Συνθήκη κλασικών τροχιών

$$\lambda\!\!\!^{-} \ll \frac{1}{2} d_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2 E_{CM}}$$

Στην βιβλιογραφία ορίζεται η παράμετρος Sommerfeld

$$n = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}$$

$$d_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E_{CM}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\frac{1}{2}\mu v^2} = 2\,\frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}\cdot\frac{\hbar}{\mu v} =$$

$$= 2n\frac{\hbar}{p} = 2n\lambda\!\!\!^{-}$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{d_0/2}{\lambda\!\!\!^{-}}$$

Άρα, η σχέση

$$\boxed{n \gg 1}$$

εκφράζει την συνθήκη κλασικών τροχιών.

Με τη βοήθεια της παραμέτρου Sommerfeld μπορούμε να βρούμε μία σχέση μεταξύ της στροφορμής και της γωνίας εκτροπής του βλήματος.

$$\sqrt{L(L+1)}\,\hbar = \mu v b \xrightarrow{L \gg 1} L\hbar = pb = \hbar k b$$

$$= \frac{\hbar b}{\bar{\lambda}}$$

$$\Rightarrow L = \frac{b}{\bar{\lambda}}$$

$$\cot\frac{\theta}{2} = \frac{2b}{d_0} = \frac{b}{\frac{d_0}{2}} = \frac{L\bar{\lambda}}{\frac{d_0}{2}} = \frac{L}{\frac{d_0/2}{\bar{\lambda}}} = \frac{L}{n}$$

$\therefore$ $$\boxed{L = n\cot\frac{\theta}{2}}$$

Άλλες σχέσεις με την παράμετρο Sommerfeld

1) $L^2 = \rho(\rho - 2\eta)$ ή $\rho = \eta + (L^2 + \eta^2)^{1/2}$

όπου $\rho = kd = \dfrac{d}{\lambda\!\!\!^{-}}$

2) $\rho = \eta\left(1 + \operatorname{cosec}\dfrac{\theta}{2}\right)$ ή $\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\eta}{\rho - \eta}$

(Υπόδειξη: θέτω $L = \eta \cot\dfrac{\theta}{2}$ στην (1))

(Υπόδειξη για την (1)

Χρησιμοποιήσατε την $b^2 = d(d - d_0)$

Σκέδαση p+p

$$E_{Lab} = 68 \text{ MeV} \Rightarrow E_{CM} = \frac{1}{2} 68 \text{ MeV} = 34 \text{ MeV}$$

$$E_{Lab} = 142 \text{ MeV} \rightarrow E_{CM} = 71 \text{ MeV}$$

1) $m_p c^2 = 938 \text{ MeV} \Rightarrow E_{CM} < m_p c^2 \Rightarrow E = \frac{p^2}{2m}$

2) $ƛ << \frac{d_0}{2}$? ή $\eta >> 1$ (?) (κλασ. τροχιά)

$$ƛ = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu E_{CM}}} = \frac{\hbar c}{\sqrt{mc^2 E_{CM}}} = \frac{197 \text{ MeV}\cdot\text{fm}}{\sqrt{938 \text{ MeV} \times E_{CM}}}$$

$$\frac{d_0}{2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E_{CM}} = \frac{e^2}{2E_{CM}} = \frac{1.44 \text{ MeV}\cdot\text{fm}}{2 E_{CM}}$$

ή

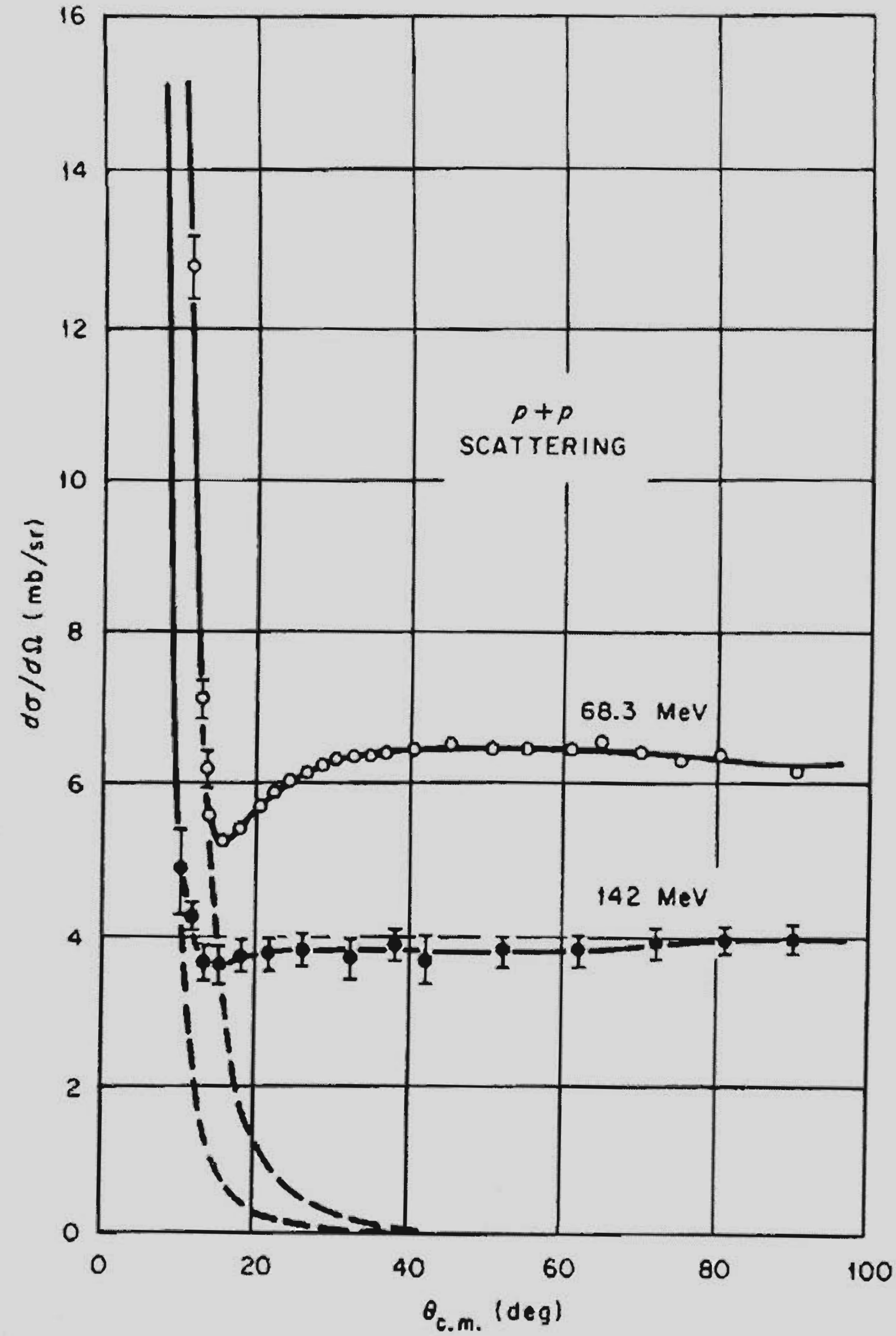
$$\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar c \left(\frac{v}{c}\right)} = \frac{e^2}{(197 \text{ MeV fm}) \left(\frac{v}{c}\right)} = \frac{1.44}{197 \left(\frac{v}{c}\right)}$$

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E}{\mu}} \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2E}{\mu c^2}} = 2\sqrt{\frac{E}{mc^2}}$$

E_{Lab} (MeV)	E_{CM} (MeV)	$ƛ$ (fm)	$\frac{d_0}{2}$ (fm)	η
68	34	1.10	0.021	0.019
142	71	0.76	0.010	0.013

$ƛ >> \frac{d_0}{2}$ ή $\eta << 1 \Rightarrow$ κυματικά φαινόμενα $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κλασσικούς συλλογισμούς για να εκτιμήσουμε το μέγεθος του πρωτονίου. π.χ. για $ƛ \simeq 1$ fm, $d_0 = 0.04$ fm



- - - - : Rutherford

——— : q.m.

Η διαφορική ενεργός διατομή κατά την ελαστική σκέδαση φορτισμένων σωματίων σε <u>μικρές γωνίες</u> περιγράφεται <u>πάντα</u> με τη σχέση του Rutherford. Διότι $d(\theta)$ = μεγάλο → σκέδαση σημ. φορτίων και $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{qm} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth}$

Κλασική και σχετικιστική συμπεριφορά των διαφορικών ενεργών διατομών

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$$

1. Κλασική μηχανική $\quad (m_0 c^2 \gg pc \Rightarrow T = \frac{1}{2} m_0 v^2)$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d_0}{4}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

2. Σχετικιστική μηχανική $\quad (pc \gtrsim m_0 c^2)$

π.χ. Σκέδαση e $(m_0 c^2 = 0.511 \text{ MeV})$ από σημειακό φορτίο, με την προϋπόθεση ότι $Z \ll \frac{\hbar c}{e^2} = 137$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z e^2}{2 E \beta^2}\right)^2 \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

όπου $\quad \beta = \frac{v}{c} \quad$ και $\quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$

(α) Όταν $\beta \to 0$, $\quad E\beta^2 = \frac{m_0 c^2 \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \longrightarrow m_0 v^2$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z e^2}{2 m_0 v^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} = \left(\frac{d_0}{4}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth}$$

(β) Όταν $\beta \to 1$. (άκρως σχετικιστικό όριο)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z e^2}{2 E}\right)^2 \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \equiv \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}$$

Διαφορά στην γωνιακή εξάρτηση της $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth}$ και $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}$

$N := 500$ $\quad i := 1..N$ $\quad \theta_i := \frac{2\cdot\pi}{N}\cdot i$ $\quad F_i := \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right)^4}$ $\quad \Phi_i := \frac{\cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right)^2}{\sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right)^4}$