Μετασχηματισμοί Καταστάσεων και Τελεστών

Δομή Διάλεξης

Μετασχηματισμοί Καταστάσεων

Τελεστής Μετατόπισης

Συνεχείς Μετασχηματισμοί και οι Γεννήτορές τους

Τελεστής Στροφής

Διακριτοί Μετασχηματισμοί: Parity

Μετασχηματισμοί Τελεστών

Συμμετρίες και Νόμοι Διατήρησης

Εικόνα Heisenberg

Σύνοψη

Μετασχηματισμοί Καταστάσεων

Ε: Πώς μετασχηματίζεται η κατάσταση (ket) ενός κβαντικού συστήματος όταν το σύστημα μετακινείται ή περιστρέφεται στον φυσικό χώρο;

Έστω το πλάτος πιθανότητας να βρεθεί κβαντικό σύστημα με κέντρο μάζας στην θέση **x** (διάνυσμα) και με προσανατολισμό στην διεύθυνση μ:

$$\psi_\mu(\mathbf{x}) \equiv \langle \mathbf{x}, \mu | \psi \rangle$$

$|\mathbf{x}, \mu\rangle$ → Πλήρες σετ καταστάσεων

Με ανάπτυγμα Taylor παίρνουμε το αντίστοιχο πλάτος στην θέση **x-a** (διάνυσμα)

$$\psi_\mu(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = \left[1 - \mathbf{a}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{2!}\left(\mathbf{a}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^2 - \ldots\right]\psi_\mu(\mathbf{x})$$

$$= \exp\left(-\mathbf{a}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\psi_\mu(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mu | \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}}{\hbar}\right)|\psi\rangle$$

7a+

$$\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = (\hat{p}\psi)(x) = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

από τον ορισμό του τελεστή της ορμής

Μετατόπιση στο χώρο

Με ανάπτυγμα Taylor παίρνουμε το αντίστοιχο πλάτος στην θέση **x-a** (διάνυσμα)

$$\psi_\mu(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = \left[1 - \mathbf{a}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} + \frac{1}{2!}\left(\mathbf{a}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)^2 - \ldots\right]\psi_\mu(\mathbf{x})$$

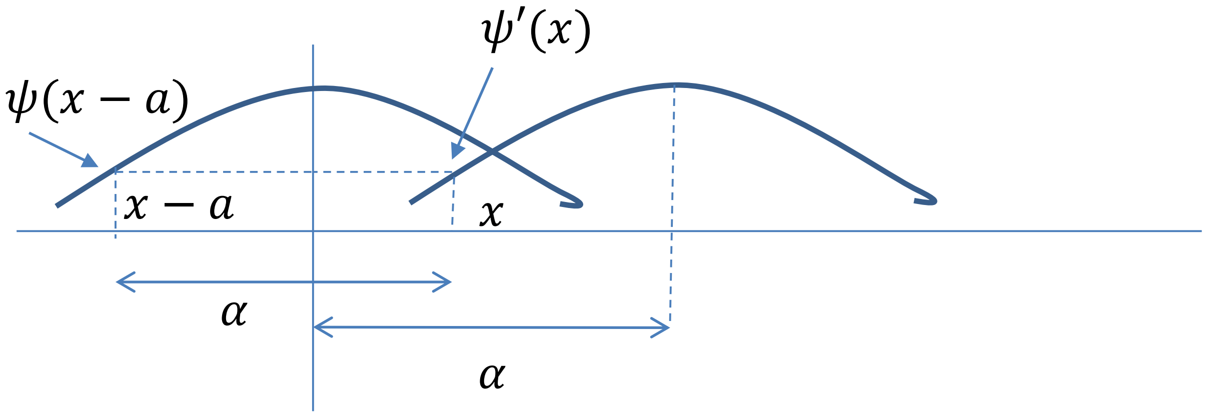
$$= \exp\left(-\mathbf{a}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)\psi_\mu(\mathbf{x}) \quad = \langle\mathbf{x},\mu|\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}}{\hbar}\right)|\psi\rangle$$

Ορίζουμε την κατάσταση |ψ'> ως $|\psi'\rangle \equiv U(\mathbf{a})|\psi\rangle$

όπου: $U(\mathbf{a}) \equiv \exp(-\mathrm{i}\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}/\hbar)$

Ισχύει ότι <x-a|ψ>=<x|ψ'>. Άρα στην κατάσταση |ψ>, το πλάτος πιθανότητας να βρούμε το σύστημα στην θέση x-a είναι το ίδιο με το πλάτος πιθανότητας να βρούμε το σύστημα στην θέση x όταν αυτό είναι στην κατάσταση |ψ'>.

Μετατόπιση στο χώρο



Ορίζουμε την κατάσταση |ψ'> ως

$$|\psi'\rangle \equiv U(\mathbf{a})|\psi\rangle$$

όπου:

$$U(\mathbf{a}) \equiv \exp(-i\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}/\hbar)$$

Ισχύει ότι <x-a|ψ>=<x|ψ'>. Άρα στην κατάσταση |ψ>, το πλάτος πιθανότητας να βρούμε το σύστημα στην θέση x-a είναι το ίδιο με το πλάτος πιθανότητας να βρούμε το σύστημα στην θέση x όταν αυτό είναι στην κατάσταση |ψ'>.

Η μετατόπιση στον χώρο των θέσεων είναι ισοδύναμη με ένα μετασχηματισμό στον χώρο των καταστάσεων.

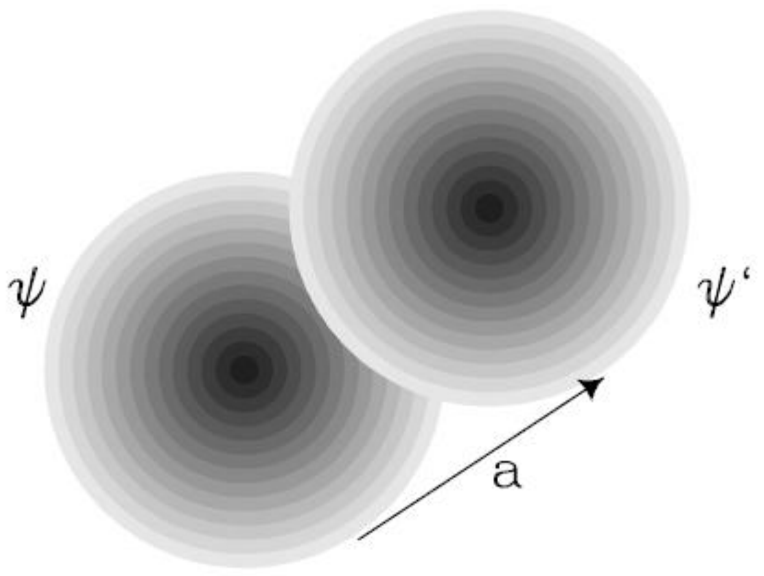
Μετατόπιση στο χώρο <-> Μετασχηματισμός Κατάστασης

Η μετατόπιση στον χώρο των θέσεων είναι ισοδύναμη με ένα μετασχηματισμό στον χώρο των καταστάσεων.

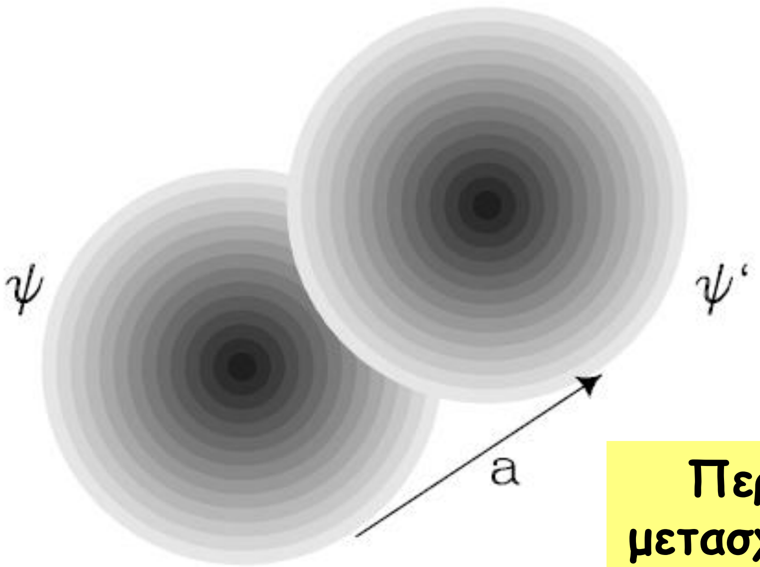
$$\psi_\mu(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = \langle \mathbf{x},\mu|U(\mathbf{a})|\psi\rangle = \langle \mathbf{x},\mu|\psi'\rangle = \psi'_\mu(\mathbf{x})$$

Η κατάσταση |ψ'> περιγράφει το μετατοπισμένο σύστημα

Ο τελεστής U(a) είναι ο τελεστής μετατόπισης



Μετατόπιση στο χώρο <-> Μετασχηματισμός Κατάστασης



Ο τελεστής U(a) είναι ο τελεστής μετατόπισης

ψ(x–a)=ψ'(x)

Περιγραφή 1 (ενεργητική): Ο τελεστής U(a) μετασχηματίζει την κατάσταση του συστήματος σε μια κατάσταση όπου το σύστημα έχει μετατοπιστεί στον χώρο κατά α.

Περιγραφή 2 (παθητική): Ο τελεστής U(a) μετασχηματίζει το σύστημα συν/νων όπου περιγράφεται το σύστημα μετατοπίζοντας την αρχή του κατά –α.

$$\psi_\mu(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = \langle \mathbf{x},\mu|U(\mathbf{a})|\psi\rangle = \langle \mathbf{x},\mu|\psi'\rangle = \psi'_\mu(\mathbf{x})$$

Δράση του Τελεστή Μετατόπισης στο ket |x,μ>

Θα δούμε πως δρα ο τελεστής μετατόπισης U(a)

$$U(\mathbf{a}) \equiv \exp(-\mathrm{i}\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}/\hbar)$$

στις ιδιοκαταστάσεις της θέσης |x,μ>

Αναπτύσσουμε στις ιδιοκαταστάσεις της ορμής:

$$|\mathbf{x}_0,\mu\rangle = \int \mathrm{d}^3\mathbf{p}\,|\mathbf{p},\mu\rangle\langle\mathbf{p},\mu|\mathbf{x}_0,\mu\rangle = \frac{1}{h^{3/2}}\int \mathrm{d}^3\mathbf{p}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{x}_0\cdot\mathbf{p}/\hbar}|\mathbf{p},\mu\rangle$$

$$\langle\mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle = \frac{1}{h^{3/2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}/\hbar}$$

Τώρα μπορούμε πιο εύκολα να δράσουμε με τον τελεστή της μετατόπισης:

$$U(\mathbf{a})|\mathbf{x}_0,\mu\rangle = \frac{1}{h^{3/2}}\int \mathrm{d}^3\mathbf{p}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{x}_0\cdot\mathbf{p}/\hbar}\,U(\mathbf{a})|\mathbf{p},\mu\rangle = \frac{1}{h^{3/2}}\int \mathrm{d}^3\mathbf{p}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{x}_0+\mathbf{a})\cdot\mathbf{p}/\hbar}\,|\mathbf{p},\mu\rangle$$

$$= |\mathbf{x}_0+\mathbf{a},\mu\rangle$$

που είναι το αναμενόμενο αποτέλεσμα

Μοναδιακοί Τελεστές Μετασχηματισμών

Ο τελεστές μετασχηματισμών (μετατόπιση στον χώρο, στον χρόνο, περιστροφή κλπ) θα πρέπει να διατηρούν την κανονικοποίηση:

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \longrightarrow 1 = \langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle \Longrightarrow U^\dagger U = I \Longrightarrow U^\dagger = U^{-1}$$

Οι τελεστές μετασχηματισμών είναι μοναδιακοί (unitary)

Γιατί ισχύει αυτό;

Απόδειξη:

$$\langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\psi|B|\psi\rangle \xrightarrow{|\psi\rangle = |\phi\rangle + \lambda|\chi\rangle} \lambda\left(\langle\phi|A|\chi\rangle - \langle\phi|B|\chi\rangle\right) = \lambda^*\left(\langle\chi|B|\phi\rangle - \langle\chi|A|\phi\rangle\right)$$

$\lambda \neq \lambda^*$

λ αυθαίρετο

7b+

$$\langle\chi|A|\phi\rangle = \langle\chi|B|\phi\rangle \Rightarrow A = B$$

|φ>, |χ> αυθαίρετα

Μοναδικοί Τελεστές Μετασχηματισμών

Ο τελεστές μετασχηματισμών (μετατόπιση στον χώρο, στον χρόνο, περιστροφή κλπ) θα πρέπει να διατηρούν την κανονικοποίηση:

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \longrightarrow 1 = \langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle \Longrightarrow U^\dagger U = I \Longrightarrow U^\dagger = U^{-1}$$

Οι τελεστές μετασχηματισμών είναι μοναδιακοί (unitary)

Οι τελεστές μετασχηματισμών αφήνουν αναλλοίωτα τα πλάτη πιθανότητας

$$\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle$$

7c+

Απειροστοί Μετασχηματισμοί

Έστω απειροστός (πολύ μικρός) μετασχηματισμός που παραμετροποιήται από παράμετρο δθ:

$$U(\delta\theta) = I - \mathrm{i}\delta\theta\,\tau + \mathrm{O}(\delta\theta)^2$$

τελεστής τ: Γεννήτορας

Για μηδενική τιμή της παραμέτρου ο μετασχηματισμός ανάγεται σε ταυτοτικό τελεστή.

Για να είναι ο τελεστής μετασχηματισμού μοναδιακός (unitary) θα πρέπει να είναι ο γεννήτοράς του ερμητειανός:

$$I = U^\dagger(\delta\theta)U(\delta\theta) = I + \mathrm{i}\delta\theta\,(\tau^\dagger - \tau) + \mathrm{O}(\delta\theta^2) \Longrightarrow \tau^\dagger = \tau$$

7d+

Άρα ο γεννήτορας (generator) του μοναδιακού μετασχηματισμού είναι παρατηρήσιμο μέγεθος.

Ιδιότητες Γεννητόρων Μετασχηματισμών

Έστω απειροστά μετασχηματισμένη κατάσταση: $|\psi'\rangle \equiv U(\delta\theta)|\psi\rangle$

$$|\psi'\rangle \equiv U(\delta\theta)|\psi\rangle \xrightarrow[\quad]{\frac{|\psi'>-|\psi>}{-i\delta\theta} \qquad \delta\theta \to 0} \quad \mathrm{i}\frac{\partial|\psi'\rangle}{\partial\theta} = \tau|\psi'\rangle$$

7e+

$$U(\delta\theta) = I - \mathrm{i}\delta\theta\,\tau + \mathrm{O}(\delta\theta)^2$$

$$|\psi'> \xrightarrow{\delta\theta\to 0} |\psi>$$

Ο γεννήτορας του μετασχηματισμού δίνει τον ρυθμό μεταβολής της κατάστασης καθώς αυξάνουμε την παράμετρο θ.

Παράδειγμα:

Για τον μετασχηματισμό μετατόπισης έχουμε δείξει ότι:

$$\psi_\mu(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = \langle \mathbf{x},\mu|U(\mathbf{a})|\psi\rangle = \langle \mathbf{x},\mu|\psi'\rangle = \psi'_\mu(\mathbf{x})$$

Άρα: 7f+ $\mathrm{i}\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial a_x} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial x} = p_x|\psi\rangle$

Ο γεννήτορας της μετατόπισης είναι η ορμή/ħ !

Ιδιότητες Γεννητόρων Μετασχηματισμών II

Έστω εφαρμογή απειροστού μετασχηματισμού N φορές:

7g+

$$U(\delta\theta) = I - \mathrm{i}\delta\theta\,\tau \xrightarrow[\delta\theta = \theta/N]{N\to\infty} U(\theta) \equiv \lim_{N\to\infty}\left(1 - \mathrm{i}\frac{\theta}{N}\tau\right)^N = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta\tau}$$

Άρα από τους γεννήτορες προκύπτουν και οι πεπερασμένοι μετασχηματισμοί (όχι μόνο οι απειροστοί)

Μετασχηματισμοί Στροφών στο Χώρο

Για μετατοπίσεις στον χώρο έχουμε τρείς παραμέτρους (συν/νες μετατόπισης) και τρεις γεννήτορες (συνιστώσες ορμής).

Για μετασχηματισμούς στροφών στο χώρο θέλουμε τρείς παραμέτρους (δυο για προσανατολισμό άξονα περιστροφής και μία για γωνία περιστροφής γύρω από τον δεδομένο άξονα). Άρα θέλουμε και τρεις γεννήτορες.

$$U(\boldsymbol{\alpha}) = \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{J})$$

Διάνυσμα άξονα περιστροφής (το μέτρο του είναι το μέτρο της γωνίας περιστροφής)

Συνιστώσες ερμητειανού τελεστή γεννήτορα στροφών: Τελεστής Στροφορμής

7h+

Για τον ρυθμό μεταβολής της μετασχηματισμένης κατάστασης έχουμε:

$$\mathrm{i}\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial\alpha} = \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{J}|\psi\rangle$$

πχ x συνιστώσα της στροφορμής

Διακριτοί Μετασχηματισμοί: Parity

Ο τελεστής της parity αλλάζει το πρόσημο των συν/νων σε όλα τα σημεία του χώρου:

$$\mathcal{P} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathcal{P}\mathbf{x} = -\mathbf{x}$$

Δράση της parity σε κβαντική κατάσταση:

$$\psi'_\mu(\mathbf{x}) \equiv \langle \mathbf{x}, \mu | P | \psi \rangle \equiv \psi_\mu(\mathcal{P}\mathbf{x}) = \psi_\mu(-\mathbf{x}) = \langle -\mathbf{x}, \mu | \psi \rangle$$

Το τετράγωνο της parity:

$$|\psi''\rangle = P|\psi'\rangle = P^2|\psi\rangle$$

$$\psi''_\mu(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mu | P | \psi' \rangle = \langle -\mathbf{x}, \mu | \psi' \rangle = \langle -\mathbf{x}, \mu | P | \psi \rangle = \langle \mathbf{x}, \mu | \psi \rangle = \psi_\mu(\mathbf{x}) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P^2 = 1 \\ P = P^{-1} \end{array} \right.$$

7j+

Διακριτοί Μετασχηματισμοί: Parity

Ο τελεστής της parity είναι ερμητειανός.

Απόδειξη:

$$\langle\phi|P|\psi\rangle^* = \int d^3\mathbf{x} \sum_\mu (\langle\phi|\mathbf{x},\mu\rangle\langle\mathbf{x},\mu|P|\psi\rangle)^* = \int d^3\mathbf{x} \sum_\mu (\langle\phi|\mathbf{x},\mu\rangle\langle-\mathbf{x},\mu|\psi\rangle)^*$$

$$= \int d^3\mathbf{x} \sum_\mu \langle\psi|-\mathbf{x},\mu\rangle\langle\mathbf{x},\mu|P^2|\phi\rangle$$

$$= \int d^3\mathbf{x} \sum_\mu \langle\psi|-\mathbf{x},\mu\rangle\langle-\mathbf{x},\mu|P|\phi\rangle = \langle\psi|P|\phi\rangle \Longrightarrow \quad P^\dagger = P$$

7k+

Οι ιδιοτιμές της parity είναι ±1

7l+

Μετασχηματισμοί Τελεστών

Για μετατοπίσεις στο χώρο είδαμε ότι οι κβαντικές καταστάσεις μετασχηματίζονται ως:

$$|\psi'\rangle \equiv U(\mathbf{a})|\psi\rangle$$

όπου:

$$U(\mathbf{a}) \equiv \exp(-i\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}/\hbar)$$

Η αναμενόμενη τιμή της θέσης στην μετασχηματισμένη κατάσταση θα πρέπει να ικανοποιεί την σχέση:

$$\langle\psi|\mathbf{x}|\psi\rangle = \mathbf{x}_0 \Longrightarrow \langle\psi'|\mathbf{x}|\psi'\rangle = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a} = \langle\psi|\mathbf{x} + I\mathbf{a}|\psi\rangle$$

διάνυσμα

τελεστής

Ισχύει ακόμα ότι:

$$\langle\psi'|\mathbf{x}|\psi'\rangle = \langle\psi|U^\dagger(\mathbf{a})\mathbf{x}U(\mathbf{a})|\psi\rangle$$

Ο ταυτοτικός τελεστής εννοείται

Άρα :

$$\left.\begin{aligned} &\langle\psi'|\mathbf{x}|\psi'\rangle = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a} = \langle\psi|\mathbf{x} + I\mathbf{a}|\psi\rangle \\ &\langle\psi'|\mathbf{x}|\psi'\rangle = \langle\psi|U^\dagger(\mathbf{a})\mathbf{x}U(\mathbf{a})|\psi\rangle \end{aligned}\right\} \Longrightarrow U^\dagger(\mathbf{a})\,\mathbf{x}\,U(\mathbf{a}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$$

7m+

Θα αποδειχτεί αυστηρότερα παρακάτω

Απειροστά Μικροί Μετασχηματισμοί Τελεστών

Για απειροστά μικρούς μετασχηματισμούς έχουμε:

$$U(\mathbf{a}) \equiv \exp(-\mathrm{i}\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}/\hbar) \xrightarrow[\mathbf{a}\to\delta\mathbf{a}]{} U(\mathbf{a}) \simeq 1 - \mathrm{i}\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}/\hbar$$

Άρα :

$$U^\dagger(\mathbf{a})\,\mathbf{x}\,U(\mathbf{a}) = \mathbf{x}+\mathbf{a} \xrightarrow[\mathbf{a}\to\delta\mathbf{a}]{} \mathbf{x}+\delta\mathbf{a} \simeq \left(1+\mathrm{i}\frac{\delta\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}}{\hbar}\right)\mathbf{x}\left(1-\mathrm{i}\frac{\delta\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}}{\hbar}\right)$$

$$= \mathbf{x} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\mathbf{x}, \delta\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}] + \mathrm{O}(\delta\mathbf{a})^2$$

$$\Downarrow$$

$$[x_i, p_j] = \mathrm{i}\hbar\delta_{ij}$$

7η+

Άρα η σχέση μετάθεσης μεταξύ x, p προκύπτει και ως συνέπεια του τρόπου μετασχηματισμού του τελεστή της θέσης!

Πεπερασμένοι Μετασχηματισμοί

Για πεπερασμένους μετασχηματισμούς έχουμε: $U^\dagger(\mathbf{a})\,\mathbf{x}\,U(\mathbf{a}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$

Επαλήθευση με χρήση μεταθετή [x,p]:

$$U^\dagger(\mathbf{a})\,\mathbf{x}\,U(\mathbf{a}) = U^\dagger(\mathbf{a})U(\mathbf{a})\mathbf{x} + U^\dagger(\mathbf{a})[\mathbf{x}, U(\mathbf{a})] = \mathbf{x} + U^\dagger(\mathbf{a})\,[\mathbf{x}, U(\mathbf{a})]$$

προσθαφαιρέσαμε αυτό

$e^{-i\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}/\hbar}$

$$[A, f(B)] = [A, B](f' + f''B + \tfrac{1}{2}f'''B^2 + \cdots) = [A, B]\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}B}$$

$$U(\mathbf{a}) \equiv \exp(-\mathrm{i}\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}/\hbar)$$

$f(B) \to U$

$B \to a \cdot p$

A→ x

$$\Rightarrow [\mathbf{x}, U(\mathbf{a})] = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\mathbf{x}, \mathbf{a}\cdot\mathbf{p}]U(\mathbf{a})$$

7ο+

Άρα:

$\sum\_i[x_j, a_i p_i] = i\,\hbar \sum a_i \delta_{ij} = i\,\hbar a_j$

$$U^\dagger(\mathbf{a})\,\mathbf{x}\,U(\mathbf{a}) = \mathbf{x} + U^\dagger(\mathbf{a})\,[\mathbf{x}, U(\mathbf{a})] \Rightarrow U^\dagger(\mathbf{a})\,\mathbf{x}\,U(\mathbf{a}) = \mathbf{x} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}U^\dagger(\mathbf{a})[\mathbf{x}, \mathbf{a}\cdot\mathbf{p}]U(\mathbf{a}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$$

7p+

Συμμετρίες και Νόμοι Διατήρησης

Για την χρονική εξέλιξη κβαντικής κατάστασης έχουμε:

$$|\psi, t\rangle = \sum_n a_n e^{-iE_n t/\hbar} |E_n, 0\rangle \Longrightarrow |\psi, t\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\psi, 0\rangle$$

7q+

Μετασχηματισμός μεταφοράς στον χρόνο: $U(t) \equiv e^{-iHt/\hbar}$

Άρα η Hamiltonian είναι γεννήτορας μετασχηματισμών του χρόνου.

Αν ο γεννήτορας τ ενός άλλου μετασχηματισμού μετατίθεται με την Hamiltonian ([τ,H]=0) τότε και τα αντίστοιχα εκθετικά μετατίθενται:

$$U(\theta)U(t)|\psi\rangle = U(t)U(\theta)|\psi\rangle \Longrightarrow U(t) = U^{\dagger}(\theta)U(t)U(\theta)$$

7r+

Ο μετασχηματισμός δεν επηρεάζει την χρονική εξέλιξη (έχουμε μια συμμετρία: ο μετασχηματισμός αφήνει την χρονική εξέλιξη και την Hamiltonian αναλλοίωτα)

Συμμετρίες και Νόμοι Διατήρησης

Αν ο γεννήτορας τ ενός άλλου μετασχηματισμού μετατίθεται με την Hamiltonian ([τ,H]=0) τότε και τα αντίστοιχα εκθετικά μετατίθενται:

$$U(\theta)U(t)|\psi\rangle = U(t)U(\theta)|\psi\rangle \Longrightarrow U(t) = U^{\dagger}(\theta)U(t)U(\theta)$$

Ο μετασχηματισμός δεν επηρεάζει την χρονική εξέλιξη (έχουμε μια συμμετρία: ο μετασχηματισμός αφήνει την χρονική εξέλιξη και την Hamiltonian αναλλοίωτα)

Παράδειγμα: Αν ο γεννήτορας των μετατοπίσεων στο χώρο (η ορμή p) μετατίθεται με την Hamiltonian σημαίνει ότι η χρονική εξέλιξη είναι αναλλοίωτη κάτω από μεταθέσεις στο χώρο (πχ ελεύθερο σωμάτιο $H=p^2/2m$). Το σύστημα είναι συμμετρικό κάτω από μετατοπίσεις.

Η συμμετρία σημαίνει, μετάθεση του γεννήτορα με την Hamiltonian και άρα διατήρηση της μέσης τιμής του παρατηρήσιμου μεγέθους που αντιστοιχεί στο γεννήτορα (πχ ορμή).

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi|Q|\psi\rangle &= -\langle\psi|HQ|\psi\rangle + i\hbar\langle\psi|\frac{\partial Q}{\partial t}|\psi\rangle + \langle\psi|QH|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|[Q,H]|\psi\rangle + i\hbar\langle\psi|\frac{\partial Q}{\partial t}|\psi\rangle, \end{aligned}$$

Συμμετρίες και Νόμοι Διατήρησης

Παράδειγμα: Αν ο γεννήτορας των μεταθέσεων στο χώρο (η ορμή p) μετατίθεται με την Hamiltonian σημαίνει ότι η χρονική εξέλιξη είναι αναλλοίωτη κάτω από μεταθέσεις στο χώρο (πχ ελεύθερο σωμάτιο $H=p^2/2m$). Το σύστημα είναι συμμετρικό κάτω από μεταθέσεις.

Η συμμετρία σημαίνει, μετάθεση του γεννήτορα με την Hamiltonian και άρα διατήρηση της μέσης τιμής του παρατηρήσιμου μεγέθους που αντιστοιχεί στο γεννήτορα (πχ ορμή).

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt}\langle\psi|Q|\psi\rangle &= -\langle\psi|HQ|\psi\rangle + i\hbar\langle\psi|\frac{\partial Q}{\partial t}|\psi\rangle + \langle\psi|QH|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|[Q,H]|\psi\rangle + i\hbar\langle\psi|\frac{\partial Q}{\partial t}|\psi\rangle, \end{aligned}$$

Άρα κάθε συμμετρία (αναλοιοτητα της Hamltonian κάτω από μετασχηματισμό) συνδέεται με ένα νόμο διατήρησης φυσικού μεγέθους (του γεννήτορα του μετασχηματισμού που αφήνει αναλοίωτη την Hamiltonian)

Η εικόνα Heisenberg

Οι προβλέψεις της κβαντομηχανικής εστιάζονται σε πιθανές τιμές μέτρησης (ιδιοτιμές φυσικών μεγεθών), πλάτη πιθανότητας της μορφής <φ|ψ> και αναμενόμενες τιμές φυσικών μεγεθών <ψ|Q|ψ>.

Οι ιδιοτιμές είναι χρονικά ανεξάρτητες. Τα πλάτη πιθανότητας <φ|ψ> είναι επίσης χρονικά ανεξάρτητα λόγω της μοναδιακότητας ($U^{\dagger}=U^{-1}$) του τελεστή της χρονικής εξέλιξης U(t).

$$|\psi, t\rangle = U(t)|\psi, 0\rangle$$

$$|\phi, t\rangle \equiv U(t)|\phi, 0\rangle$$

$$U(t) \equiv \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht/\hbar}$$

$$\Rightarrow \quad \langle\phi, t|\psi, t\rangle = \langle\phi, 0|\psi, 0\rangle$$

7s+

Η εικόνα Heisenberg

Μόνο οι αναμενόμενες τιμές έχουν γενικά εξάρτηση από τον χρόνο ως

$$\langle Q\rangle_t = \langle\psi,t|Q|\psi,t\rangle = \langle\psi,0|U^\dagger(t)QU(t)|\psi,0\rangle = \langle\psi,0|\widetilde{Q}_t|\psi,0\rangle$$

όπου: $\widetilde{Q}_t \equiv U^\dagger(t)QU(t)$

Άρα οι προβλέψεις της κβαντομηχανικής μένουν αναλλοίωτες αν υποθέσουμε ότι οι κβαντικές καταστάσεις μένουν χρονικά ανεξάρτητες αλλά οι τελεστές εξελίσονται χρονικά ως: $\widetilde{Q}_t \equiv U^\dagger(t)QU(t)$

Η 'εικόνα' της κβαντομηχανικής όπου οι τελεστές εξελίσσονται χρονικά ενώ οι κβαντικές καταστάσεις είναι στάσιμές λέγεται 'εικόνα Heisenberg'.

Αντίθετα, στην 'εικόνα Schrodinger' οι τελεστές είναι χρονικά ανεξάρτητοι και εξελίσσονται χρονικά μόνο οι κβαντικές καταστάσεις.

Και στις δύο εικόνες η χρονική εξέλιξη παρατηρήσιμων μεγεθών (αναμενόμενες τιμές) είναι η ίδια. Διαφέρουν μόνο στην μαθηματική προσέγγιση.

Χρονική Εξέλιξη Τελεστών

Στην εικόνα Schrodinger η χρονική εξέλιξη των καταστάσεων προκύπτει από την χρονοεξαρτώμενη εξίσωση Schrodinger.

Ποια διαφορική εξίσωση καθορίζει την χρονική εξέλιξη των τελεστών στην εικόνα Heisenberg;

$$\widetilde{Q}_t \equiv U^\dagger(t) Q U(t) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\widetilde{Q}_t}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}U^\dagger}{\mathrm{d}t} Q U + U^\dagger Q \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$$

Τελεστής σε εικόνα Schrodinger (χρονοανεξάρτητος)

$$U(t) \equiv \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht/\hbar} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{i}H}{\hbar} U \Rightarrow \frac{\mathrm{d}U^\dagger}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{i}H}{\hbar} U^\dagger$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\widetilde{Q}_t}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}U^\dagger}{\mathrm{d}t} Q U + U^\dagger Q \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\mathrm{i}H}{\hbar} U \\ \frac{\mathrm{d}U^\dagger}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{i}H}{\hbar} U^\dagger \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}\widetilde{Q}_t}{\mathrm{d}t} = -H U^\dagger Q U + U^\dagger Q U H = [\widetilde{Q}_t, H]$$

Με πολλ/σμο με |ψ,0> από δεξιά και αριστερά προκύπτει το θεώρημα Ehrenfest!

7†+

Μοιάζει με το θεώρημα Ehrenfest αλλά δεν εμφανίζονται μέσες τιμές και κβαντικές καταστάσεις.

Σύνοψη

Οι κβαντικές καταστάσεις μετασχηματίζονται με δράση μοναδιακών ($U^{-1}=U^{\dagger}$) τελεστών που έχουν την ιδιότητα να διατηρούν τα εσωτερικά γινόμενα και τα πλάτη πιθανότητας μετά την δράση του μετασχηματισμού.

Παραδείγματα μοναδιακών (unitary) μετασχηματισμών είναι η μετατόπιση του συστήματος στο χώρο, η περιστροφή του κβαντικού συστήματος, η μετατόπιση στο χώρο, η αναστροφή σύν/νων κλπ

Οι μοναδιακοί μετασχηματισμοί εκφράζονται σαν $e^{i\tau\theta}$ όπου τ είναι ένας τελεστής που λέγεται γεννήτορας του μετασχηματισμού και θ είναι μια παράμετρος.

Η ορμή είναι ο γεννήτορας των μετσχηματισμών μετατόπισης και η στροφορμή ο γεννήτορας των μετασχηματισμών περιστροφής. Η Hamiltonian είναι ο γεννήτορας μετασχηματισμών εξέλιξης στο χρόνο.

Μετασχηματισμοί που αφήνουν αναλλοίωτη την Hamiltonian (συμμετρία) έχουν γεννήτορες των οποίων η μέση τιμή διατηρείται. Έτσι σε κάθε συμμετρία αντιστοιχεί ένας νόμος διατήρησης.

Στην εικόνα Schrodinger εξελίσσονται χρονικά οι κβαντικές καταστάσεις ενώ στην εικόνα Heisenberg εξελίσσοντα χρονικά οι τελεστές. Οι δύο εικόνες οδηγούν στην ίδια χρονική εξέλιξη για παρατηρήσιμα μεγέθη (αναμενόμενες τιμές)

Άσκηση 1

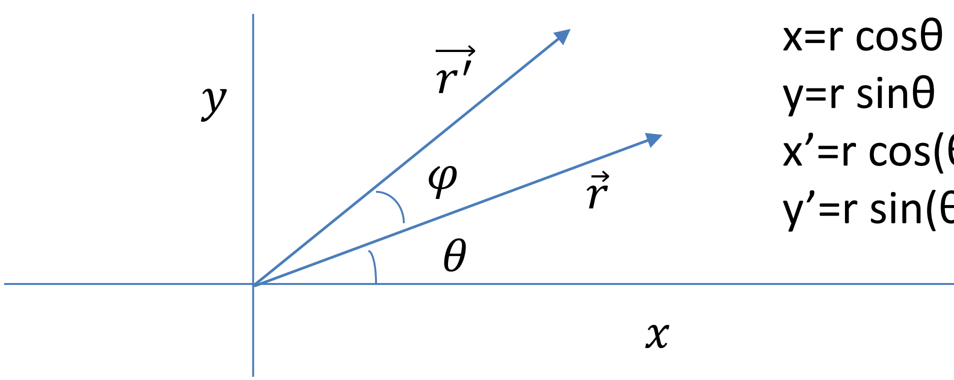
Δείξτε ότι ο πίνακας που περιστρέφει ένα διάνυσμα (x,y,z) γύρω από τον άξονα των z είναι της μορφής

$$\mathbf{R}(\phi) \equiv \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Θεωρώντας απειροστά μικρές στροφές βρείτε τον γεννήτορα των αντίστοιχων στροφών από την σχέση: $\mathbf{R}(\phi) = \exp(-\mathrm{i}\mathcal{J}_z\phi)$

Λύση

Το 1ο προκύπτει απλά αν θυμηθούμε ότι θα πρέπει x′=x cosφ – y sinφ, y′=x sinφ + y cosφ, z′=z. Αυτό προκύπτει με τη σειρά του από το παρακάτω σχήμα



x=r cosθ
y=r sinθ
x’=r cos(θ+ϕ)
y’=r sin(θ+ϕ)

7u+

Άσκηση 1

Δείξτε ότι ο πίνακας που περιστρέφει ένα διάνυσμα (x,y,z) γύρω από τον άξονα των z είναι της μορφής

$$\mathbf{R}(\phi) \equiv \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Θεωρώντας απειροστά μικρές στροφές βρείτε τον γεννήτορα των αντίστοιχων στροφών από την σχέση: $\mathbf{R}(\phi) = \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\mathcal{J}}_z\phi)$

Λύση

Για απειροστά μικρό μετασχηματισμό έχουμε:

$$1 - \mathrm{i}\boldsymbol{\mathcal{J}}_z\delta\phi = \mathbf{R}(\delta\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\phi & 0 \\ \delta\phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7v+

Άρα :

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}_z = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Τελεστής z συνιστώσας στροφορμής

Όμοια για στροφές γύρω από τον άξονα x παίρνουμε:

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}_x = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7w+

Άσκηση 1a

Δείξτε ότι ο γεννήτορας μετασχηματισμών στροφών στο χώρο είναι ο τελεστής της στροφορμής

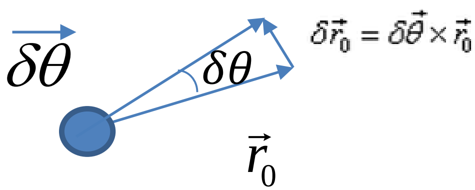
Λύση

Ο τελεστής για απειροστές μετατοπίσεις στον χώρο γράφεται:

$$U(\mathrm{a}) \equiv \exp(-i\mathrm{a}\cdot \mathrm{p}/\hbar) \xRightarrow{\mathrm{a} \to \delta\vec{r}} \psi(\vec{r}) \to \psi(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}\delta\vec{r}.\hat{\vec{p}}\psi(\vec{r})$$

Για την ειδική περίπτωση μετατοπίσεων που αφορούν στροφές γύρω από διάνυσμα δθ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \delta\vec{r}_0 = \delta\vec{\theta}\times\vec{r}_0 \\ \psi(\vec{r}) \to \psi(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar}\delta\vec{r}.\hat{\vec{p}}\psi(\vec{r}) \end{array}\right\} \Rightarrow R\left(\delta\vec{\theta}\right)\psi(\vec{r}) = \left(1 - \frac{i}{\hbar}\delta\vec{\theta}\times\vec{r}.\hat{\vec{p}}\right)\psi(\vec{r})$$



$$= \left(1 - \frac{i}{\hbar}\delta\vec{\theta}.\vec{r}\times\hat{\vec{p}}\right)\psi(\vec{r})$$

στροφορμή

$$= \left(1 - \frac{i}{\hbar}\delta\vec{\theta}.\hat{\vec{L}}\right)\psi(\vec{r}) \Rightarrow R\left(\delta\vec{\theta}\right)\psi(\vec{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\delta\vec{\theta}.\hat{\vec{L}}}\psi(\vec{r})$$

γεννήτορας στροφών στο χώρο

Άσκηση 2

Δείξτε ότι ο τελεστής που ορίζεται από την σχέση $\langle x, y|S|\psi\rangle = \langle y, x|\psi\rangle$

είναι ερμητειανός

Λύση

Θα δείξουμε ότι: $(\langle\phi|S|\psi\rangle)^* = \langle\psi|S|\phi\rangle$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
(\langle\phi|S|\psi\rangle)^* &= \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,(\langle\phi|x,y\rangle\langle x,y|S|\psi\rangle)^* \\
&= \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,(\langle\phi|x,y\rangle)^*(\langle y,x|\psi\rangle)^* \\
&= \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\langle\psi|y,x\rangle\langle x,y|\phi\rangle \\
&= \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\langle\psi|y,x\rangle\langle y,x|S|\phi\rangle \\
&= \langle\psi|S|\phi\rangle.
\end{aligned}$$

7x+

Άσκηση 3

Δείξτε ότι η χρονικά εξελιγμένη κυματοσυνάρτηση κβαντικού συστήματος μπορεί να γραφεί ως:

$$\psi(x,t) = \int dx_0\, U(x,t;x_0,t_0)\, \psi(x_0,t_0)$$

όπου: $U(x,t;x_0,t_0) = \langle x| e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}(t-t_0)} |x_0\rangle$

Δείξτε ακόμα ότι ο διαδότης U ικανοποιεί την σχέση: $U(x,t;x_0,t_0) = \int dx'\, U(x,t;x',t')\, U(x',t';x_0,t_0)$

Λύση

$$|\psi,t\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht/\hbar}|\psi,0\rangle \Rightarrow \langle x|\psi(t)\rangle = \langle x|e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}(t-t_0)}\left(\int dx_0\,|x_0\rangle\langle x_0|\right)|\psi(t_0)\rangle$$

$$= \int dx_0\, \langle x|e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}(t-t_0)}|x_0\rangle\langle x_0|\psi(t_0)\rangle$$

Άρα $U(x,t;x_0,t_0) = \langle x|e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}(t-t_0)}|x_0\rangle$

7γ+

Άσκηση 3

$$|\psi,t\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht/\hbar}|\psi,0\rangle \quad \Longrightarrow \quad \langle x|\psi(t)\rangle = \langle x|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}\Big(\int dx_0\,|x_0\rangle\langle x_0|\Big)|\psi(t_0)\rangle$$

$$= \int dx_0\,\langle x|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|x_0\rangle\langle x_0|\psi(t_0)\rangle$$

Άρα $U(x,t;x_0,t_0) = \langle x|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|x_0\rangle \Longrightarrow \lim_{t\to t_0} U(x,t;x_0,t_0) = \langle x|x_0\rangle = \delta(x-x_0)$

Θα δείξουμε ότι: $U(x,t;x_0,t_0) = \int dx'\,U(x,t;x',t')\,U(x',t';x_0,t_0)$

Έχουμε: $U(x,t;x_0,t_0) = \langle x|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t')}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t_0)}|x_0\rangle$

$$= \langle x|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t')}\Big(\int dx'\,|x'\rangle\langle x'|\Big)e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t_0)}|x_0\rangle$$

$$= \int dx'\,U(x,t;x',t')\,U(x',t';x_0,t_0)$$

7z+

Άλυτες Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι ο διαδότης μπορεί να γραφεί ως:

$$U(x,t;x_0,t_0) = \sum_n \psi_n(x)\psi_n^*(x_0)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_0)}$$