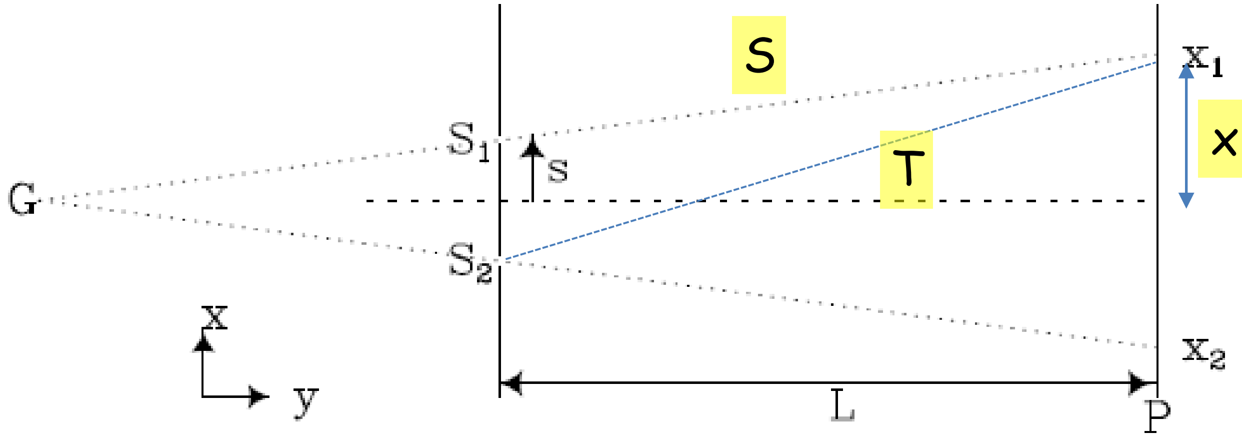
Όρος κβαντικής συμβολής (χωρίς κλασσικό ανάλογο) παραβιάζει θεμελιώδη νόμο των πιθανοτήτων: $P(S \text{ ή } T) = P(S) + P(T)$

Φυσική σημασία: ο όρος συμβολής επιτρέπει τον ενδεχόμενο να συμβούν ταυτόχρονα και το ενδεχόμενο S και το ενδεχόμενο T (μη τοπικότητα)

Κβαντική Συμβολή: Θεμελώδης αρχή της κβαντομηχανικής

$$\boxed{A(S \text{ ή } T) = A(S) + A(T)}$$

Παράδειγμα: Το πείραμα της διπλής οπής



Πιθανότητα εύρεσης ηλεκτρονίου στην θέση x του πετάσματος:

$$P(x) = |A_1(x) + A_2(x)|^2 = |A_1(x)|^2 + |A_2(x)|^2 + 2\Re(A_1(x)A_2^*(x))$$

1b+

Πλάτος πιθανότητας να περάσει το ηλεκτρόνια απο την οπή 1 (2) και να φθάσει στην θέση x.

$$A_i = |A_i|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_i} = \sqrt{P_i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_i}$$

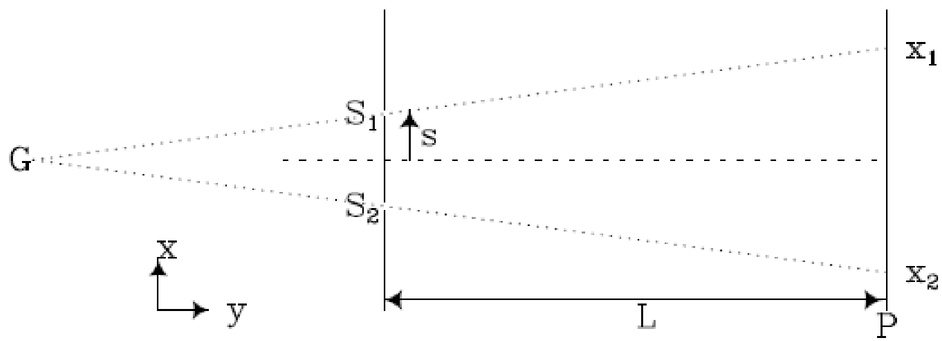
Παράδειγμα: Το πείραμα της διπλής οπής

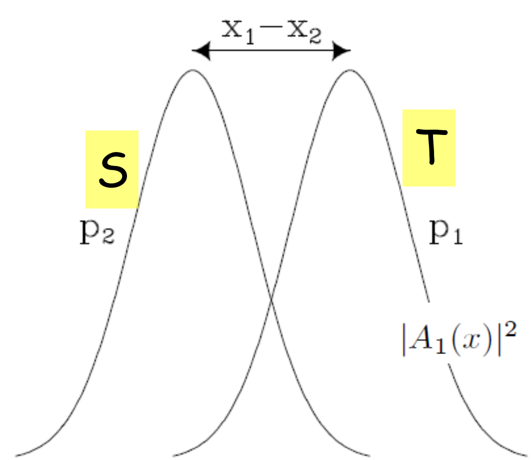
Πιθανότητα εύρεσης ηλεκτρονίου στην θέση x του πετάσματος:

$$P(x) = |A_1(x) + A_2(x)|^2 = |A_1(x)|^2 + |A_2(x)|^2 + 2\Re(A_1(x)A_2^*(x))$$

Πλάτος πιθανότητας να περάσει το ηλεκτρόνια απο την οπή 1 (2) και να φθάσει στην θέση x.

$$A_i = |A_i|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_i} = \sqrt{P_i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_i}$$





Παράδειγμα: Το πείραμα της διπλής οπής

Πιθανότητα εύρεσης ηλεκτρονίου στην θέση x του πετάσματος:

$$P(x) = |A_1(x) + A_2(x)|^2 = |A_1(x)|^2 + |A_2(x)|^2 + 2\Re(A_1(x)A_2^*(x))$$

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x) + I(x)$$

Όρος συμβολής:

$$A_i = |A_i|e^{i\phi_i} = \sqrt{P_i}e^{i\phi_i}$$

$$2\Re(A_1(x)A_2^*(x))$$

1c+

$$I(x) = 2\sqrt{P_1(x)P_2(x)}\cos(\phi_1(x) - \phi_2(x))$$

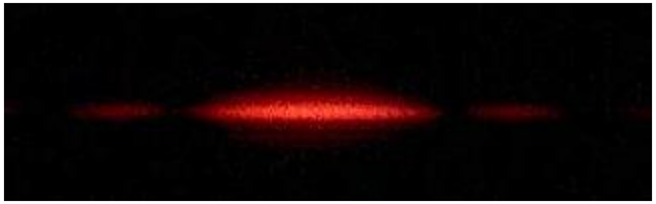
1d+

Στο κέντρο του πετάσματος:

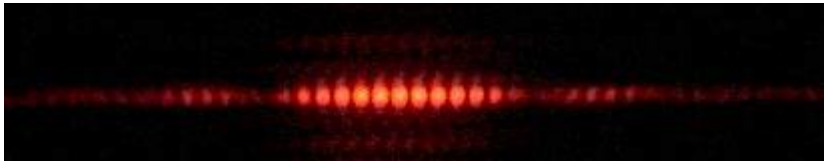
$$P_1 \simeq P_2 \rightarrow 4P_1 > P(x) > 0$$

Αναμενόμενη μορφή πιθανότητας P(x) Λόγω όρου συμβολής

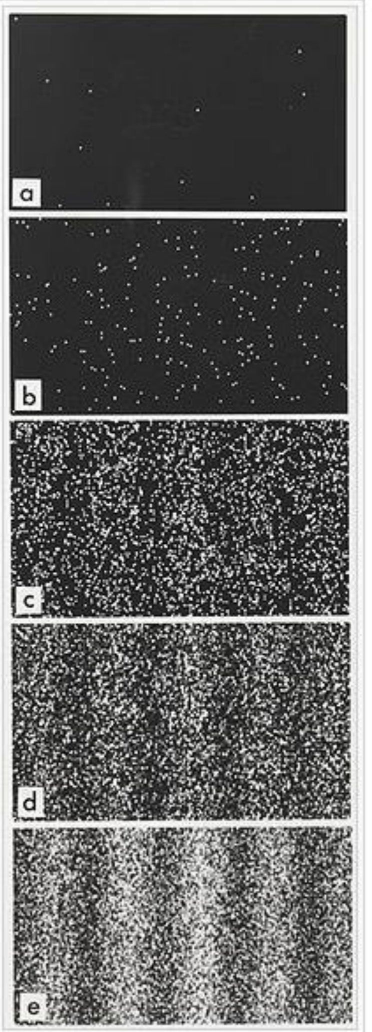
Μίο οπή:



Δύο οπές (όρος συμβολής):



Πείραμα με ηλεκτρόνια:



Για μακροσκοπικά σωμάτιο η απόσταση μεταξύ των κροσων είναι τόσο μικρη ώστε γινεται μη μετρήσιμη! ΄Τότε πειράματα μετρούν την μέση τιμή του I(x) που είναι 0 και η κβαντική συμβολή δεν είναι μετρήσιμη!

Κβαντικές Καταστάσεις

Η μέτρηση μιας 'ποσότητας' (παρατηρήσιμου μεγέθους) ενός συστήματος (πχ ορμή) διαταράσει το σύστημα και το σύστημα μεταπίπτει σε μια **κβαντική κατάσταση** στην οποία η επανάληψη μέτρησης της ίδιας 'ιδιότητας' οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα.

Παραδείγματα κβαντικών καταστάσεων:
|E>: Κβαντική κατάσταση όπου άν μετρηθεί η ενέργεια το αποτέλεσμα θα είναι E.
|p>: Κβαντική κατάσταση όπου άν μετρηθεί η ορμή το αποτέλεσμα θα είναι p.
|x>: Κβαντική κατάσταση όπου άν μετρηθεί η θέση το αποτέλεσμα θα είναι x.
Γενική κατάσταση |ψ> όπου οι πιθανότητες μέτρησης διαφόρων φυσικών ιδιοτήτων έχουν αβεβαιότητα: υπάρχει πιθανότητα $P_1(E)$ να μετρηθεί τιμή της ενέργειας E, $P_2(p)$ να μετρηθεί τιμή της ορμής p κλπ.

Σε σύστημα με κατάσταση |ψ>, μετά την μέτρηση πχ της ενέργειας με αποτέλεσμα E_1 η κυματοσυνάρτηση διαταράσεται και 'καταρέει' (μετατρέπεται) σε νέα κατάσταση $|E_1>$ ώστε επανάληψη της ίδιας μέτρησης να δώσει το ίδιο αποτέλεσμα.

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{μέτρηση ενέργειας}} |E_i\rangle \quad \text{με πιθανότητα} \quad P(E_i).$$

Κβαντικές Καταστάσεις

Σε σύστημα με κατάσταση |ψ>, μετά την μέτρηση πχ της ορμής με αποτέλεσμα p_1 η κυματοσυνάρτηση διαταράσεται και 'καταρέει' (μετατρέπεται) σε νέα κατάσταση $|p_1>$ ώστε επανάληψη της ίδιας μέτρησης να δώσει το ίδιο αποτέλεσμα.

$$\boxed{|\psi\rangle \xrightarrow{\text{μέτρηση ορμής}} |\mathbf{p}\rangle \quad \text{με πιθανότητα} \quad P(\mathbf{p})}$$

$$\boxed{|p> \rightarrow p \text{ με πιθανότητα } 1}$$

Οι καταστάσεις |x> και |p> δεν μπορούν να συμπίπτουν γιατί μέτρηση της θέσης (πχ με σκέδαση φωτονίου μικρού μήκους κύματος) μεταβάλλει την ορμή. Άρα δεν μπορούμε να είμαστε ταυτόχρονα σίγουροι για την ορμή και την θέση ενός σωματίου.

Σε αντιδιαστολή, η κλασική κατάσταση ενός σωματίου καθορίζεται πλήρως απο την ταυτόχρονη μέτρηση της θέσης και της ορμής του. Αυτή είναι η πλήρης πληροφορία που απαιτείται για να βρούμε την χρονική εξέλιξη του σωματίου (αν ξέρουμε το δυναμικό ή την δύναμη).

Παρατηρήσιμα Μεγέθη (Observables)

Παρατηρήσιμα μεγέθη ενός συτήματος είναι εκείνα τα μεγέθη που μπορούν να μετρηθούν (θέση, ορμή, ενέργεια, στροφορμή κλπ)

Φάσμα (spectrum) ενός παρατηρήσιμου μεγέθους είναι όλες εκείνες οι τιμές που μπορεί να δώσει μια μέτρηση για το συγκεκριμένο μέγεθος σε δεδομένο σύστημα.

Για παράδειγμα το φάσμα της συνετταγμέχης x ελεύθερου σωματίου στο χώρο είναι απο −∞ έως + ∞ $(-\infty, \infty)$ ενώ το φάσμα της κινητικής ενέργειας είναι απο 0 έως +∞. $(0, \infty)$

Θα δούμε ότι στην κβαντική μηχανική η προβολή της στροφορμής κατα μήκος οποιουδήποτε άξονα έχει διακριτό φάσμα (δεν μπορεί να πάρει συνεχείς τιμές):

$$(\ldots, (k-1)\hbar, k\hbar, (k+1)\hbar, \ldots)$$

Όπου ħ είναι η σταθερά του Planck h/2π. $h = 6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$

Κβαντική κατάσταση και πλατη πιθανότητας παρατηρήσιμων μεγεθών

Τα παρατηρήσιμα μεγέθη στην κβαντομηχανική είναι τυχαίες μεταβλητες.

Σε κάθε τιμή του φάσματος ενος παρατηρήσιμου μεγέθους αντιστοιχεί ένα κβαντικό πλάτος πιθανότητας για την μέτρηση της συγκεκριμένης τιμής.

Το σύνολο των κβαντικών πλάτών πιθανότητας ενος φάσματος παρατηρήσιμου μεγέθους καθορίζουν πλήρως την κβαντική κατάσταση του συστήματος.

Στόχος της κβαντομηχανικής είναι ο υπολογισμός αυτών των πλατών πιθανότητας με χρήση αποτελεσματών πειραματικών μετρήσεων.

Παράδειγμα: Για το φάσμα n-τιμών ενος παρατηρήσιμου μεγέθους μπορεί να έχουμε τα πλάτη πιθανότητας $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (μπορεί να είναι και συνεχές). Για ένα άλλο παρατηρήσιμο μέγεθος μπορεί να έχουμε τα πλάτη πιθανότητας $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται πληρως απο οποιοδήποτε απο τα παραπάνων σύνολα και αν γνωρίζουμε το ένα μπορούμε να υπολογίσουμε το άλλο με 'αλλαγή αναπαράστασης' της κβαντικής κατάστασης.

Παράδειγμα: Κβαντική κατάσταση του Spin

Το spin είναι μια καθαρά κβαντική ποσότητα που χαρακτρίζει τα σωματια και έχει χαρακτηριστικά ιδιοστροφορμης.

Έστω σωμάτιο με μέτρο spin: $\sqrt{3/4}\hbar$

Αποδεικνύεται ότι το φάσμα για την z συνιστώσα του spin είναι {-ħ/2, ħ /2} (δύο τιμές)

Όμοια, το φάσμα για την x συνιστώσα του spin είναι το ίδιο {-ħ/2, ħ /2}

Έστω ότι τα πλάτη πιθανότητας για το φασμα της z συνιστώσας είναι: $\{a_-, a_+\}$

Αυτά τα πλάτη καθορίζουν πλήρως την κατάσταση spin του σωματίου

Με κατάλληλο μετασχηματισμό μπορούμε να βρούμε τα πλάτη για την x συνιστώσα του spin: $\{b_-, b_+\}$

Παράδειγμα: Κυματοσυνάρτηση

Η κυματοσυνάρτηση Ψ(x) περιγράφει και αυτή ένα συνεχές σύνολο πλατών πιθανότητας να βρεθεί το σωμάτιο σε κάθε σημείο του χώρου. Αντιστοιχεί στα πλατη πιθανότητας του φάσματος του παρατηρήσιμου μεγέθους της θέσης ενός σωματίου.

Άλλο παράδειγμα είναι τα πλάτη πιθανότητας για το φάσμα της ενέργειας:

$$(E_1, E_2, \ldots)$$

Διανυσματικός χώρος κβαντικών καταστάσεων

Έστω δύο καταστάσεις που περιγράφονται απο σύνολα πλατών πιθανότητας παρατηρήσιμου μεγέθους (πχ η ανίχνευση του ηλεκτρονίου στην θέση x πείραμα διπλής οπής είτε μέσω της μιας διαδρομής (ψ) είτε μέσω της άλλης (φ)).

$$|\psi\rangle = \{\psi_1, \psi_2, \ldots\} \qquad |\phi\rangle = \{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$$

Με βάση την θεμελιώδη αρχή της κβαντομηχανικής, το πλατος πιθανότητας να προκύψει μέτρηση είτε μέσω της μιας φυσικής διεργασίας είτε μέσω της άλλης είναι το άθροισμα των δύο πλατών πιθανότητας που αντιστοιχούν σε κάθε φυσική διεργασία.

$$\{\psi_1 + \phi_1, \psi_2 + \phi_2, \psi_3 + \phi_3, \ldots\}$$

Αυτά τα αθροίσματα περιγράφουν μια νέα νέα κβαντική κατάσταση που δίνει τα πλάτη πιθανότητας για την κάθε τιμή μέτρησης ανεξάρτητα απο την φυσική διεργασία που οδήγησε στην μέτρηση.

$$|\chi\rangle = \{\psi_1 + \phi_1, \psi_2 + \phi_2, \psi_3 + \phi_3, \ldots\}$$

Διανυσματικός χώρος κβαντικών καταστάσεων

Αυτά τα αθροίσματα περιγράφουν μια νέα νέα κβαντική κατάσταση που δίνει τα πλάτη πιθανότητας για την κάθε τιμή μέτρησης ανεξάρτητα απο την φυσική διεργασία που οδήγησε στην μέτρηση.

$$|\chi\rangle = \{\psi_1 + \phi_1, \psi_2 + \phi_2, \psi_3 + \phi_3, \ldots\}$$

$$\Downarrow$$

$$|\chi\rangle = |\psi\rangle + |\phi\rangle$$

Άρα το άθροισμα δύο κατασάσεων είναι μια νέα κβαντική κατάσταση όπως συμβαίνει με τα διανύσματα.

Όμοια, τα γινόμενα των πλατών πιθανότητας επι ένα μιγαδικό αριθμό περιγράφουν μια νέα κβαντική κατάσταση όπως στα διανύσματα.

$$|\psi'\rangle = \alpha|\psi\rangle$$

1e+

Διανυσματικός χώρος κβαντικών καταστάσεων

Άρα το άθροισμα δύο κατασάσεων είναι μια νέα κβαντική κατάσταση όπως συμβαίναι με τα διανύσματα.

Όμοια, τα γινόμενα των πλατών πιθανότητας επι ένα μιγαδικό αριθμό περιγράφουν μια νέα κβαντική κατάσταση όπως στα διανύσματα.

$$|\psi'\rangle = \alpha|\psi\rangle$$

Άρα ο χώρος των κβαντικών καταστάσεων είναι ένας διανυσματικός χώρος (χώρος Hilbert) στον οποίο κάθε κατάσταση περιγράφεται συντομογραφικά απο ένα ket: $|\psi>$.

Ιδιότητες Διανυσματικών Χώρων: Βάση

Βάση διανυσματικού χώρου V είναι ένα σύνολο διανυσμάτων |i>, μέσω των οποίων μπορεί να εκφραστεί οποιοδήποτε διάνυσμα του διανυσματικού χώρου σαν γραμμικός συνδυασμός:

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i |i\rangle$$

μιγαδικοί αριθμοί

Τα διανύσματα της βάσης έιναι γραμμικά ανεξάρτητα (κανένα δεν μπορεί να εκφραστεί ώς γραμμικός συνδυασμός των άλλων).

Παράδειγμα βάσης: $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$

$$\mathbf{b} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

Συναρτήσεις στον Διανυσματικό Χώρο (Δυικός (dual) χώρος)

Για να εξάγουμε τα μιγαδικά πλάτη πιθανότητας απο τις κβαντικές καταστάσεις χρειαζόμαστε μιγαδικές συναρτήσεις που θα έχουν όρισμα κβαντικές καταστάσεις και θα μας δίνουν μιγαδικούς αριθμούς:

$$f\left(|\psi\rangle\right) \longrightarrow \langle f|\psi\rangle$$

Ο χώρος αυτών των συναρτήσεων <f| (bra <f|) αποτελεί ένα 'δυικό' χώρο σε σχέση με τον διανυσματικό χώρο των κβαντικών καταστάσεων (ket |ψ>)

Οι συναρτήσεις που αντιστοιχούν στο δυικό χώρο είναι γραμμικές δηλαδή ισχύει

$$\langle f|\big(\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle\big) = \alpha\langle f|\psi\rangle + \beta\langle f|\phi\rangle$$

Ο δυικός χώρος των συναρτήσεων είναι διανυσματικός δηλαδή ισχύει

$$\langle h| \equiv \langle f| + \langle g| \qquad\qquad \langle p| \equiv \alpha\langle f|$$

Συναρτήσεις στον Διανυσματικό Χώρο (Δυικός (dual) χώρος)

Ο δυικός χώρος των συναρτήσεων είναι διανυσματικός δηλαδή ισχύει

$$\langle h| \equiv \langle f| + \langle g| \qquad \langle p| \equiv \alpha \langle f|$$

όπου οι συναρτήσεις bra <h| και <p| ανήκουν και αυτές στον δυικό διανυσματικό χώρο και ορίζονται απο τις σχέσεις:

$$\langle h|\psi\rangle = \langle f|\psi\rangle + \langle g|\psi\rangle \qquad \langle p|\psi\rangle = \alpha\langle f|\psi\rangle$$

Βάση στο δυικό χώρο

Αφού ο δυικός χώρος V' είναι διανυσματικός θα πρέπει να έχει μια βάση.

Έστω βάση |i> (i=1,..,N) στο χώρο V. Μια κατάσταση |ψ> αναπτύσεται στην βάση αυτή ως:

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i |i\rangle$$

Ορίζουμε την βάση στο δυικό χώρο (συζηγής βάση)ως: $\langle j| \; (j = 1, \ldots, N)$

όπου: $\langle j|i\rangle = \delta_{ij}$

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i |i\rangle \longrightarrow \langle\psi| \equiv \sum_i a_i^* \langle i| \xrightarrow{\langle j|i\rangle = \delta_{ij}}$$

1f+

$$\langle\psi|\psi\rangle = \left(\sum_i a_i^* \langle i|\right)\left(\sum_j a_j |j\rangle\right) = \sum_i |a_i|^2 \geq 0$$

μήκος της |ψ>

Αντιστοιχία με διανύσματα

$$(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k})\cdot(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}) = b_x^2+b_y^2+b_z^2$$

μήκος του διανύσματος στο τετράγωνο

Στην περίπτωση του διανύσματος το δυικό συζηγές ταυτίζεται με το διάνυσμα γιατί οι συνιστώσες είναι πραγματικοί αριθμοί (δεν αλλάζουν με την συζυγία).

Εσωτερικό γινόμενο:

$$\left.\begin{array}{l} |\phi\rangle = \sum_i b_i|i\rangle \\ |\psi\rangle = \sum_i a_i|i\rangle \end{array}\right\} \xrightarrow{\langle j|i\rangle=\delta_{ij}} \left\{\begin{array}{ll} \langle\phi|\psi\rangle = \sum_i b_i^* a_i & \text{1g+} \\ \langle\psi|\phi\rangle = \left(\langle\phi|\psi\rangle\right)^* & \text{1h+} \end{array}\right.$$

$$\langle\psi| \equiv \sum_i a_i^*\langle i|$$

Η αναπαράσταση της ενέργειας

Για σωμάτιο σε δέσμια κατάσταση (πχ πηγάδι δυναμικού), το φάσμα της ενέργειας είναι διακριτο: $E_0, E_1, \ldots$

Μια κβαντική κατάσταση περιγράφεται πλήρως απο το σετ των πλατών πιθανότητας που αντιστοιχεί στο παραπάνω φάσμα $\{a_0, a_1, \ldots\}$

Έστω μια κατάσταση για την οποία ισχύει: $a_i = 0$ για $i \neq k$ και $a_k = 1$

Στην κατάσταση αυτή μέτρηση της ενέργειας θα δώσει την τιμή E_k με πιθανότητα 1. Ονομάζουμε αυτή την κατάσταση $|E_k\rangle$ (βάση καθορισμένης ενέργειας).

Αναπτύσουμε μια κατάσταση $|\psi\rangle$ στην βάση καθορισμένης ενέργειας ως:

$$\boxed{|\psi\rangle = \sum_i a_i |E_i\rangle \xrightarrow{\langle E_k|E_i\rangle = \delta_{ik}} a_k = \langle E_k|\psi\rangle}$$

1i+

Εύρεση πλάτους πιθανότητας απο κατάσταση |ψ>

Αναπτύσουμε μια κατάσταση |ψ> στην βάση καθορισμένης ενέργειας ως:

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i |E_i\rangle \xrightarrow{\langle E_k|E_i\rangle = \delta_{ik}} a_k = \langle E_k|\psi\rangle$$

Έτσι απο την |ψ> βρίσκουμε τα πλάτη πιθανότητας για το φάσμα ενέργειας!!

Απο τα πλάτη βρίσκουμε και τις αντίστοιχες πιθανότητες για την μέτρηση των διαφόρων τιμών του φάσματος.

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{μέτρηση την ενέργειας}} |E_i\rangle \quad \text{με πιθανότητα} \quad |\langle E_i|\psi\rangle|^2$$

Κανονικοποίηση

Για το μήκος της κυματοσυνάρτησης έχουμε:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_i |a_i|^2 = \sum_i P_i = 1$$

Το άθροισμα των πιθανοτήτων πρέπει να είναι μονάδα αφού θα μετρηθεί σίγουρα μια απο τις τιμές του φάσματος

Άρα τα μήκη κβαντικών καταστάσεων πρέπει να είναι μόνάδα (κανονικοποιημένα).

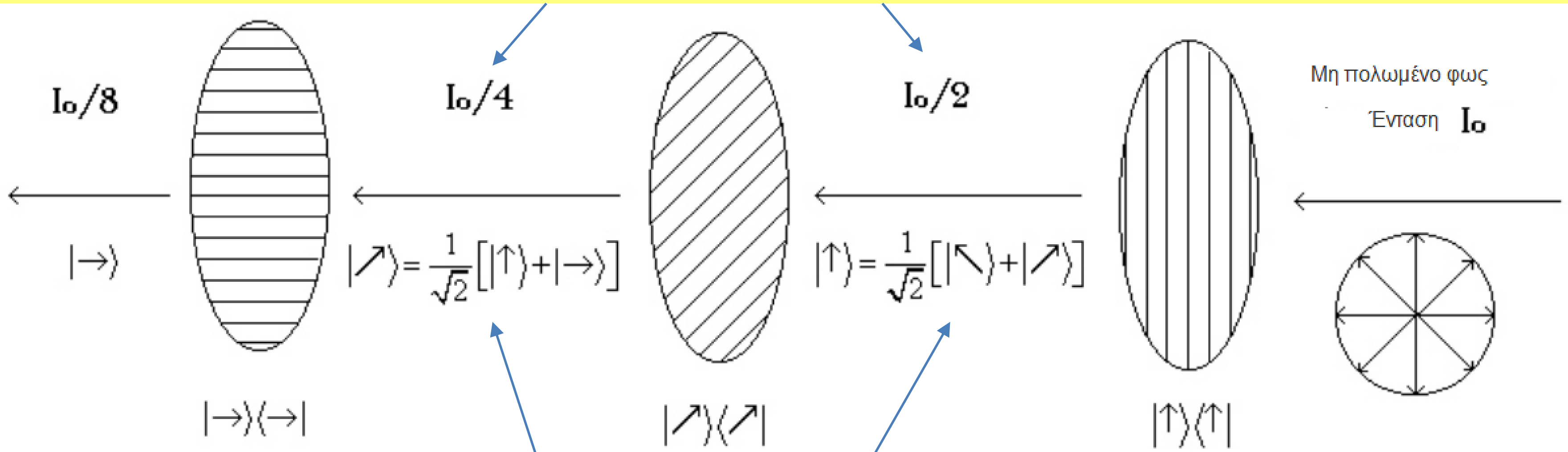
$$|\phi\rangle = \sum_i b_i|i\rangle \xrightarrow{\text{κανονικοποίηση}} |\psi\rangle \equiv \sum_i \frac{b_i}{\sqrt{\langle\phi|\phi\rangle}}|i\rangle$$

$\langle\psi|\psi\rangle=1$

1j+

Ο κβαντικός πολωτής

Η ένταση ακτινοβολίας είναι ανάλογη του αριθμού φωτονίων που πέρασαν που είναι ανάλογος με την πιθανότητα να μετρηθεί το κάθε φωτόνιο να έχει την δεδομένη πόλωση.



Πλάτη πιθανότητας της κβαντικής κατάστασης στην βάση της νέας μέτρησης

Κλασσική περιγραφή:

$$|\vec{E}| \longrightarrow |\vec{E}|\cos\theta$$

$$I_0 \longrightarrow I_0 \cos^2\theta$$

$$I_0 \longrightarrow \frac{I_0}{2}$$

1I+

Σύνοψη

Το κβαντικό πλάτος πιθανότητας είναι ένας μιγαδικός αριθμός A του οποίο το μέτρο στο τετράγωνο δίνει την πιθανότητα P να δώσει μια μέτρηση φυσικού μεγέθους μια δεδομένη τιμή ($P=|A|^2$).

Όταν ένα αποτέλεσμα μέτρησης μπορεί να προκύψει με δύο ή περισσότερες φυσικές διεργασίες (πχ πείραμα διπλής οπής) τότε το πλάτος πιθανότητας A για το τελικό αποτέλεσμα της μέτρησης είναι το άθροισμα των πλατών πιθανότητας για το ίδιο αποτέλεσμα μέσω της κάθε διεργασίας: $A=A_1+A_2+\ldots$. Άρα στην κβαντομηχανική παραβιάζεται κλασσική θεωρία πιθανοτήτων σύμφωνα με την οποία θα έπρεπε $P=P_1+P_2+\ldots$

$$P(x) = |A_1(x) + A_2(x)|^2 = |A_1(x)|^2 + |A_2(x)|^2 + 2\Re(A_1(x)A_2^*(x))$$

$$\Downarrow$$

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x) + I(x)$$

Η κβαντική κατάσταση συστήματος ανήκει σε διανυσματικό χώρο καθορίζεται απο το πλήρες σετ πλατών πιθανότητας για την μέτρηση παρατηρήσιμου μεγέθους.

Με χρήση του διυκού χώρου και του εσωτερικού γινομένου μπορύν να προκύψουν τα πλάτη πιθανότητας για οποιαδήποτε μέτρηση απο την κβαντική κατάσταση.

Ασκήσεις

Πως ορίζεται μια κβαντική κατάσταση;

Απ: Απο το πλήρες σετ των πλατών πιθανότητας για το φάσμα δεδομένου παρατηρήσιμου μεγέθους.

Ποιά είναι η χρησιμότητα των bra (δυικού χώρου);

Απ: Το bra είναι μια συνάρτηση που δέχεται σαν όρισμα το ket (κβαντική κατάσταση) και δίνει ένα μιγαδικό αριθμό: το πλάτος πιθανότητας για το αποτέλεσμα μιας μέτρησης. Για παράδειγμα το bra $\langle E_2|$ εξάγει απο την κβαντική κατάσταση $|\psi\rangle$ το πλάτος πιθανότητας $\langle E_2|\psi\rangle$ να δωσει μια μέτρηση της ενέργειας αποτέλεσμα που αντιστηχεί στην ενέργεια E_2 (δεύτερη διεγερμένη στάθμη).

Έστω η κβαντική κατάσταση: $|\psi\rangle = e^{i\pi/5}|a\rangle + e^{i\pi/4}|b\rangle$

Εκφράστε το bra $\langle\psi|$ σαν γραμμικό συνδυασμο των bra $\langle a|$ και $\langle b|$.

Απ: $\langle\psi| = e^{-i\pi/5}\langle a| + e^{-i\pi/4}\langle b|$

Ασκήσεις

Έστω η κβαντική κατάσταση: $|\psi\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/5}|a\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}|b\rangle$

Εκφράστε το bra <ψ| σαν γραμμικό συνδυασμο των bra <a| και <b|.

Απ: $\langle\psi| = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/5}\langle a| + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\langle b|$

Έστω η κανονικοποιημένη κβαντική κατάσταση: $|\psi\rangle = a|A\rangle + b|B\rangle$

Βρείτε την πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση |A> αν

(a) $a = \mathrm{i}/2$; (b) $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$; (c) $b = \frac{1}{3} + \mathrm{i}/\sqrt{2}$

Απ: (a) $P = \frac{1}{4}$; (b) $P = 0$; (c) $P = \frac{7}{18}$

Ασκήσεις

Έστω η κβαντική κατάσταση:

$$|\psi\rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n |n\rangle$$

όπου:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-\mathrm{i}}{3}\right)^{|n|/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi}$$

Αν οι καταστάσεις |n> αποτελούν ορθοκανονική βάση, (a) βρείτε την πιθανότητα εύρεσης του συστήματος σε δεδομένη κατάσταση |n>. (b) Βρείτε την πιθανότητα εύρεσης του συστήματος σε κατάσταση με μή αρνητικό n.

Απ: (a) $P = \frac{1}{2} 3^{-|n|}$. (b) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} = \frac{1}{2}$ και $P_0 = \frac{1}{2}$ αρα $P(n \geq 0) = \frac{3}{4}$.