Τελεστές

Δομή Διάλεξης

Ορισμός-Παραδείγματα Τελεστών

Αναμενόμενες τιμές φυσικών μεγεθών με χρήση τελεστών

Ιδιοκαταστάσεις και Ιδιοτιμές τελεστών

Ερμητειανοί τελεστές

Στοιχεία πίνακα τελεστών

Μεταθέτες τελεστών

Σύνοψη

Ορισμός Τελεστή

Τελεστής Q που δρά στον κβαντικό διανυσματικό χώρο των kets είναι ένα αντικείμενο που μετασχηματίζει ένα ket |ψ> σε ένα άλλο ket.

$$|\phi\rangle = Q|\psi\rangle$$

Οι κβαντικοί τελεστές είναι γραμμικοί, δηλ. ισχύει:

$$Q\big(\alpha|\psi\rangle + \beta|\chi\rangle\big) = \alpha(Q|\psi\rangle) + \beta(Q|\chi\rangle)$$

Σε κάθε παρατηρήσιμο μέγεθος αντιστοιχεί ένας κβαντικός τελεστής. Υπάρχουν όμως και άλλοι τελεστές που δεν αντιστοιχούν σε παρατηρήσιμο μέγεθος αλλά παίζουν άλλους ρόλους στην Κβαντομηχανική (πχ μετασχηματσιμοί συμμετρίας).

Ταυτοτικός Τελεστής (Identity Operator)

Έστω ο τελεστής που ορίζεται μέσω μιας βάσης |i> ως:

$$I = \sum_i |i\rangle\langle i|$$

Η δράση του I σε μια κβαντική κατάσταση την αφήνει αναλλόιωτη:

$$I|\psi\rangle = \sum_i |i\rangle\langle i|\Big(\sum_j a_j|j\rangle\Big) = \sum_i a_i|i\rangle = |\psi\rangle$$

2a+

$$\langle j|i\rangle = \delta_{ij}$$

Ο τελεστής I που αφήνει τις κβαντικές καταστάσεις αναλλοίωτες ονομάζεται ταυτοτικός τελεστής (identity operator).

Ο τελεστής της Hamiltonian

Έστω ο τελεστής που ορίζεται μέσω μιας βάσης $|E_i\rangle$ (καταστάσεις καθορισμένης ενέργειας) ως:

$$H = \sum_i E_i |E_i\rangle\langle E_i|$$

Ο σημαντικός αυτός τελεστής αποτελεί την Hamiltonian του κβαντικού συτήματος που έχει ενεργειακό φάσμα E_i .

Απο την Hamiltonian μπορει να προκύψει η μέση τιμή της ενέργειας κβαντικού συστήματος που είναι σε κατάσταση $|\psi\rangle$ ως εξής:

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i |E_i\rangle \xrightarrow{\langle E_k|E_i\rangle = \delta_{ik}} a_k = \langle E_k|\psi\rangle$$

Μέση τιμή της Ενέργειας

Απο την Hamiltonian μπορει να προκύψει η μέση τιμή της ενέργειας <Ε> κβαντικού συστήματος που είναι σε κατάσταση |ψ> ως εξής:

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i |E_i\rangle \xrightarrow{\langle E_k|E_i\rangle = \delta_{ik}} a_k = \langle E_k|\psi\rangle$$

$$H = \sum_i E_i |E_i\rangle\langle E_i|$$

$$\Downarrow$$

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \sum_i E_i \langle\psi|E_i\rangle\langle E_i|\psi\rangle$$

$$\langle E_i|\psi\rangle = a_i$$

$$\langle\psi|E_i\rangle = a_i^*$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle\psi|H|\psi\rangle = \sum_i E_i |a_i|^2 = \sum_i p_i E_i = \langle E\rangle}$$

Μέση τιμή Παρατηρήσιμου Μεγέθους Q

Παρόμοια μπορούμε να ρούμε την μέση τιμή οποιουδήποτε παρατηρήσιμου μεγέθους Q αφου ορίσουμε πρώτα τον αντίστοιχο τελεστή.

Έστω παρατηρήσιμο μέγεθος Q με φάσμα $\{q_i\}$ και βάση καθοριμένων τιμών q_i τα kets $|q_i\rangle$

Ερώτηση: Ποια είναι η μέση τιμή του παρατηρήσιμού μεγέθους Q σε μια κβαντική κατασταση $|\psi\rangle$ που αναπτυσεται ως:

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i |q_i\rangle$$

Απ: Ορίζουμε τον τελεστή που αντιστοιχεί στο φυσικό μέγεθος Q ως:

$$Q = \sum_i q_i |q_i\rangle\langle q_i|$$

Εύκολα δείχνεται (όπως με την ενέργεια) ότι η ζητούμενη μέση τιμή είναι $\langle Q\rangle=\langle\psi|Q|\psi\rangle$

2b+

Ιδιοκαταστάσεις και Ιδιοτιμές Τελεστή

Οι ιδοκαταστάσεις |r> και οι ιδιοτιμές r (μιγαδικοί αριθμοί) ενος τελεστή R ορίζονται απο την εξίσωση ιδιοτιμών ως

$$R|r\rangle = r|r\rangle$$

Οι ιδιοκαταστάσεις της Hamiltonian είναι οι καταστάσεις καθορισμένης ενέργειας και οι αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι οι αντίστοιχες ενέργειες του φάσματος της ενέργειας.

Απόδειξη:

$$H|E_k\rangle = \sum_i E_i|E_i\rangle\langle E_i|E_k\rangle = E_k|E_k\rangle$$

Αυτό το αποτέλεσμα γενικεύεται και για οποιοδήποτε παρατηρήσιμο μέγεθος Q περα απο την ενέργεια.

2c+

Ερμητειανοί Τελεστές (Hermitean Operators)

Εστω ο τελεστής παρατηρήσιμου μεγέθους Q και ο μιγαδικός αριθμός που προκύπτει ως:

$$\langle\phi|Q|\psi\rangle = \left(\sum_i b_i^* \langle q_i|\right) Q \left(\sum_j a_j |q_j\rangle\right) = \sum_{ij} b_i^* a_j q_j \delta_{ij} = \sum_i b_i^* q_i a_i \quad \text{2d+}$$

$$Q = \sum_i q_i |q_i\rangle\langle q_i|$$

Όμοια δείχνουμε ότι: $\langle\psi|Q|\phi\rangle = \sum_i a_i^* q_i b_i$ 2e+

Αν το φάσμα του Q (τα q_i που είναι και ιδιοτιμές του Q) είναι πραγματικοί αριθμού (αφού είναι πιθανά αποτελέσματα μετρήσεων) τότε θα πρέπει να ισχύει:

$$\boxed{(\langle\phi|Q|\psi\rangle)^* = \langle\psi|Q|\phi\rangle} \quad \text{2f+}$$

Για οποιοδήποτε φυσικό μέγεθος Q οποισδήποτε κβαντικές καταστάσεις |ψ> και |φ>

Ερμητειανοί Τελεστές (Hermitean Operators)

Αν το φάσμα του Q (τα q_i που είναι και ιδιοτιμές του Q) είναι πραγματικοί αριθμού (αφού είναι πιθανά αποτελέσματα μετρήσεων) τότε θα πρέπει να ισχύει:

$$\boxed{(\langle\phi|Q|\psi\rangle)^* = \langle\psi|Q|\phi\rangle}$$

Οι τελεστές που ικανοποιούν την παραπάνω σχέση λέγονται Ερμητειανοί και έχουν πραγματικές ιδιοτιμές. Οι τελεστές που αντιστοιχούν σε φυσικά μεγέθη είναι Ερμητειανοί.

Ιδιότητες Ερμητειανών Τελεστών

Οι ιδιοτιμές ερμητειανών τελεστών είναι πραγματικές και οι ιδιοκαταστάσεις τους που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνιες ($<q_i|q_j>=\delta_{ij}$)

Απόδειξη: Έστω Q ερμητειανός τελεστής με ιδιοτιμές q_i και ιδιοκαταστάσεις $|q_i>$ ($Q\ |q_i>= q_i\ |q_i>$). Τότε δρώντας στην εξίσωση ιδιοτιμών απο αριστερά με το κατάλληλο bra έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}\langle q_k|Q|q_i\rangle &= q_i\langle q_k|q_i\rangle \\ \langle q_i|Q|q_k\rangle &= q_k\langle q_i|q_k\rangle\end{aligned}\right\}$$

$$(< q_i|Q|q_k >)^* =< q_k|Q|q_i >= q_k{}^* < q_k|q_i >$$

αφαίρεση κατά μέλη

2g+

$$\boxed{0 = (q_i - q_k^*)\langle q_k|q_i\rangle}$$

Για i=k ($<q_i|q_i>>0$) και επομένως $q_i = q_i^*$

Για i ≠ k ($q_i \neq q_k^*$) και επομένως $<q_k|q_i>=0$

Ερμητειανή Συζυγία

Έστω τελεστής R που δεν είναι απαραίτητα ερμητειανός. Ορίζουμε τον ερτμητειανό συζηγή του R ($R^\dagger$) απο την σχέση:

$$\left(\langle\phi|R^\dagger|\psi\rangle\right)^* = \langle\psi|R|\phi\rangle$$

Αν ο R είναι ερμητειανός τότε $R=R^\dagger$

Γενικά η μιγαδική συζυγία μετατρέπει τα αντικείμενα ως εξης

Αντικείμενο	i	$\|\psi\rangle$	R	QR	$R\|\psi\rangle$	$\langle\phi\|R\|\psi\rangle$
Ερμητειανό συζυγές	$-\mathrm{i}$	$\langle\psi\|$	$R^\dagger$	$R^\dagger Q^\dagger$	$\langle\psi\|R^\dagger$	$\langle\psi\|R^\dagger\|\phi\rangle$

Θα αποδειχτεί παρακάτω

Στοιχεία Πίνακα Τελεστών

Έστω τελεστής R και βάση |i>. Ορίζουμε τα στοιχεία πίνακα του τελεστή R στη βάση |i> ως:

$$R_{ij} \equiv \langle i|R|j\rangle$$

Τα στοιχεία αυτά αναπαριστουν και καθορίζουν πλήρως την δράση τελεστή R.

Απόδειξη: Η δράση του R σε κατάσταση |ψ> μετασχηματίζει τα πλάτη πιθανότητας του αναπτύγματος της |ψ> σε βάση |i>:

$$|\phi\rangle = \sum_i b_i|i\rangle = R|\psi\rangle = \sum_j a_j R|j\rangle \;\Rightarrow\; b_i = \sum_j a_j \langle i|R|j\rangle = \sum_j R_{ij} a_j$$

$$\langle j|i\rangle = \delta_{ij}$$

2h+

Άρα τα στοιχεία πίνακα R_{ij} καθορίζουν πλήρως το πώς μετασχηματίζονται τα πλάτη a_i στα πλάτη b_i και άρα την πλήρη δράση του R (πολλαπλασιασμός πίνακα επι διάνυσμα στήλη).

Στοιχεία Πίνακα Ερμητειανού Συζηγή Τελεστή

Η ερμητειανή συζυγία μετατρέπει τα στοιχεία πίνακα στα μιγαδικά συζυγή τους και μετατρέπει τις στήλες του πίνακα σε γραμμές και τις γραμμές σε στήλες (ανάστροφή πίνακα).

Αποδειξη: Απο τον ορισμό της εμητειανής συζυγίας τελεστή έχουμε:

$$\left(\langle\phi|R^{\dagger}|\psi\rangle\right)^{*} = \langle\psi|R|\phi\rangle$$

Για <φ|=<i| και |ψ>=|j> παίρνουμε τα στοιχεία πίνακα:

$$(R^{\dagger}_{ij})^{*} = R_{ji} \quad \Leftrightarrow \quad R^{\dagger}_{ij} = R^{*}_{ji}$$

2i+

Άρα ο πίνακας του ερμητειανού συζυγή τελεστή πίνακας είναι μιγαδικός συζυγής και ανάστροφος σε σχέση με τον αρχικό.

Πολάπλασιασμός Τελεστών

Ο πολλαπλασιασμός τελεστων ισοδυναμεί με διαδοχική δράση των τελεστών σε μια κβαντική κατάσταση.

Ο ερμητειανός συζυγής γινομένου τελεστών ισούται με το γινόμεων των συζυγών σε αντεστραμένη σειρά.

Απόδειξη:

$$I = \sum_k |k><k|$$

$$(QR)^\dagger_{ij} = (QR)^*_{ji} = \sum_k Q^*_{jk} R^*_{ki} = \sum_k R^\dagger_{ik} Q^\dagger_{kj} = (R^\dagger Q^\dagger)_{ij}$$

2j+

Με επαγωγή μπορεί να δειχτεί ότι:

$$(ABC\ldots Z)^\dagger = Z^\dagger \ldots C^\dagger B^\dagger A^\dagger$$

2k+

Συναρτήσεις Τελεστών

Ορίζουμε την συνάρτηση ενός τελεστή R f(R) με χρήση των ιδιοτίμών του r_i και των ιδιοκαταστάσεών του $|r_i>$ ως:

$$f(R) \equiv \sum_i f(r_i)|r_i\rangle\langle r_i|$$

Ποιες είναι οι ιδιοκαταστάσεις και οι ιδιοτιμές του τελεστή f(R); 2I+

Μεταθέτης Τελεστών

Ο μεταθέτης δύο τελεστών A, B ορίζεται ως:

$$[A, B] \equiv AB - BA$$

Αν [A,B]≠0 τότε δεν υπαρχει κοινή βάση ιδιοκαταστάσεων των A,B (μπορεί όμως να υπάρχουν μερικές κοινές ιδιοκαταστάσεις)

2m+

Αν [A,B]=0 τότε υπαρχει κοινή βάση ιδιοκαταστάσεων των A,B (μπορεί όμως να υπάρχουν μερικές ιδιοκαταστάσεις που δεν είναι κοινές)

2n+

Ιδιότητες μεταθετών:

$$[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$$

$$AB = BA + [A, B]$$

2o+++

$$[AB, C] = [A, C]B + A[B, C]$$

με επαγωγή

$$[ABC \ldots, Z] = [A, Z]BC \ldots + A[B, Z]C \ldots + AB[C, Z] \ldots$$

Μεταθέτης Τελεστών και Κοινή Βάση

Αν $[A,B]\neq 0$ τότε δεν υπαρχει κοινή βάση ιδιοκαταστάσεων των A,B (μπορεί όμως να υπάρχουν μερικές κοινές ιδιοκαταστάσεις)

Αν $[A,B]=0$ τότε υπαρχει κοινή βάση ιδιοκαταστάσεων των A,B (μπορεί όμως να υπάρχουν μερικές ιδιοκαταστάσεις που δεν είναι κοινές)

Υπόδειξη: Για αυθαίρετη κατάσταση |ψ> και κοινή βάση έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} A|i\rangle &= a_i|i\rangle \\ B|i\rangle &= b_i|i\rangle \\ |\psi\rangle &= \textstyle\sum_i \psi_i|i\rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$[A,B]|\psi\rangle = (AB-BA)\sum_i \psi_i|i\rangle = A\sum_i \psi_i b_i|i\rangle - B\sum_i \psi_i a_i|i\rangle = \sum_i \psi_i(b_i a_i - a_i b_i)|i\rangle$$

Μεταθέτης με συνάρτηση τελεστή

Μια συνάρτηση τελεστή f(B) μπορεί ν' αναπτυχθεί κατα Taylor ως

$$f = f_0 + f'B + \tfrac{1}{2} f'' B^2 + \cdots$$

2p+

όπου: $f_0 \equiv f(0) \qquad f' \equiv (\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x)_0$ είναι μιγαδικοί αριθμοί

Άρα από τις ιδιότητες μεταθετών παίρνουμε:

$$\begin{aligned}[A, f(B)] = & f'(0)[A, B] + \tfrac{1}{2} f''(0)([A, B]B + B[A, B]) \\ & + \tfrac{1}{3!} f'''(0)([A, B]B^2 + B[A, B]B + B^2[A, B]) + \cdots\end{aligned}$$

2q+

Αν [[A,B],B]=0 τότε η παραπάνω σχέση απλοποιήται ως:

$$[A, f(B)] = [A, B](f' + f''B + \tfrac{1}{2} f''' B^2 + \cdots) = [A, B]\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}B}$$

2r+

Σύνοψη

Οι τελεστές δρούν σε kets και τα μετασχηματίζουν.

Σε κάθε παρατηρήσιμο μέγεθος αντιστοιχεί ένας τελεστής.

Η αναμενόμενη τιμή της ενέργειας προκύπτει απο την Hamiltonian ως:

$$\boxed{\langle\psi|H|\psi\rangle = \sum_i E_i|a_i|^2 = \sum_i p_i E_i = \langle E\rangle}$$

όπου:

$$H = \sum_i E_i|E_i\rangle\langle E_i|$$

Η εξίσωση ιδιοτιμών τελεστή R είναι της μορφής $R|r\rangle = r|r\rangle$

Οι ιδιοκαταστάσεις της Hamiltonian είναι οι καταστάσεις καθορισμένης ενέργειας και οι αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι οι αντίστοιχες ενέργειες του φάσματος της ενέργειας.

Οι ερμητειανοί τελεστές ορίζονται απο την σχέση

$$\boxed{(\langle\phi|Q|\psi\rangle)^* = \langle\psi|Q|\phi\rangle}$$

και έχουν πραγματικές ιδιοτιμές και ορθογώνιες ιδιοκαταστάσεις

Τελεστές που μετατίθενται έχουν κοινή βάση ιδιοκαταστάσεων.

Άσκηση 1

1. Αν A και B είναι ερμητιανοί τελεστές δείξτε ότι ο τελεστής i[A,B] είναι ερμητιανός.

Λύση

$$(\mathrm{i}[A,B])^\dagger = [B^\dagger, A^\dagger](-\mathrm{i}) = \mathrm{i}[A,B]$$

Άσκηση 2

2. Δείξτε ότι:

$$(a)\quad [B, A] = -[A, B]$$
$$(b)\quad [A+B, C] = [A, C] + [B, C]$$
$$(c)\quad [A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$

Λύση

$$[B, A] = BA - AB = -(AB - BA) = -[A, B]$$

$$\begin{aligned}[A+B, C] &= (A+B)C - C(A+B) = AC + BC - CA - CB \\ &= (AC - CA) + (BC - CB) = [A, C] + [B, C]\end{aligned}$$

$$[A, BC] = A(BC) - (BC)A = (ABC - BAC) + (BAC - BCA) = [A, B]C + B[A, C]$$

Άσκηση 3

3. Υποθέστε ότι οι τελεστές A και B μετατίθενται με τον μεταθέτη τους δηλ. ότι

$$[B, [A, B]] = [A, [A, B]] = 0$$

Δείξτε ότι: $$[A, B^n] = nB^{n-1}[A, B]$$

Λύση

$$[A, B^n] = AB^n - B^nA = ABB^{n-1} - BAB^{n-1} + B(AB)B^{n-2} - B(BA)B^{n-3} + \cdots + B^{n-1}AB - B^{n-1}BA$$

$$= [A, B]B^{n-1} + B[A, B]B^{n-2} + \cdots + B^{n-1}[A, B]$$

Άρα $$[B, [A, B]] = [A, [A, B]] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$[A, B^n] = B^{n-1}[A, B] + B^{n-1}[A, B] + \cdots + B^{n-1}[A, B] = nB^{n-1}[A, B]$$

Άσκηση 4

4. Αν $|\psi'\rangle = A|\psi\rangle$

Δείξτε ότι: $\langle\psi'| = \langle\psi|A^{\dagger}$

Λύση

Θα δείξουμε ότι για οποιοδήποτε ket |φ> ισχύει $\langle\psi'|\phi\rangle = \langle\psi|A^{\dagger}|\phi\rangle$

$$|\psi'\rangle = A|\psi\rangle$$

$$\left(\langle\phi|R^{\dagger}|\psi\rangle\right)^{*} = \langle\psi|R|\phi\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\psi|A^{\dagger}|\phi\rangle = \langle\phi|A|\psi\rangle^{*} = \langle\phi|\psi'\rangle^{*} = \langle\psi'|\phi\rangle$$

Άρα $\langle\psi|A^{\dagger}|\phi\rangle = \langle\psi'|\phi\rangle$

Άσκηση 5

5. Δείξτε ότι $(a)\ (A^\dagger)^\dagger = A;\ (b)\ (\lambda A)^\dagger = \lambda^* A^\dagger$

Λύση

Απο τον ορισμό του ερμητειανού συζυγή τελεστή έχουμε

$$\langle\psi|(A^\dagger)^\dagger|\phi\rangle = \langle\phi|A^\dagger|\psi\rangle^* = (\langle\psi|A|\phi\rangle^*)^* = \langle\psi|A|\phi\rangle$$

$$\langle\psi|\,(\lambda A)^\dagger|\phi\rangle = \langle\phi|\lambda A|\psi\rangle^* = [\lambda\langle\phi|A|\psi\rangle]^* = \lambda^*\langle\phi|A|\psi\rangle^* = \lambda^*\langle\psi|A^\dagger|\phi\rangle = \langle\psi|\,\lambda^* A^\dagger|\phi\rangle$$

Άσκηση 6

6. Έστω ότι στην βάση {|u_i>} οι πίνακες των τελεστών A, B είναι A_{ij}, B_{ij} ενώ τα πλάτη πιθανότητας για το ket |ψ> και το bra <φ| είναι c_i και b_i^* αντιστοιχα. A. Βρείτε τον πίνακα του τελεστή AB στην παραπάνω βάση. B. Βρείτε τα πλάτη πιθανότητας (αναπαράσταση) για το ket A|ψ>. C. Βρείτε τον μιγαδικό αριθμό <φ|A|ψ>.

Λύση

A. Χρησιμοποιόντας τον ταυτοτικό τελεστή στην συγκεκριμένη βάση έχουμε

$$(AB)_{ij} = \langle u_i | AB | u_j \rangle = \langle u_i | A \mathbf{1} B | u_j \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$(AB)_{ij} = \sum_k \langle u_i | A | u_k \rangle \langle u_k | B | u_j \rangle = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

που ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό πινάκων

Άσκηση 6

6. Έστω ότι στην βάση $\{|u_i\rangle\}$ οι πίνακες των τελεστών A, B είναι A_{ij}, B_{ij} ενώ τα πλάτη πιθανότητας για το ket $|\psi\rangle$ και το bra $\langle\varphi|$ είναι c_i και b_i^* αντιστοιχα. A. Βρείτε τον πίνακα του τελεστή AB στην παραπάνω βάση. B. Βρείτε τα πλάτη πιθανότητας (αναπαράσταση) για το ket $A|\psi\rangle$. C. Βρείτε τον μιγαδικό αριθμό $\langle\varphi|A|\psi\rangle$.

Λύση

B. Το πλάτος πιθανότητας c_i προκύπτει απο το ανάπτυγμα του $A|\psi\rangle$ στην παραπάνω βάση ως $c_i' = \langle u_i|A|\psi\rangle$

Χρησιμοποιόντας τον ταυτοτικό τελεστή έχουμε:

$$c_i' = \langle u_i|A\mathbf{1}|\psi\rangle = \sum_j \langle u_i|A|u_j\rangle\langle u_j|\psi\rangle = \sum_j A_{ij}c_j$$

Άσκηση 6

Β. Το πλάτος πιθανότητας c_i προκύπτει απο το ανάπτυγμα του $A|\psi>$ στην παραπάνω βάση ως $c_i' = \langle u_i|A|\psi\rangle$

Χρησιμοποιώντας τον ταυτοτικό τελεστή έχουμε:

$$c_i' = \langle u_i|A\mathbf{1}|\psi\rangle = \sum_j \langle u_i|A|u_j\rangle\langle u_j|\psi\rangle = \sum_j A_{ij}c_j$$

ή σε μορφή πινάκων:

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \\ \vdots & & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Άσκηση 6

C. Χρησιμοποιώντας και πάλι τον ταυτοτικό τελεστή δύο φορές έχουμε:

$$\langle\phi|A|\psi\rangle = \sum_{i,j} \langle\phi|u_i\rangle\langle u_i|A|u_j\rangle\langle u_j|\psi\rangle = \sum_{i,j} b_i^* A_{ij} c_j$$

ή σε μορφή πινάκων:

$$\langle\phi|A|\psi\rangle = (\, b_1^* \; b_2^* \; \ldots \; b_i^* \; \ldots) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & & & \\ \vdots & & & & \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ij} & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Άσκηση 7

7. Έστω κβαντικό σύστημα με διανυσματικό χώρο καταστασεων δυο διαστάσεων. Έστω δύο βάσεις {|ψ$_i$>} και {|φ$_i$>} (i=1,2) που συνδέονται ως εξής:

$$|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) \qquad |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle)$$

Η αναπαράσταση ενός τελεστή P με μορφή πίνακα στην βάση {|ψ$_i$>} είναι

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

Βρείτε την αναπαράσταση του τελεστή στην άλλη βάση. Δηλ. βρείτε του μιγαδικούς αριθμούς

$$\tilde{a}_{ij} = \langle\phi_i|P|\phi_j\rangle$$

Λύση

$$\tilde{a}_{kl} = \langle\phi_k|P|\phi_l\rangle = \sum_{i,j=1}^{2}\langle\phi_k|\psi_i\rangle\langle\psi_i|P|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\phi_l\rangle = \sum_{i,j=1}^{2}T^{\dagger}_{ki}a_{ij}T_{jl}$$

Άσκηση 7

Λύση

Χρησιμοποιούμε και πάλι τον ταυτοτικό τελεστή της βάσης $|\psi_i>$ και έχουμε

$$\tilde{a}_{kl} = \langle\phi_k|P|\phi_l\rangle = \sum_{i,j=1}^{2}\langle\phi_k|\psi_i\rangle\langle\psi_i|P|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\phi_l\rangle = \sum_{i,j=1}^{2}T^{\dagger}_{ki}a_{ij}T_{jl}$$

Αρκεί να υπολογίσουμε τον πίνακα μετασχηματισμού:

$$T_{ij} = \langle\psi_i|\varphi_j\rangle$$

Έχουμε:

$$T_{11} = \langle\psi_1|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\psi_1|(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$T_{22} = \langle\psi_2|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\psi_2|(|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0-1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

κλπ

Άσκηση 7

και τελικά:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow T^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Άρα :

$$\tilde{a}_{kl} = \langle \phi_k | P | \phi_l \rangle = \sum_{i,j=1}^{2} \langle \phi_k | \psi_i \rangle \langle \psi_i | P | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \phi_l \rangle = \sum_{i,j=1}^{2} T^{\dagger}_{ki} a_{ij} T_{jl}$$

$$\Downarrow$$

$$(\tilde{a}_{kl}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1-\varepsilon \\ 1+\varepsilon & -1+\varepsilon \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2+2\varepsilon & 0 \\ 0 & 2+2\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 0 \\ 0 & 1-\varepsilon \end{pmatrix}$$

Άσκηση 8

8. Δίνεται η Hamiltonian ενος κβαντικού συστήματος με χώρο καταστάσεων τριών διαστάσεων. Α. Βρείτε το ενεργειακό φάσμα.

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Β. Σωμάτιο είναι στην κατάσταση |ψ> με πλάτη πιθανότητας στην δεδομένη βάση:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} i \\ -i \\ i \end{pmatrix}$$

Βρείτε τις αναμενόμενες τιμές $\langle H \rangle$, $\langle H^2 \rangle$ καθώς και την τυπική απόκλιση της Hamiltonian

Λύση

Οι ιδιοτιμές της Hamiltonian βρισκονται λύνοντας την χαρακτηριστική εξίσωση

$$\det(H - \lambda \mathbf{1}) = 0$$

Άσκηση 8

Λύση

Α. Οι ιδιοτιμές της Hamiltonian βρισκονται λύνοντας την χαρακτηριστική εξίσωση

$$\det(H - \lambda \mathbf{1}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = [(2-\lambda)^2 - 1](3-\lambda) = (\lambda^2 - 4\lambda + 3)(3-\lambda)$$

$$= (3-\lambda)^2 (1-\lambda)$$

Άρα οι ιδιοτιμές της H και οι δυνατές τιμές μέτρησης της ενέργειας είναι $E_1=1$, $E_2=3$ και $E_3=3$. Αφού υπάρχουν ίδιες ιδιοτιμές λέμε ότι το φάσμα της ενέργειας είναι εκφυλισμένο.

Άσκηση 8

Β. Για την αναμενόμενη τιμή <H> έχουμε

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(-i \quad i \quad -i)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ -i \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(-i \quad i \quad -i)\begin{pmatrix} i \\ -i \\ 3i \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(1+1+3) = \frac{5}{3}$$

Για την αναμενόμενη τιμή <H^2> έχουμε

$$\langle H^2\rangle = \langle\psi|H^2|\psi\rangle = \frac{1}{3}(-i \quad i \quad -i)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} i \\ -i \\ i \end{pmatrix}$$

Άσκηση 8

Για την αναμενόμενη τιμή $\langle H^2\rangle$ έχουμε

$$\langle H^2\rangle = \langle\psi|H^2|\psi\rangle = \frac{1}{3}(-i \quad i \quad -i)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} i \\ -i \\ i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}(-i \quad i \quad -i)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ -i \\ 3i \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(-i \quad i \quad -i)\begin{pmatrix} i \\ -i \\ 9i \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(1+1+9) = \frac{11}{3}$$

άρα η τυπική απόκλιση είναι:

$$\Delta H = \sqrt{\langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2} = \sqrt{\frac{11}{3} - \frac{25}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Άσκηση 9

9. Ο πινακας ενός τελεστή A που αντιστοιχεί σε παρατηρήσιμο μέγεθος είναι (σε δεδομένη βάση):

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix}$$

Βρείτε το φάσμα του A και τις αντίστοιχες πιθανότητες να μετρηθεί κάθε τιμή του φάσματος αν το σύστημα είναι στην κατάσταση

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Λύση

Βρίσκουμε πρώτα τις ιδιοτιμές του A λύνοντας την χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\det(A - \lambda \mathbf{1}) = (5-\lambda)\,[\,(2-\lambda)^2 - 1\,] = (5-\lambda)\,(3-\lambda)\,(1-\lambda)$$

με λύσεις $a_1 = 1,\ a_2 = 3,$ και $a_3 = 5$

Αυτές είναι οι δυνατές τιμές μέτρησης του παρατηρήσιμου μεγέθους A (φάσμα).

Άσκηση 9

Βρίσκουμε πρώτα τις ιδιοτιμές του A λύνοντας την χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\det(A - \lambda \mathbf{1}) = (5-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] = (5-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)$$

με λύσεις $a_1 = 1,\ a_2 = 3,$ και $a_3 = 5$

Αυτές είναι οι δυνατές τιμές μέτρησης του παρατηρήσιμου μεγέθους A (φάσμα).

Βρίσκουμε τώρα την ιδιοκατάσταση που αντιστοιχεί στην ιδιοτική a_1.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 5\alpha &= \alpha \\ 2\beta + i\gamma &= \beta \\ -i\beta + 2\gamma &= \gamma \end{aligned} \Rightarrow \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

όπου έχουμε επιβάλει και την συνθήκη κανονικοποίησης: $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$

Άσκηση 9

Βρίσκουμε τώρα την ιδιοκατάσταση που αντιστοιχεί στην ιδιοτική a_1.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 5\alpha &= \alpha \\ 2\beta + i\gamma &= \beta \\ -i\beta + 2\gamma &= \gamma \end{aligned} \Rightarrow \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

όπου έχουμε επιβάλει και την συνθήκη κανονικοποίησης: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

όμοια βρίσκουμε για τις άλλες ιδιοτιμές:

$$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \xi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Η πιθανότητα να μετρηθεί η ιδιοτιμή a_1 είναι $P(a_1) = |\langle \xi_1 | \psi \rangle|^2$

Εισάγουμε τον ταυτοτικό τελεστή στην συγκεκριμένη βάση

$$P(a_1) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (0 \;\; 1 \;\; -i) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{4}|-1|^2 = \frac{1}{4}$$

Άσκηση 9

Η πιθανότητα να μετρηθεί η ιδιοτιμή a_1 είναι

$$P(a_i) = \left|\langle \xi_1 | \psi \rangle\right|^2$$

Εισάγουμε τον ταυτοτικό τελεστή στην συγκεκριμένη βάση

$$P(a_1) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{4} |-1|^2 = \frac{1}{4}$$

Όμοια εργαζόμαστε και για τις άλλες δύο ιδιοτιμές του φάσματος:

$$P(a_2) = \frac{1}{4} \left| \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{4}$$

$$P(a_3) = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

όπως αναμέναμε για ορθοκανονικές καταστάσεις η ολική πιθανότητα είναι 1 (σίγουρα θα μετρηθεί μια απο τις ιδιοτιμές του φάσματος

Άλυτες Ασκήσεις

1. Οι καταστάσεις {|1>, |2>} αποτελούν ορθοκανονική βάση. Στην βάση αυτή ο τελεστής σ_y έχει πίνακα:

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

Θα μπορύσε ο σ_y να αντιστοιχεί σε παρατηρήσιμο μέγεθος; Βρείτε τις ιδιοκαταστάσεις και τις ιδιοτιμές του στην συγκεκριμενη βάση. Ποιο είναι το αποτέλεσμα της δράσης του τελεστή στην κατάσταση

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$$

Υπόδειξη:

Ο τελεστής είναι ερμητιανός άρα έχει πραγματικές ιδιοτιμές και θα μπορούσε να αντιστοιχεί σε παρατηρήσιμο μέγεθος.

Οι ιδιοτιμές του είναι 1 και -1 και οι αντίστοιχες ιδιοκατστάσεις είναι:

$$2^{-1/2}(\mathrm{i}, -1) \qquad 2^{-1/2}(\mathrm{i}, 1)$$

$$\sigma_y|\psi\rangle = 2^{-1/2}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Άλυτες Ασκήσεις

2. Οι τελεστές H και B έχουν πίνακες (σε δεδομένη βάση)

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A. Βρείτε αν οι πίνακες είναι ερμητειανοί

B. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τις ιδιοκαταστάσεις τους. Εξηγείστε γιατι δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένες οι ιδιοκαταστάσεις.

C. Δείξτε ότι οι H και B μετατίθενται και βρείτε μια κοινή βάση ιδικαταστάσεων

3. Δείξτε ότι αν οι τελεστές A και B έχουν μια κοινή βάση τότε [A,B]=0

4. Με δεδομένο ότι $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ δείξτε ότι $(ABCD)^\dagger = D^\dagger C^\dagger B^\dagger A^\dagger$

5. Δείξτε ότι $[ABC, D] = AB[C, D] + A[B, D]C + [A, D]BC.$

6. Δείξτε ότι $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$