# Η Αναπαράσταση της Θέσης (Position Representation)

# Δομή Διάλεξης

Το παρατηρήσιμο μέγεθος της 'θεσης' και τα αντίστοιχα πλάτη πιθανότητας (συνεχές φάσμα ιδιοτιμών και ιδιοκαταστάσεων)

Οι τελεστές της θέσης και της ορμής

Η Hamiltonian ενος Σωματίου

Το Νευτώνιο όριο της Κβαντομηχανικής

Ιδιοκαταστάσεις της Ορμής στην αναπαράσταση θέσης

Αρχή Αβεβαιότητας

Σύνοψη

# Κυματοσυνάρτηση σωματίου

Έστω το παρατηρήσιμο μέγεθος της 'θεσης' x ενος σωματίου σε μια διάσταση και |x> οι αντίστοιχες κβαντικές καταστάσεις.

Το φάσμα του παρατηρήσιμου αυτού μεχέθους είναι x (συνεχές) και έστω τα αντιστοιχα πλάτη πιθανότητας για μια κατασταση |ψ> ότι είναι ψ(x}. Τότε αναπτύσουμε την |ψ> στην βάση |x> και έχουμε

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \psi(x)|x\rangle$$

Αντι για άθροισμα έχουμε ολοκλήρωμα λόγω συνεχών τιμών φάσματος

Τα πλάτη ψ(x) αποτελούν την 'κυματοσυνάρτηση' του σωματίου.

Απο ορθγωνιότητα των καταστασεων |x> έχουμε:

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$$ 4a+

και με μιγαδική συζυγία έχουμε: $\psi^*(x) = \langle \psi|x\rangle$

# Ορθογωνιότητα στη βάση |x>

Λόγω συνεχούς φάσματος, η ορθογωνιότητα εκφράζεται με χρήση της συνάρτησης του δέλτα του Dirac και όχι του Kronecker $\delta_{ij}$ .

$$\langle x'|x\rangle = \delta(x - x')$$

Για να εκφράζει αυτή η συνάρτηση την ορθογωνιότητα θα πρέπει η δ(x-x′) να μηδενίζεται για x≠x′ και επίσης να ισχύει:

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \psi(x)|x\rangle \Longrightarrow \langle x'|\psi\rangle = \psi(x') = \int \mathrm{d}x\, \psi(x)\langle x'|x\rangle$$

$$= \int \mathrm{d}x\, \psi(x)\delta(x - x')$$

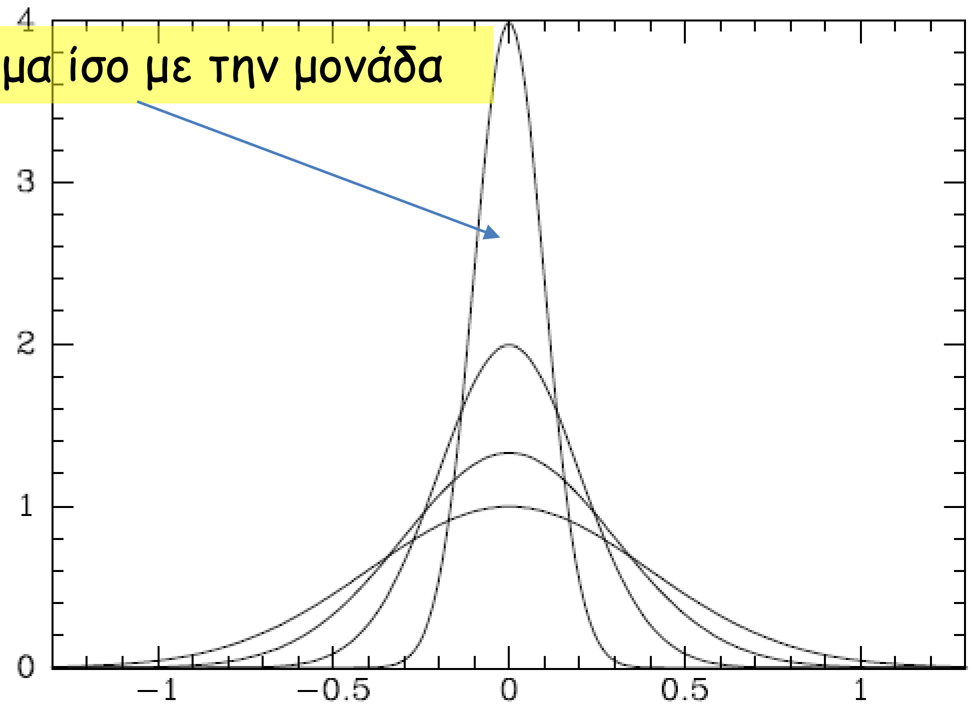
Αφού η δ μηδενίζεται για x≠x μπορούμε να αντικαταστήσουμε το x με x′ στο τελευταίο ολοκλήρωμα και να βγάλουμε το ψ(x′) εξω απο το ολοκλήρωμα. Τότε παίρνουμε:′

$$1 = \int \mathrm{d}x\, \delta(x - x')$$

# Η ποσότητα δ(x)

Η συνάρτηση δ(x) μηδενίζεται παντού εκτός απο το 0 όπου απειρίζεται έτσι ώστε το ολοκληρωμα της να δίνει μόνάδα. Αφού απειρίζεται σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της δεν είναι συνάρτηση. Είναι όριο ενος συνολου συναρτήσεων που συμπεριφέρονται όπως στο σχήμα:

Σταθερό ολοκλήρωμα ίσο με την μονάδα



# Κανονικοποίηση – Ταυτοτικός Τελεστής

Η κανονικοποίση στή βάση |x> εκφράζεται με ολοκλήρωμα και όχι με άθροισμα στις πιθανότητες

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_i |a_i|^2 = \sum_i P_i = 1 \Longrightarrow \int \mathrm{d}x\, |\psi(x)|^2 = 1$$

Η ολική πιθανότητα να βρούμε το σωμάτιο σε κάποια τιμή του x είναι μονάδα.

Ο ταυτοτικός τελεστής στην βάση |x> γράφεται ως: $I = \int \mathrm{d}x\, |x\rangle\langle x|$

Επομένως:

$$I|\psi\rangle = \int \mathrm{d}x\, |x\rangle\langle x|\psi\rangle$$

$$\langle\phi|\psi\rangle = \int \mathrm{d}x\, \langle\phi|x\rangle\langle x|\psi\rangle = \int \mathrm{d}x\, \phi^*(x)\psi(x)$$

# Ο τελεστής της θέσης στην αναπαράσταση της θέσης

Κατ αναλογία με άλλους τελεστές παρατηρήσιμων μεγεθών, ορίζουμε τον τελεστή της θέσης ως:

$$\hat{x} = \int \mathrm{d}x \, x |x\rangle\langle x|$$

Πως μετασχηματίζει ό τελεστής της θέσης ένα ket |ψ> και την αντίστοιχη κυματοσυνάρτηση;

$$|\phi\rangle = \hat{x}|\psi\rangle \quad \Rightarrow \quad \phi(x') = \langle x'|\hat{x}|\psi\rangle = \int \mathrm{d}x \, x \langle x'|x\rangle\langle x|\psi\rangle$$

$$= \int \mathrm{d}x \, x \delta(x - x')\psi(x) = x'\psi(x')$$

Άρα απλά πολλαπλασιάζει την κυματοσυνάρτηση με το όρισμά της.

# Ο τελεστής της ορμής στην αναπαράσταση της θέσης

Απο τον τελεστή της ορμής απαιτούμε να ικανοποιεί το κλασικό όριο δηλαδή:

$$\mathrm{d}\left\langle \hat{x} \right\rangle / \mathrm{d}t \longrightarrow \left\langle \hat{p} \right\rangle / m$$

Θα δείξουμε παρακάτω ότι αυτο ισχύει αν ορίσουμε τον τελεστή της ορμής στην αναπαράσταση της θέσης ως τελεστή παραγώγισης ως προς x:

$$\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = (\hat{p}\psi)(x) = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Ο τελεστής της ορμής είναι ερμητειανός όπως θα έπρεπε ώστε να έχει πραγματικές ιδιοτιμές (πραγματικό φάσμα).

$$\langle\psi|\hat{p}|\phi\rangle = (\langle\phi|\hat{p}|\psi\rangle)^*$$

# Ο τελεστής της ορμής είναι Ερμητειανός

Θα δείξουμε ότι ο τελεστης της ορμής ικανοποιεί την σχέση:

$$\langle\psi|\hat{p}|\phi\rangle = (\langle\phi|\hat{p}|\psi\rangle)^*$$

Απο το ορισμό του τελεστή της ορμής έχουμε:

$$\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = (\hat{p}\psi)(x) = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x} \Rightarrow \langle\psi|\hat{p}|\phi\rangle = -\mathrm{i}\hbar\int \mathrm{d}x\,\psi^*(x)\frac{\partial\phi}{\partial x}.$$

3b+

$$I|\psi\rangle = \int \mathrm{d}x\,|x\rangle\langle x|\psi\rangle$$

$$\langle\psi|\hat{p}|\phi\rangle = -\mathrm{i}\hbar\left(\left[\psi^*\phi\right]_{-\infty}^{\infty} - \int \mathrm{d}x\,\phi(x)\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right) = (\langle\phi|\hat{p}|\psi\rangle)^*$$

3c+

Αφού οι κυματοσυναρτήσεις μηδενίζονται στο άπειρο (κανονικοποιήσιμες)

# Η Hamiltonian σωματίου

Καθοδηγούμενοι απο την Νευτώνια έκφραση για την ενέργεια:

$$E = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + V = \frac{p^2}{2m} + V.$$

Δεδομένου ότι οι ιδιοκαταστάσεις της Hamiltonian είναι καταστάσεις καθορισμένης ενέργειας

Παίρνουμε τον τελεστή της Hamilonian σωματίου σε δυναμικό V(x):

$\hat{p}\hat{p}$

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}).$$

$$\langle x|V(\hat{x})|\psi\rangle = V(x)\psi(x)$$

3d+

$$I|\psi\rangle = \int \mathrm{d}x\, |x\rangle\langle x|\psi\rangle$$

# Ο μεταθέτης θέσης-ορμής

Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση της θέσης και παρεμβάλοντας καταληλα τον ταυτοτικό τελεστή έχουμε:

$$\langle x|[\hat{x},\hat{p}]|\psi\rangle = \langle x|(\hat{x}\hat{p}-\hat{p}\hat{x})|\psi\rangle = -i\hbar\left(x\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial(x\psi)}{\partial x}\right)$$

3e+

$$= i\hbar\langle x|\psi\rangle$$

Άρα αφού η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε κατάσταση |ψ> έχουμε:

$$\boxed{[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar}$$

Κανονική Σχέση Μετάθεσης
Βασική σχέση στην κβαντομηχανική!!

# Σχέση ταχύτητας - ορμής

Θα βρούμε τον ρυθμό μεταβολής της αναμενόμενης τιμής της θέσης (ταχύτητα).

$$\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\langle\psi|[\hat{x},H]|\psi\rangle$$

Πρέπει να βρούμε τον μεταθέτη της θέσης με την Hamiltonian:

$$[\hat{x},H] = \left[\hat{x},\frac{\hat{p}^2}{2m}+V\right] = \frac{[\hat{x},\hat{p}\hat{p}]}{2m} + [\hat{x},V(\hat{x})] = \frac{[\hat{x},\hat{p}]\hat{p}+\hat{p}[\hat{x},\hat{p}]}{2m} = \frac{\mathrm{i}\hbar}{m}\,\hat{p}$$

3f+

$$[AB,C] = [A,C]B + A[B,C]$$

Άρα :

Επιβεβαίωση ορθής επιλογή τελεστή ορμής

$$\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\langle\psi|[\hat{x},H]|\psi\rangle = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{\mathrm{i}\hbar}{m}\langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle = \frac{1}{m}\langle\hat{p}\rangle$$

# Σχέση επιτάχυνσης - δύναμης

Ο ρυθμός μεταβολής της μέσης τιμής της ορμής υπολογίζεται απο το θεώρημα Ehrenfest:

$$\frac{\mathrm{d}\langle\hat{p}\rangle}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\langle[\hat{p},H]\rangle = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\langle[\hat{p},V]\rangle \xrightarrow{3g+} \frac{\mathrm{d}\langle\hat{p}\rangle}{\mathrm{d}t} = -\left\langle\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\hat{x}}\right\rangle$$

$2^{ος}$ Νόμος Νεύτωνα

[A,[A,B]]=0

$$[A,f(B)] = [A,B](f' + f''B + \tfrac{1}{2}f'''B^2 + \cdots) = [A,B]\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}B}$$

Άρα ο συγκεκριμένος ορισμός του τελεστή της ορμής στην αναπαράσταση της θέσης ικανοποιεί τρεις βασικές αρχές: είναι ερμητειανός, σχετίζεται σωστά με την ταχύτητα και είναι συμβατός (στο κλασσικό όριο) με τον $2^{ο}$ Νόμο του Νεύτωνα

Αρχή της αντιστοιχίας: Σε κατάλληλο όριο οι προβλέψεις της κβαντικής μηχανικής συμφωνούν με αυτές της κλασικής μηχανικής.

# Κυματοσυνάρτηση καθορισμένης ορμής

Η κυματοσύνάρτηση <x|p>=$u_p$(x) της κβαντικής κατάστασης καορισμένης ορμής |p> προκύπτει απο την εξίσωση ιδιοτιμών $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$

Η εξίσωση ιδιοτιμών προκύπτει αυτόματα και απο την γενική σχέση μεταξύ τελεστή ορμής και κατάστασης |p> που είναι ∫dp p |p><p| = $\hat{p}$

Η εξίσωση ιδιοτιμών στον χώρο των θέσεων γίνεται:

$$\langle x|\hat{p}|p\rangle = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial u_p}{\partial x} = p\langle x|p\rangle = pu_p(x) \Longrightarrow u_p(x) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar}$$

3h+

Επίπεδο κύμα με μήκος κύματος h/p (μηκος κύματος de Broglie)

Κανονικοποίηση: Απαιτούμε (συνεχές φάσμα): $\langle p'|p\rangle = \delta(p-p')$

$$\delta(p-p') = \int \mathrm{d}x\, \langle p'|x\rangle\langle x|p\rangle = |A|^2\int \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-p')x/\hbar} = 2\pi\hbar|A|^2\delta(p-p')$$

3i+

$$I = \int \mathrm{d}x\, |x\rangle\langle x|$$

# Κυματοσυνάρτηση καθορισμένης ορμής

Κανονικοποίηση: Απαιτούμε (συνεχές φάσμα): $\langle p'|p\rangle = \delta(p-p')$

$$\delta(p-p') = \int \mathrm{d}x\, \langle p'|x\rangle\langle x|p\rangle = |A|^2 \int \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-p')x/\hbar} = 2\pi\hbar|A|^2\delta(p-p')$$

$$I = \int \mathrm{d}x\, |x\rangle\langle x|$$

$$\Downarrow$$

$$|A|^2 = h^{-1}$$

3j+

$$\delta(x-x') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')}$$

$$\left.\begin{aligned} &|A|^2 = h^{-1} \\ &u_p(x) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar} \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_p(x) \equiv \langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{h}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar}$$

# Αβεβαιότητες

Έστω σωμάτιο σε κατάσταση καθορισμένης ορμής |p>. Το πλάτος πιθανότητας να βρεθεί το σωμάτιο σε δεδομένη θέση x στο χώρο είναι:

$$u_p(x) \equiv \langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{h}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar}$$

Η αντίστοιχη πιθανότητα να βρεθεί το σωματιο στην περιοχή του χώρου μεταξύ x και x+dx είναι $|u_p(x)|^2$ dx= dx/h και είναι ανεξάρτητη του x !

Άρα όταν έχουμε πλήρη βεβαιότητα στην μέτρηση της ορμής έχουμε πλήρη αβεβαιότητα στην μέτρηση της θέσης. Η αβεβαιότητα αυτή έχει την ρίζα της στο γεγονός ότι $[x,p]\neq i\hbar$ (κανονικά συζυγή μεγέθη).

# Αβεβαιότητες

Αντίστοιχα, έστω σωμάτιο σε κατάσταση καθορισμένης θέσης |x>. Το πλάτος πιθανότητας να βρεθεί το σωμάτιο με δεδομένη ορμή p είναι:

$$\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{h}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px/\hbar}$$

Η αντίστοιχη πιθανότητα να βρεθεί το σωματιο να έχει ορμή μεταξύ p και p+dp είναι $|u_p(x)^*|^2\, dp = dp/h$ και είναι ανεξάρτητη του p !

Άρα όταν έχουμε πλήρη βεβαιότητα στην μέτρηση της θέσης έχουμε πλήρη αβεβαιότητα στην μέτρηση της ορμής. Η αβεβαιότητα αυτή έχει την ρίζα της στο γεγονός ότι $[x,p]=i\hbar$ (συζυγή μεγέθη).

Οι παραπάνω αβεβαιότητες δεν οφείλονται σε ατελείς μετρήσεις αλλά είναι θεμελιώδης περιορισμός της Φύσης και εκφράζεται ως 'Αρχή Αβεβαιότητας' .

Σε ρεαλιστικά συστήματα ποτέ δεν έχουμε πλήρη γνώση ούτε πλήρη αβεβαιότητα στην μέτρηση παρατηρήσιμων μεγεθών.

# Αβεβαιότητες σε Ρεαλιστικά Συστήματα

Ας θεωρήσουμε σύστημα με πεπερασμένη αβεβαιότητα στην θέση που εκφράζεται απο μια Gaussian κυματοσυνάρτηση:

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\,\mathrm{e}^{-x^2/4\sigma^2}$$

Κανονικοποιημένη και με διασπορά σ (οταν x=σ η πιθανότητα έχει πεσει στο 1/e)

Ποιο είναι το πλάτος πιθανότητας να μετρήθει ορμή p στην συγκεκριμένη κατάσταση;

$$I = \int \mathrm{d}x\,|x\rangle\langle x|$$

$$\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{h}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px/\hbar}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\,\mathrm{e}^{-x^2/4\sigma^2}$$

3k+

$$\Rightarrow \langle p|\psi\rangle = \int \mathrm{d}x\,u_p^*(x)\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{h}(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\int \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px/\hbar}\,\mathrm{e}^{-x^2/4\sigma^2}$$

$$I = \int \mathrm{d}x\,|x\rangle\langle x|$$

# Υπολογισμός Ολοκληρώματος

Έστω το ολοκλήρωμα: $$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-(b^2x^2+ax)}$$

Θέτουμε: $$b^2x^2 + ax = (bx + a/2b)^2 - a^2/4b^2$$

$$z \equiv bx + a/2b$$

$$I = \mathrm{e}^{a^2/4b^2} b^{-1} \int \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{-z^2}$$

$$\sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-(b^2x^2+ax)} = \frac{\sqrt{\pi}}{b}\, \mathrm{e}^{a^2/4b^2}$$

$$a = \mathrm{i}p/\hbar \qquad b = (2\sigma)^{-1}$$

$$\int \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px/\hbar}\, \mathrm{e}^{-x^2/4\sigma^2} = 2\sigma\sqrt{\pi}\;\; \mathrm{e}^{-\sigma^2p^2/\hbar^2}$$

3|+

# Αβεβαιότητες σε Ρεαλιστικά Συστήματα

Ποιο είναι το πλάτος πιθανότητας να μετρήθεί ορμή p στην συγκεκριμένη κατάσταση;

$$I = \int \mathrm{d}x \, |x\rangle\langle x|$$

$$\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{h}} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px/\hbar}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \, \mathrm{e}^{-x^2/4\sigma^2}$$

$$\Rightarrow \langle p|\psi\rangle = \int \mathrm{d}x \, u_p^*(x)\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{h}(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \int \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px/\hbar} \, \mathrm{e}^{-x^2/4\sigma^2}$$

$$I = \int \mathrm{d}x \, |x\rangle\langle x|$$

3m+

$$\int \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px/\hbar} \, \mathrm{e}^{-x^2/4\sigma^2} = 2\sigma\sqrt{\pi} \;\; \mathrm{e}^{-\sigma^2 p^2/\hbar^2} \Rightarrow \langle p|\psi\rangle = \frac{2\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{h}(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \, \mathrm{e}^{-\sigma^2p^2/\hbar^2} = \frac{1}{(2\pi\hbar^2/4\sigma^2)^{1/4}} \, \mathrm{e}^{-\sigma^2p^2/\hbar^2}$$

# Αβεβαιότητες σε Ρεαλιστικά Συστήματα

Μπορούμε να βρούμε τις διασπορές (αβεβαιότητες) των δύο Gaussians $\langle p|\psi\rangle$ και $\langle x|\psi\rangle$

$$\langle p|\psi\rangle = \frac{2\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{h}(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\,\mathrm{e}^{-\sigma^2p^2/\hbar^2} = \frac{1}{(2\pi\hbar^2/4\sigma^2)^{1/4}}\,\mathrm{e}^{-\sigma^2p^2/\hbar^2}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\,\mathrm{e}^{-x^2/4\sigma^2}$$

Για τα πλάτη μέτρησης θέσης $\langle x|\psi\rangle$ έχουμε $\sigma_x=\sigma$, ενώ για τα πλάτη μέτρησης ορμής $\langle p|\psi\rangle$ έχουμε $\sigma_p=\hbar/(2\sigma)$.

Άρα το γινόμενο των δύο αβεβαιοτήτων είναι $\sigma_x\,\sigma_p = \hbar/2$

Αρχή Αβεβαιότητας: Πρέπει να υπερτεθεί μεγάλο εύρος ορμών για 'κτιστεί' κυματοσυνάρτηση ψ(x) με μικρό εύρος στα x.

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \int dp\,\langle x|p\rangle\langle p|\psi\rangle$$

Μικρό εύρος x

Μεγάλο εύρος p

# Αβεβαιότητες σε Ρεαλιστικά Συστήματα

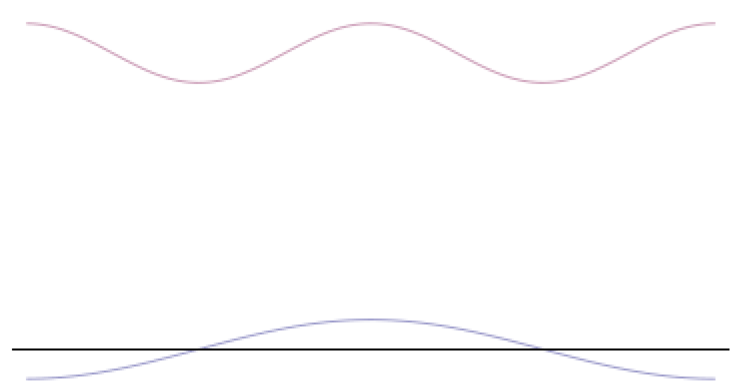
Άρα το γινόμενο των δύο αβεβαιοτήτων είναι $\sigma_x \sigma_p = \hbar/2$

Αρχή Αβεβαιότητας: Πρέπει να υπρετεθεί μεγάλο εύρος ορμών για 'κτιστεί' κυματοσυνάρτηση ψ(x) με μικρό εύρος στα x.

ψ(x)= $< x|\psi > = \int dp < x|p >< p|\psi >$

Μικρό εύρος x

Μεγάλο εύρος p



# Αβεβαιότητα και μεταθέτης

Δύο μη μετατιθέμενα μεγέθη δεν έχουν καμμιά κοινή ιδιοκατάσταση. Άρα δεν είναι δυνατόν να γνωρίζουμε ταυτόχρονα με σιγουριά την τιμή τους

Απόδειξη:

Έστω $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$

Τότε $[\hat{x}, \hat{p}]|\psi\rangle = i\hbar|\psi\rangle$

Αν η |ψ> ήταν ιδιοκατάσταση των x και p τότε θα είχαμε

$$(\hat{x} - x_0\hat{I}) \cdot \hat{p}\,|\psi\rangle = (\hat{x} - x_0\hat{I}) \cdot p_0\,|\psi\rangle = (x_0\hat{I} - x_0\hat{I}) \cdot p_0\,|\psi\rangle = 0$$

3η+

Άρα καταλήγουμε σε άτοπο!

# Σύνοψη

Η κυματοσυνάρτηση σωματίου είναι το πλάτος πιθανότητας να βρεθεί το σωμάτιο σε θέση x στο χώρο. $|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \psi(x)|x\rangle$

Το παρατηρήσιμο μέγεθος της θέσης έχει συνεχές φάσμα και οι αντίστοιχες καταστάσεις |x> είναι ορθοκανονικές με την έννοια της δ συνάρτησης. $\langle x'|x\rangle = \delta(x - x')$

Ο τελεστής της ορμής μπορεί να οριστεί ως: $\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = (\hat{p}\psi)(x) = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}$

Ικανοποιεί την σχέση μετάθεσης: $\boxed{[\hat{x}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar}$

Ο συγκεκριμένος ορισμός του τελεστή της ορμής στην αναπαράσταση της θέσης ικανοποιεί τρεις βασικές αρχές: είναι ερμητειανός, σχετίζεται σωστά με την ταχύτητα και είναι συμβατός (στο κλασσικό όριο) με τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα

Παρατηρήσιμα μεγέθη που οι τελεστές τους δεν μετατιθενται δεν μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα με αυθαίρετη ακρίβεια (Αρχή Αβεβαιότητας).

# Άσκηση 1

Σωμάτιο περιγράφεται απο την κυματοσυνάρτηση: $\psi(x) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{-1/4} e^{-ax^2/2}$

Υπολογίστε τις τυπικές αποκλίσεις Δx και Δp και επαλήθεύστε ότι είναι συμβατές με την αρχή της αβεβαιότητας.

Λύση

Πρώτα υπολογίζουμε την αναμενόμενη τιμή του x (<x>):

$$\langle x\rangle = \langle\psi|x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi(x)|^2\,dx = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-ax^2}\,dx = 0$$

Υπολογίζουμε την αναμενόμενη τιμή του $x^2$ (<$x^2$>):

3ο+

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2|\psi(x)|^2\,dx = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-ax^2}\,dx = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_{0}^{\infty} x^2e^{-ax^2}\,dx = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}}\frac{\Gamma(1/2)}{2a^{3/2}} = \frac{1}{2a}$$

# Άσκηση 1

Υπολογίζουμε την αναμενόμενη τιμή του $x^2$ ($\langle x^2 \rangle$):

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2|\psi(x)|^2\,dx = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}\,dx = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}\,dx = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}}\frac{\Gamma(1/2)}{2a^{3/2}} = \frac{1}{2a}$$

Άρα η τυπική απόκλιση του x είναι:

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{2a}}$$

Για την τυπική απόκλιση του p θα βρούμε πρώτα την κατάσταση στην αναπαράσταση της ορμής ($\langle p|\psi\rangle=\psi(p)$)

Εισάγουμε τον ταυτοτικό τελεστή απο την βάση της θέσης $\int dx\, |x\rangle\langle x|$ και χρησιμοποιόντας τις ιδιοκαταστάσεις της ορμής στον χώρο των θέσεων έχουμε:

$$\bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar}\psi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{-1/4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar}e^{-ax^2/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{-1/4}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{-p^2/2a\hbar^2}$$

3p+

# Άσκηση 1

Εισάγουμε τον ταυτοτικό τελεστή απο την βάση της θέσης ∫dx |x><x| και χρησιμοποιόντας τις ιδιοκαταστάσεις της ορμής στον χώρο των θέσεων έχουμε:

$$\bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar}\psi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{-1/4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar}e^{-ax^2/2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{-1/4}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{-p^2/2a\hbar^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\left(\frac{1}{\pi a}\right)^{1/4}e^{-p^2/2a\hbar^2}$$

Η $|\psi(p)|^2$ p είναι περιττή συνάρτηση και επομένως <p>=0.
Για την $\langle p^2\rangle$ βρίσκουμε

$$\langle p^2\rangle = \frac{1}{\hbar}\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_{-\infty}^{\infty} p^2 e^{-p^2/a\hbar^2}\,dp = \frac{2}{\hbar\sqrt{a\pi}}\int_{0}^{\infty} p^2 e^{-p^2/a\hbar^2}\,dp = \frac{2}{\hbar\sqrt{\pi a}}\frac{\sqrt{\pi}/2}{2(1/a\hbar^2)^{3/2}} = \frac{a\hbar^2}{2}$$

Άρα: $\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = \sqrt{\frac{a}{2}}\hbar$

3q+

# Άσκηση 1

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{2a}}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = \sqrt{\frac{a}{2}}\hbar$$

$$\Rightarrow \quad \Delta x\, \Delta p = \hbar/2$$

Αρχή Αβεβαιότητας:
Όσο μειώνουμε την διασπορά στο x, τόσο αυξάνουμε την διασπορά στο p.

# Άσκηση 2

Βρείτε την μέση τιμή του τελεστή $A = |\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|$

Λύση $\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\psi|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|\psi\rangle = \psi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$

Βρείτε το μιγαδικό διάνυσμα $\langle\mathbf{r}|\mathbf{p}|\psi\rangle$ συναρτήσει της κυματοσυνάρτησης

Λύση

Για την x συνιστώσα έχουμε: $\langle\mathbf{r}|\mathbf{p}|\psi\rangle_x = \langle\mathbf{r}|p_x|\psi\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial x}$

Όμοια για τις άλλες δύο συνιστώσες

3r+

Επομένως: $\langle\mathbf{r}|\mathbf{p}|\psi\rangle_x = \left[\frac{\hbar}{i}\nabla\psi(\mathbf{r})\right]_x \Rightarrow \langle\mathbf{r}|\mathbf{p}|\psi\rangle = \frac{\hbar}{i}\nabla\psi$

# Άσκηση 3

Βρείτε την μέση τιμή του τελεστή $k_{\mathbf{r}} = [\,|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|\mathbf{p} + \mathbf{p}|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|\,] / 2m$

Λύση

$$\langle\psi|k_{\mathbf{r}}|\psi\rangle = \frac{1}{2m}[\,\langle\psi|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|\mathbf{p}|\psi\rangle + \langle\psi|\mathbf{p}|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|\psi\rangle\,]$$

$$= \frac{1}{2m}\left[\psi^*(\mathbf{r})\frac{\hbar}{i}\nabla\psi(\mathbf{r}) - \frac{\hbar}{i}\nabla\psi^*(\mathbf{r})\,\psi(\mathbf{r})\right]$$

3s+

$$= \frac{1}{m}\,\mathrm{Re}\left[\psi^*\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\psi\right)\right]$$

Αφού $p^\dagger = p$

$$<\psi|p|r> = <\psi|p^\dagger|r> = (<r|\mathrm{p}|\psi>)^* = -\frac{\hbar}{i}\nabla\psi^*(\mathbf{r})\,\psi(\mathbf{r})$$

# Άσκηση 4α

Ο τελεστής της parity ορίζεται απο την σχέση $\pi|\mathbf{r}\rangle = |-\mathbf{r}\rangle$

Βρείτε την κυπατοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην κατάσταση $\pi|\psi\rangle$

Λύση

Αναπτύσουμε την |ψ> στην βάση της θέσης $|\psi\rangle = \int \psi(\mathbf{r})|\mathbf{r}\rangle \, d^3r$

Τώρα μπορούμε να δράσουμε με τον τελεστή της parity:

$$\pi|\psi\rangle = \int \psi(\mathbf{r}) \, [\pi|\mathbf{r}\rangle] \, d^3r = \int \psi(\mathbf{r})|-\mathbf{r}\rangle d^3r$$

Αλλάζουμε μεταβλητή ολοκλήρωσης: $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$.

Δρώντας απο αριστερά με <r| έχουμε:

$$\langle \mathbf{r}|\pi|\psi\rangle = \int \psi(-\mathbf{r}')\langle \mathbf{r}|\mathbf{r}'\rangle \, d^3r' = \int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\psi(-\mathbf{r}') \, d^3r' = \psi(-\mathbf{r})$$

# Άσκηση 4β

Δείξτε ότι ο τελεστής της parity είναι ερμητειανός

Λύση

$$\langle \mathbf{r}|\pi|\psi\rangle = \int \psi(-\mathbf{r}')\langle \mathbf{r}|\mathbf{r}'\rangle \, d^3r' = \int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\psi(-\mathbf{r}') \, d^3r' = \psi(-\mathbf{r})$$

$$\langle \mathbf{r}|\pi|\psi\rangle = \langle -\mathbf{r}|\psi\rangle \Rightarrow \langle \mathbf{r}|\pi = \langle -\mathbf{r}|$$

$$\pi|\mathbf{r}\rangle = |-\mathbf{r}\rangle \Rightarrow \langle \mathbf{r}|\pi^\dagger = \langle -\mathbf{r}|.$$

$$\Rightarrow \pi=\pi^\dagger$$

Βρείτε τον τελεστή $\pi^2$ :

$$\pi^2|\mathbf{r}\rangle = \pi\pi|\mathbf{r}\rangle = \pi|-\mathbf{r}\rangle = |\mathbf{r}\rangle \Rightarrow \pi^2 = 1$$

ισχύει για κάθε |r>
(βάση)

# Άσκηση 4γ

Βρείτε τις ιδιοτιμές του τελεστή π

Λύση

Έστω φ ιδιοκατάσταση του π με ιδιοτιμή p. Τότε έχουμε:

$$\pi|\phi\rangle = p|\phi\rangle \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi^2|\phi\rangle = \pi(p|\phi\rangle) = p\pi|\phi\rangle = p^2|\phi\rangle \\ \pi^2|\phi\rangle = \mathbf{1}|\phi\rangle = |\phi\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow p^2 = 1 \Rightarrow$$

p=±1

ο π είναι ερμητειανός άρα η p είναι πραγματική.

3t+

# Άσκηση 4δ

Έστω οι τελεστές: $p_+ = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \pi)$ $p_- = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \pi)$

Δείξτε ότι οι ιδιοκαταστάσεις της π γράφονται ως:

$|\psi_+\rangle = p_+|\psi\rangle$ $|\psi_-\rangle = p_-|\psi\rangle$

όπου |ψ> αυθαίρετη κβαντική κατάσταση.

Βρείτε τις αντίστοιχες κυμαοσυναρτήσεις.

Λύση

$$\pi|\psi_+\rangle = \pi p_+|\psi\rangle = \frac{1}{2}\pi(\mathbf{1} + \pi)|\psi\rangle = \frac{1}{2}(\pi + \pi^2)|\psi\rangle = \frac{1}{2}(\pi + \mathbf{1})|\psi\rangle = p_+|\psi\rangle = |\psi_+\rangle$$

Άρα η $\psi_+$ είναι ιδιοκατάσταση του π με ιδιοτιμή 1.

Όμοια δείχνουμε ότι η $\psi_-$ είναι ιδιοκατάσταση του π με ιδιοτιμή -1.

3u+

# Άσκηση 4δ

Έστω οι τελεστές: $p_+ = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \pi) \quad p_- = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \pi)$

Δείξτε ότι οι ιδιοκαταστάσεις της π γράφονται ως:

$|\psi_+\rangle = p_+|\psi\rangle \qquad |\psi_-\rangle = p_-|\psi\rangle$

όπου |ψ> αυθαίρετη κβαντική κατάσταση.

Βρείτε τις αντίστοιχες κυμαοσυναρτήσεις.

Λύση

Στην 4α δείξαμε ότι: $\langle \mathbf{r}|\pi|\psi_+\rangle = \psi_+(-\mathbf{r})$

$$\left.\begin{aligned} \langle \mathbf{r}|\pi|\psi_+\rangle &= \psi_+(-\mathbf{r}) \\ \langle \mathbf{r}|\pi|\psi_+\rangle = \langle \mathbf{r}|\psi_+\rangle &= \psi_+(+\mathbf{r}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \psi_+(-\mathbf{r}) = \psi_+(+\mathbf{r})$$

Άρα οι ιδιοκαταστάσεις του π με ιδιοτιμή 1 αντιστοιχούν σε άρτιες κυματοσυναρτήσεις.

# Άσκηση 4δ

$$\langle \mathbf{r}|\pi|\psi_+\rangle = \psi_+(-\mathbf{r})$$

$$\langle \mathbf{r}|\pi|\psi_+\rangle = \langle \mathbf{r}|\psi_+\rangle = \psi_+(+\mathbf{r})$$

$$\Rightarrow \quad \psi_+(-\mathbf{r}) = \psi_+(+\mathbf{r})$$

Άρα οι ιδιοκαταστάσεις του π με ιδιοτιμή 1 αντιστοιχούν σε άρτιες κυματοσυναρτήσεις.

Όμοια δείχνουμε ότι οι ιδιοκαταστάσεις του π με ιδιοτιμή -1 αντιστοιχούν σε περιττές κυματοσυναρτήσεις.

3ν+

# Άσκηση 5

Έστω ψ(x,t) κανονικοποιημένη κυματοσυνάρτηση σωματίου με δυναμική ενέργεια V(x) και μάζα m. Γράψτε εκφράσεις για την αναμενόμενη τιμή του x, του $p_x$ (ορμή), του $x^2$, του $p_x^2$ και της ενέργειας.

Ποιά είναι η πιθανότητα να βρεθεί το σωμάτιο μεταξύ των σημείων $x_1$ και $x_2$ ;

Λύση

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x|\psi|^2 \qquad \langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x^2|\psi|^2 \qquad \langle p\rangle = -\mathrm{i}\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \psi^* \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}$$

$$\langle p^2\rangle = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \psi^* \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} \qquad \langle E\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \psi^* \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\psi\right)$$

$$P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, |\psi|^2$$

3w+

# Άλυτες Ασκήσεις

1. Σωμάτιο κινείται σε δυναμικό V(x) και έχει ενέργεια En. Μπορεί να έχει καθορισμένη ορμή για κάποιο δυναμικό V(x); Μπορεί να έχει καθορισμένη ορμή και καθορισμένη θέση ταυτόχρονα; Υπόδειξη: Θυμηθείτε (και δείξτε) την μορφή των κυματοσυναρτήσεων που είναι ιδιοκαταστάεις της θέσης και της ορμής. Συμπίπτουν οι μορφές τους;

2. Έστω μια κανονικοποιημένη κυματοσυνάρηση ψ(x) και ένας τελεστής Q στον χώρο των θέσεων. Έστω $\{q_r\}$ το φασμα του Q και {ur(x)} οι αντίστοιχες κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις. Γράψτε μια έκφραση στον χώρο των θέσεων για την πιθανότητα να δώσει μια μέτρηση του Q την τιμή $q_r$. Μετά δείξτε ότι η αναμενόμενη τιμή του Q μπορεί να γραφεί ως $\langle Q \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{Q} \psi \, \mathrm{d}x$