2 ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ: Βασικές Εξισώσεις

2.1 Χωρόχρονος και Μετρικός Τανυστής

Τα συστατικά που απαρτίζουν το σύμπαν είναι ένας μόνο από τους δύο παράγοντες που παίζουν σημαντικό ρόλο στην Κοσμολογία. Ο δεύτερος είναι η γεωμετρία του σύμπαντος. Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας είναι η πιο θεμελιώδης θεωρία για την βαρύτητα και τη δομή του χωρόχρονου που διαθέτουμε σήμερα. Η θεωρία αυτή έχει περάσει επιτυχώς πολυάριθμα πειραματικά τεστ και χρησιμοποιείται κατά κόρον στην επιστήμη της Κοσμολογίας. Η Νευτώνια θεωρία αποτελεί μια απλούστερη, ειδική περίπτωση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας και μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντ' αυτής όταν τα βαρυτικά πεδία είναι ιδαίτερα ασθενή και οι σχετικές ταχύτητες κίνησης των διαφόρων σωμάτων είναι πολύ μικρότερες από αυτή του φωτός. Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου αυτού θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια σύντομη εισαγωγή στις αρχές και τα μαθηματικά 'εργαλεία' της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας που θα μας επιτρέψει να παράγουμε τις βασικές εξισώσεις της Κοσμολογίας. Όπου αυτό είναι δυνατόν, εναλλακτικοί τρόποι διατύπωσης αυτών των εξισώσεων, με την χρήση της Νευτώνιας θεωρίας, θα δοθούν επίσης.

Στα πλαίσια της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, ο χώρος ($\vec{x}$) και ο χρόνος (t) θεωρούνται ως απολύτως ισοδύναμα μέρη μιας και μοναδικής οντότητας, του χωρόχρονου. Θεμελιώδεις σχέσεις μεταξύ φυσικών ποσοτήτων γράφονται μόνο συναρτήσει τετραδιανυσμάτων. Παραδείγματος χάρη, η θέση ενός σωματιδίου στον χωρόχρονο δίνεται από το τετραδιάνυσμα θέσης $x^\mu = (c\,t, x, y, z)$, με τον δείκτη μ να παίρνει τις τιμές 0, για την χρονική συνιστώσα, και 1,2,3, για τις χωρικές. Με τον ίδιο τρόπο, η απειροστή μεταβολή της θέσης του σωματιδίου δίνεται από το τετραδιάνυσμα $dx^\mu = (c\,dt, dx, dy, dz)$. Η Ειδική Θεωρία της

Σχετικότητας εισήγαγε επίσης την ιδέα των αναλλοίωτων ποσοτήτων, οι τιμές των οποίων δεν μεταβάλλονται κατά την διάρκεια της αλλαγής του συστήματος συντεταγμένων. Το σημαντικότερο από αυτά είναι η ποσότητα

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\,, \tag{2.1}$$

που δίνει το αναλλοίωτο διάστημα (ή αλλιώς 'στοιχείο μήκους') στον χωρόχρονο ανάμεσα σε δύο γεγονότα που έλαβαν χώρα στις θέσεις (t, x, y, z) και $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$. Η τροχιά με το μικρότερο 'μήκος' που ενώνει τα δύο αυτά γεγονότα είναι η ευθεία γραμμή. Τα παραπάνω ισχύουν μόνο για σωματίδια που κινούνται στον χωρόχρονο απουσία οποιωνδήποτε εξωτερικών δυνάμεων. Δυνάμεις όπως η βαρύτητα ή ο ηλεκτρομαγνητισμός επηρεάζουν την κίνηση των σωματιδίων και μεταβάλλουν τις τροχιές τους.

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας σκοπό είχε να ενσωματώσει μέσα στον ίδιο τον χωρόχρονο την επίδραση της βαρυτικής δύναμης στην κίνηση των σωματιδίων. Στην περίπτωση αυτή, δεν μιλάμε πλέον για σωματίδια που κινούνται στον επίπεδο χωρόχρονο (2.1) κάτω από την επίδραση της βαρυτικής δύναμης αλλά για σωματίδια που κινούνται ελεύθερα μέσα σε ένα καμπύλο χωρόχρονο. Για τον λόγο αυτό, το αναλλοίωτο διάστημα (2.1) αντικαταστάθηκε από τον Einstein, κατά την διατύπωση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας, από το ακόλουθο

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu\,. \tag{2.2}$$

Η ποσότητα $g_{\mu\nu}$ που εμφανίζεται στην παραπάνω έκφραση είναι ο λεγόμενος μετρικός τανυστής, και εμπεριέχει όλη την πληροφορία για την δομή και γεωμετρία του χωρόχρονου. Όπως θα δούμε σε επόμενη παράγραφο, η ακριβής μορφή του μετρικού τανυστή για τον χωρόχρονο καθορίζεται από την κατανομή της ύλης και ενέργειας μέσα σε αυτόν. Στην πράξη, η επανάληψη ενός δείκτη στην ίδια πλευρά μιας εξίσωσης υπονοεί την άθροιση όλων των δυνατών τιμών του και το σύμβολο του αθροίσματος, για απλότητα, παραλείπεται.

Η έννοια του μετρικού τανυστή δεν συναντάται μόνο στην περιγραφή του τετραδιάστατου καμπύλου χωρόχρονου στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Η απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία σε ένα διδιάστατο επίπεδο δίνεται, όπως ξέρουμε, από την απλή σχέση: $ds^2 = dx^2 + dy^2$, ή αλλοιώς $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$, όπου ο μετρικός τανυστής είναι ένας πίνακας 2×2 με στοιχεία $g_{11} = g_{22} = 1$ και $g_{12} = g_{21} = 0$. Εάν χρησιμοποιήσουμε σύστημα πολικών συντεταγμένων

$$x = r\, \cos\varphi\,, \qquad y = r\, \sin\varphi\,, \tag{2.3}$$

το ίδιο διάστημα γράφεται εναλλακτικά ως εξής: $ds^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2$. Το διάστημα αυτό μπορεί και πάλι να γραφεί συναρτήσει του μετρικού τανυστή, όπως και παραπάνω, μόνο που τώρα $g_{11} = 1$, $g_{22} = r^2$ και $g_{12} = g_{21} = 0$. Παρόμοια, η απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία στον 3-διάστατο επίπεδο χώρο μπορεί να γραφεί ως $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$, όπου τώρα ο μετρικός τανυστής είναι ένας πίνακας 3×3 με τα διαγώνια στοιχεία του ίσα με την μονάδα και τα μη διαγώνια μηδέν. Χρήση του συστήματος σφαιρικών συντεταγμένων

$$x = r\,\sin\theta\,\cos\varphi\,, \qquad y = r\,\sin\theta\,\sin\varphi\,, \qquad z = r\,\cos\theta\,, \tag{2.4}$$

οδηγεί στην μορφή $ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$, και στον μετρικό τανυστή $g_{\mu\nu}$ με μη μηδενικά στοιχεία $g_{11} = 1$, $g_{22} = r^2$ και $g_{33} = r^2 \sin^2\theta$. Τέλος, το διάστημα ανάμεσα σε δύο σημεία στον επίπεδο τετραδιάστατο χωρόχρονο της Εξ. (2.1) μπορεί επίσης να γραφεί συναρτήσει του μετρικού τανυστή $g_{\mu\nu}$, σύμφωνα με την Εξ. (2.2), με μη μηδενικά στοιχεία $g_{00} = c^2$ και $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$.

Στην γενικότητα, ο μετρικός τανυστής $g_{\mu\nu}$ (όπως και κάθε τανυστής δεύτερης τάξης, δηλαδή, με δύο δείκτες) μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα πίνακα διάστασης όση και η διάσταση του συγκεκριμένου προβλήματος: 2×2 στο επίπεδο, 3×3 στον χώρο, 4×4 στον 4-διάστατο χωρόχρονο ή $n \times n$ στον n-διάστατο χωρόχρονο! Οι περιορισμοί που επιβάλλουμε στην μορφή του είναι πάρα πολύ λίγοι: θα πρέπει να είναι συμμετρικός και η ορίζουσά του $|g_{\mu\nu}|$ να είναι μη μηδενική. Ο πρώτος περιορισμός προκύπτει από το γεγονός ότι η Εξ. (2.2) οφείλει να είναι αναλλοίωτη κάτω από την αλλαγή των τυχαίων δεικτών: $\mu \leftrightarrow \nu$. Ο δεύτερος περιορισμός προκύπτει από την απαίτηση να υπάρχει ο αντίστροφος πίνακάς του $g^{\alpha\beta}$, με τον οποίο ικανοποιεί την σχέση

$$g^{\alpha\beta}\, g_{\beta\nu} = \delta^\alpha_\nu\,, \tag{2.5}$$

όπου δ^α_ν είναι το δέλτα του Kronecker, το οποίο είναι μονάδα όταν $\alpha = \nu$ και μηδέν στην αντίθετη περίπτωση. Όπως και στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, έτσι και εδώ οι δύο αυτές μορφές του μετρικού τανυστή, η συναλλοίωτη (covariant) με τους δείκτες κάτω και η ανταλλοίωτη (contravariant) με τους δείκτες επάνω, είναι απαραίτητες για το ανέβασμα και κατέβασμα των δεικτών των διαφόρων τανυστών: $A^\mu = g^{\mu\nu}\, A_\nu$ και $A_\mu = g_{\mu\nu}\, A^\nu$.

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή με ένα τελευταίο σχόλιο. Από τα παραδείγματα που αναφέραμε παραπάνω για τον μετρικό τανυστή είναι φανερό ότι, όταν γίνεται αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων, η μορφή του $g_{\mu\nu}$ αλλάζει επίσης. Η συμπεριφορά αυτή είναι χαρακτηριστική για κάθε τανυστή, κάθε δηλαδή ποσότητας με έναν ή περισσότερους ελεύθερους δείκτες. Ακόμα και τα διανύσματα – παράδειγμα τανυστή με έναν δείκτη – αλλάζουν κάτω από την αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων. Παραδείγματος χάρη, εάν υιοθετήσουμε καινούριες συντεταγμένες $x'^\mu = x'^\mu(x^\nu)$, το τετραδιάνυσμα της απειροστής μετατόπισης μεταβάλλεται ως εξής:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\, dx^\nu\,. \tag{2.6}$$

Κάθε όμως φυσική ποσότητα είναι ανεξάρτητη από το συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων που επιλέξαμε για να την περιγράψουμε. Παράδειγμα μιας τέτοιας ποσότητας είναι φυσικά το αναλλοίωτο διάστημα (2.2), στην έκφραση του οποίου όλοι οι δείκτες έχουν αθροιστεί. Το διάστημα αυτό μπορεί να γραφεί ως εξής: $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = g'_{\mu\nu}\, dx'^\mu\, dx'^\nu$. Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω μετασχηματισμό για το dx'^μ, μπορούμε να γράψουμε για τον μετρικό τανυστή τον ακόλουθο κανόνα μετασχηματισμού

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\, g_{\alpha\beta}\,. \tag{2.7}$$

Όπως βλέπουμε ο παραπάνω κανόνας είναι γενίκευση αυτού για το dx'^μ αλλά με τα x'^μ και x^ν ανεστραμμένα λόγω της αντίθετης θέσης των δεικτών, συναλλοίωτης αντί ανταλλοίωτης. Γενικεύοντας ακόμα περισσότερο το παραπάνω, μπορούμε να γράψουμε για ένα τανυστή τυχαίας τάξης τον γενικευμένο κανόνα μετασχηματισμού

$$A'^{\,\alpha\beta\ldots}_{\mu\nu\ldots} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^k}\,\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^l}\ldots\frac{\partial x^p}{\partial x'^\mu}\,\frac{\partial x^q}{\partial x'^\nu}\ldots A^{kl\ldots}_{pq\ldots}\,. \tag{2.8}$$

Σύμφωνα με την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, οι μόνοι φυσικοί νόμοι του σύμπαντος είναι αυτοί που εξισώνουν ποσότητες, συνδυασμούς τανυστών, που μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο κάτω από οποιαδήποτε αλλαγή συντεταγμένων (άρα έχουν τον ίδιο αριθμό συναλλοίωτων και ανταλλοίωτων δεικτών). Ο κοινός τρόπος μετασχηματισμού εγγυάται ότι οι εξισώσεις παραμένουν αναλλοίωτες στο σύνολό τους, ακόμα και αν η κάθε πλευρά της επιμέρους εξίσωσης μεταβάλλεται. Ένα τέτοιο παράδειγμα φυσικού νόμου αποτελούν, όπως θα δούμε παρακάτω, οι εξισώσεις του Einstein για το βαρυτικό πεδίο.

2.2 Ο Robertson-Walker χωρόχρονος

Το ερώτημα που προκύπτει μετά την ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου, αλλά και της συζήτησης του πρώτου κεφαλαίου, είναι: ‘‘ποια είναι η μορφή του μετρικού τανυστή $g_{\mu\nu}$ που είναι η καταλληλότερη να περιγράψει το σύμπαν;’’. Βασικό ρόλο στην απάντηση του ερωτήματος αυτού θα παίξει η Κοσμολογική αρχή και οι συμμετρίες που αυτή επιβάλλει στο βαρυτικό υπόβαθρο του σύμπαντος.

Για την περιγραφή της δυναμικής εξέλιξης του σύμπαντος, αντιστοιχούμε σε κάθε ‘γεγονός’ ή σωματίδιο ένα διάνυσμα θέσης $\vec{x}$ και έναν ‘κοσμικό’ (ή ‘παγκόσμιο’) χρόνο t, γεγονός που μας επιτρέπει να γράψουμε το αναλλοίωτο διάστημα στην γενική μορφή

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - \gamma_{\alpha\beta}(t,\vec{x})\, dx^\alpha\, dx^\beta\,. \tag{2.9}$$

Η παραπάνω επιλογή μας επιτρέπει να διατηρήσουμε τη δομή του αναλλοίωτου διαστήματος της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας επιτρέποντας παράλληλα την διαστολή του χωρικού μέρους καθώς και την μη τετριμμένη γεωμετρία του μέσω της συνάρτησης της επιμέρους μετρικής $\gamma_{\alpha\beta}$ από τις συντεταγμένες t και $\vec{x}$, αντίστοιχα. Η Κοσμολογική Αρχή με την σειρά της επιβάλλει στο σύμπαν να είναι ομοιογενές και ισότροπο· εάν επομένως 'παγώσουμε' τον χρόνο t, το χωρικό μέρος οφείλει να παρουσιάζει την ίδια εικόνα παντού. Αυτό σημαίνει ότι οι τρεις χωρικές διαστάσεις θα πρέπει να διαστέλλονται με τον ίδιο ακριβώς ρυθμό και τρόπο. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - a^2(t)\, \tilde{\gamma}_{\alpha\beta}(\vec{x})\, dx^\alpha\, dx^\beta. \tag{2.10}$$

Επιπλέον, η ισοτροπία του σύμπαντος διασφαλίζεται εάν επιβάλλουμε σφαιρική συμμετρία στον εναπομείναντα χωρικό μετρικό τανυστή $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}$. Αυτό οδηγεί στην μορφή

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{A(r)} + r^2\, d\theta^2 + r^2\, \sin^2\theta\, d\varphi^2\right]. \tag{2.11}$$

Ο τριδιάστατος χώρος, ο μετρικός τανυστής του οποίου δίνεται εν μέσω τετραγωνικών παρενθέσεων, είναι στην γενικότητα καμπύλος λόγω της παρουσίας της ακτινικής συνάρτησης $A(r)$. Η ομοιογένεια του σύμπαντος απαιτεί η καμπυλότητα του χωρόχρονου, στην περίπτωση που αυτή είναι μη μηδενική, να είναι η ίδια σε όλα τα σημεία του. Όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας, υπάρχουν τρεις βαρυτικές ποσότητες οι οποίες μπορούν να μας δώσουν πληροφορίες για τη δομή και καμπυλότητα του χωρόχρονου. Η πρώτη είναι η βαθμωτή ποσότητα Ricci, που για τον παραπάνω τριδιάστατο χώρο προκύπτει να έχει την μορφή

$$R_3 = -\frac{2}{r^2}\, \left[rA'(r) + A(r) - 1\right]. \tag{2.12}$$

Εάν απαιτήσουμε η παραπάνω ποσότητα να είναι σταθερά παντού, με τυχαία τιμή $6k$, μπορούμε να προσδιορίσουμε την μορφή της συνάρτησης $A(r)$

$$A(r) = 1 - kr^2 + \frac{c_0}{r}\,, \tag{2.13}$$

όπου c_0 είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης. Οι άλλες δύο βαθμωτές βαρυτικές ποσότητες είναι οι $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ και $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, και δίνονται συναρτήσει του λεγόμενου τανυστή καμπυλότητας Riemann $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, και του τανυστή Ricci $R_{\mu\nu}$, αντίστοιχα. Οι βαθμωτές αυτές ποσότητες, που όπως και το βαθμωτό Ricci δεν έχουν ελεύθερους δείκτες και επομένως δεν μεταβάλλονται κάτω από αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων, στην προκειμένη περίπτωση παίρνουν τις τιμές

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = 12k^2 + \frac{6c_0^2}{r^6}\,, \qquad R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = 12k^2 + \frac{3c_0^2}{2r^6}\,. \tag{2.14}$$

Εάν επομένως θέλουμε και οι δύο παραπάνω ποσότητες να έχουν την ίδια τιμή παντού στο σύμπαν, θα πρέπει να θέσουμε $c_0 = 0$. Το αναλλοίωτο διάστημα για ένα χωρόχρονο που περιγράφει ένα ομοιογενές και ισότροπο σύμπαν δίνεται τότε από την τελική έκφραση

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2 \right) \right]. \tag{2.15}$$

Ο παραπάνω χωρόχρονος ονομάζεται χωρόχρονος Robertson-Walker. Η μόνη άγνωστη συνάρτηση στην έκφρασή του, η χρονο-εξαρτώμενη ποσότητα $a(t)$, ονομάζεται 'συντελεστής κλίμακας' του σύμπαντος και η ακριβής του μορφή προσδιορίζεται μέσω των εξισώσεων του Einstein.

Η παράμετρος k, μέσω της σχέσης $R = 6k$, καθορίζει την γεωμετρία του τριδιάστατου χώρου. Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι μόνο το πρόσημο της παραμέτρου k έχει φυσική σημασία και όχι η ακριβής τιμή της: εάν ορίσουμε μια καινούρια ακτινική συντεταγμένη $\tilde{r} = \sqrt{|k|}\, r$, και έναν καινούριο συντελεστή κλίμακας $\tilde{a}(t) = a(t)/\sqrt{|k|}$, το μέτρο $|k|$ εξαφανίζεται. Για τον λόγο αυτό, κανονικοποιούμε την παράμετρο k να παίρνει τις τιμές $k = 0, +1, -1$. Οι τρεις αυτές τιμές οδηγούν σε τρία διαφορετικά είδη τριδιάστατου χώρου, όλα με σταθερή καμπυλότητα αλλά με ριζικά διαφορετικές ιδιότητες. Τους τρεις αυτούς χώρους μελετάμε σε περισσότερη λεπτομέρεια παρακάτω.

2.2.1 Επίπεδος χώρος

Εάν $k = 0$, η καμπυλότητα του χώρου είναι μηδέν και ο 3-διάστατος χώρος είναι επίπεδος (flat). Το στοιχείο μήκους ds^2 που αντιστοιχεί σε αυτόν – η έκφραση μεταξύ των τετραγωνικών παρενθέσεων στην Εξ. (2.15) – παίρνει την απλή μορφή

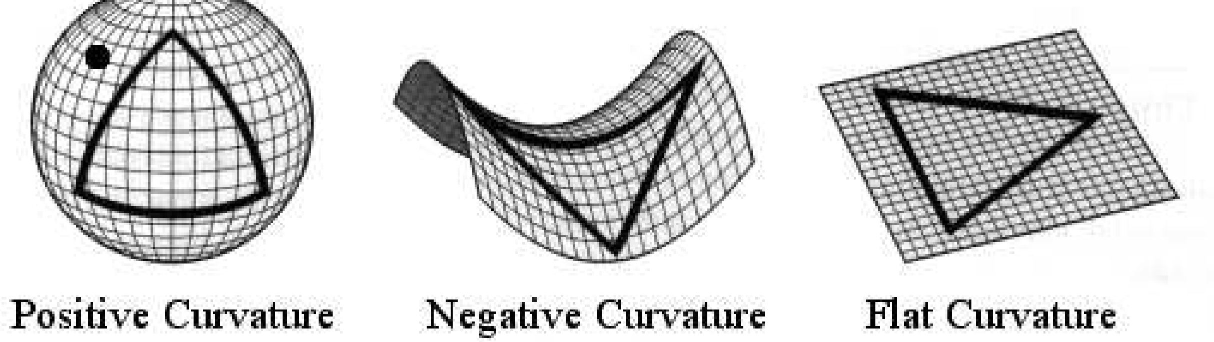
$$ds_3^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2\, \sin^2\theta\, d\varphi^2\,, \tag{2.16}$$

και δίνει την απόσταση μεταξύ δύο σημείων στον τριδιάστατο Ευκλείδιο χώρο γραμμένο συναρτήσει σφαιρικών συντεταγμένων. Οι ιδιότητες του Ευκλείδιου χώρου είναι γνωστές· τυπικά παραδείγματα αποτελούν το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου, που σε αυτή την περίπτωση έχει την αναμενόμενη τιμή των 180^o (Σχήμα 7), και το ότι δύο παράλληλες γραμμές παραμένουν πάντα παράλληλες. Οι χωρικές συντεταγμένες παίρνουν τις τιμές: $0 < r < \infty$, $0 < \theta < \pi$ και $0 < \varphi < 2\pi$, και ο τριδιάστατος χώρος είναι άπειρος.

2.2.2 Κλειστός χώρος

Ο τριδιάστατος αυτός χώρος χαρακτηρίζεται από θετική καμπυλότητα. Η τοπολογία του γίνεται ευκολότερα αντιληπτή εάν εισαγάγουμε μια καινούρια συντεταγμένη μέσω της σχέσης $r = \sin\chi$. Τότε, $dr = \cos\chi\, d\chi = \sqrt{1 - r^2}\, d\chi$, και το τριδιάστατο στοιχείο μήκους μπορεί να γραφεί ως

$$ds_3^2 = d\chi^2 + \sin^2\chi \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2 \right). \tag{2.17}$$



Σχήμα 7: Παραδείγματα διαφορετικών τοπολογιών χώρου του σύμπαντος: κλειστή (αριστερά), ανοιχτή (κέντρο) και επίπεδη (δεξιά).

Η παραπάνω έκφραση αποτελεί γενίκευση, στις τρεις χωρικές διαστάσεις, του στοιχείου μήκους ανάμεσα σε δύο σημεία στην επιφάνεια μιας σφαίρας. Ο χώρος, επομένως, έχει την γεωμετρία μιας τριδιάστατης σφαίρας, με τις χωρικές συντεταγμένες να παίρνουν τις τιμές $0 < \chi, \theta < \pi$ και $0 < \varphi < 2\pi$. Ο τριδιάστατος χώρος είναι πεπερασμένος, και ονομάζεται 'κλειστός' (closed). Μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε ότι ο όγκος που περικλείει αυτή η τριδιάστατη σφαίρα με μοναδιαία ακτίνα είναι ίσος με $2\pi^2$ – εάν επανέλθουμε στο τετραδιάστατο στοιχείο μήκους (2.15), και παγώσουμε τον χρόνο, ο πραγματικός όγκος του σύμπαντος προκύπτει να είναι $2\pi^2 a^3$, με τον συντελεστή κλίμακας να παίζει τον ρόλο της ακτίνας του σύμπαντος. Είναι φανερό ότι η Ευκλείδια γεωμετρία δεν ισχύει πλέον. Τρία σημεία πάνω σε μια επιφάνεια θετικής καμπυλότητας, που τα δύο από αυτά τουλάχιστον δεν ανήκουν στον ίδιο 'παράλληλο' ή 'μεσημβρινό', σχηματίζουν τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών το οποίου είναι μεγαλύτερο από 180^0 (Σχήμα 7). Επιπλέον, δύο αρχικά παράλληλες γραμμές πάντα συγκλίνουν μετά από λίγο.

2.2.3 Ανοιχτός χώρος

Η τελευταία τοπολογία χώρου αντιστοιχεί στην τιμή $k = -1$, και χαρακτηρίζεται από αρνητική καμπυλότητα. Η πιο κατάλληλη αλλαγή συντεταγμένης στην περίπτωση αυτή είναι η $r = \sinh\chi$. Τότε, $dr = \cosh\chi\, d\chi = \sqrt{1+r^2}\, d\chi$, και το τριδιάστατο στοιχείο μήκους παίρνει την μορφή

$$ds_3^2 = d\chi^2 + \sinh^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\,. \tag{2.18}$$

Η παραπάνω έκφραση περιγράφει ένα 3-διάστατο υπερβολοειδές (Σχήμα 7). Οι χωρικές συντεταγμένες παίρνουν τις τιμές $0 < \chi < \infty$, $0 < \theta < \pi$ και $0 < \varphi < 2\pi$. Όπως και στην περίπτωση του επιπέδου, ο χώρος είναι άπειρος και ονομάζεται ‘ανοιχτός’ (open). Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου που σχηματίζεται επάνω σε μια επιφάνεια αρνητικής καμπυλότητας είναι μικρότερο από 180^0, και δύο αρχικά παράλληλες γραμμές πολύ γρήγορα αποκλίνουν.

Και οι τρεις αυτές κατηγορίες χώρου χαρακτηρίζονται, όπως είδαμε, από σταθερή καμπυλότητα και επομένως ικανοποιούν πλήρως τις απαιτήσεις της Κοσμολογικής Αρχής. Παρ’ όλο που και οι τρεις είναι αποδεκτές για να περιγράψουν το σύμπαν, η τοπολογία τους είναι ριζικά διαφορετική. Η τιμή της παραμέτρου k δεν αλλάζει με τον χρόνο και θα πρέπει να έχει επιλεγεί τη στιγμή της δημιουργίας του σύμπαντος. Ποιά όμως από τις τρεις αυτές τιμές επιλέχθηκε τελικά από το σύμπαν μας, και ποιό από τα τρία είδη χώρου αντιστοιχεί σε αυτό; Το ερώτημα αυτό είναι ένα από τα πιο βασικά της μοντέρνας Κοσμολογίας. Από θεωρητικής πλευράς, και τα τρία είναι αποδεκτά, και ως τέτοια θα τα θεωρήσουμε κατά την διάρκεια της μελέτης των διαφόρων κοσμολογικών μοντέλων. Μόνο μέσω των κοσμολογικών παρατηρήσεων είναι δυνατόν να αποκλείσουμε τα δύο από τα τρία αυτά είδη και να προσδιορίσουμε την γεωμετρία του χώρου μας. Θα αναφερθούμε στα σύγχρονα παρατηρησιακά δεδομένα και στο ερώτημα αυτό σε επόμενο κεφάλαιο.

2.3 Η υπόθεση του Weyl και ο Τανυστής Ενέργειας-Ορμής

Όπως αναφέραμε παραπάνω, η ακριβής μορφή του συντελεστή κλίμακας $a(t)$, που καθορίζει και την εξέλιξη του σύμπαντος στον χρόνο, προκύπτει μέσω της λύσης των εξισώσεων του Einstein, και εξαρτάται από την κατανομή ενέργειας στο σύμπαν. Στο σημείο λοιπόν αυτό θα σταθούμε για λίγο στο ερώτημα του πώς η ομοιόμορφη, σε μεγάλη κλίμακα, κατανομή ύλης και ενέργειας στο σύμπαν αναπαρίσταται στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

Το 1923, εφτά μόλις χρόνια μετά την τελική διατύπωση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας από τον Einstein, ο Herman Weyl μελέτησε το πρόβλημα αυτό. Δεχόμενος τις βασικές παραδοχές της Κοσμολογικής Αρχής, υπέθεσε ότι το σύμπαν περιέχει ένα ομοιόμορφο ‘υπόστρωμα” (substratum) ύλης μέσα στο οποίο οι γαλαξίες συμπεριφέρονται σαν σωματίδια σε τέλειο ρευστό. Ένα τέτοιο ρευστό περιγράφεται από την πυκνότητα ύλης-ενέργειας ρ και πίεση p. Το ρευστό μπορεί να κινείται, αλλά για να διατηρείται η ομοιομορφία του, οι σχετικές κινήσεις μεταξύ των σωματιδίων θα πρέπει να είναι αμελητέες και η κίνηση του ρευστού να χαρακτηρίζεται από μια κοινή ταχύτητα κίνησης με τετραδιάνυσμα v^μ. Παρ’ όλο που ξέρουμε ότι οι γαλαξίες δεν ακολουθούν απόλυτα αυτό το μοντέλο, οι παρεκλίσεις από αυτό είναι εντυπωσιακά μικρές: οι σχετικές ταχύτητες κίνησης των γαλαξιών μέσα στις τοπικές ομάδες τους μπορεί να φτάνει το ένα χιλιοστό της ταχύτητας του φωτός αλλά είναι πολύ μικρότερες από αυτή της κοσμικής διαστολής που συγκρίνεται με την ταχύτητα του φωτός.

Στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας, η κατανομή ύλης και ενέργειας στο σύμπαν θα πρέπει να περιγράφεται από ένα τανυστή. Η απλούστερη μορφή τανυστή η οποία περιγράφει την ομοιόμορφη κίνηση ενός τέλειου ρευστού μέσα σε ένα καμπύλο βαρυτικό υπόβαθρο είναι η ακόλουθη

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)\, v_\mu v_\nu - p\, g_{\mu\nu}\,. \tag{2.19}$$

Ο τανυστής αυτός ονομάζεται τανυστής ενέργειας-ορμής, και η παραπάνω έκφραση είναι αυτή που χρησιμοποιείται κατά κύριο λόγο στην Κοσμολογία. Η ποσότητα $v_\mu = g_{\mu\rho}\, v^\rho$ είναι απλώς η συναλλοίωτη μορφή του τετραδιανύσματος της ταχύτητας με τον δείκτη κάτω. Μια που προτιμητέα συστήματα αναφοράς δεν υπάρχουν, μπορούμε να διαλέξουμε αυτό που απλοποιεί περισσότερο την ανάλυσή μας. Τοποθετούμε λοιπόν το σύστημα αναφοράς μας πάνω σε ένα σωματίδιο του ρευστού, γεγονός που καθιστά το σωματίδιο, άρα και το ρευστό στο σύνολό του, χωρικά ακίνητο. Μόνο η χρονική συνιστώσα του τετραδιανύσματος ταχύτητας είναι μη μηδενική, και αυτή μπορούμε να την κανονικοποιήσουμε για απλότητα στην μονάδα, γράφοντας τελικά: $v^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Με την επιλογή αυτή, ο τανυστής ενέργειας-ορμής παίρνει την μορφή

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)\, g_{\mu\rho}\, v^\rho\, g_{\nu\sigma}\, v^\sigma - p\, g_{\mu\nu} = (\rho + p)\, g_{\mu 0}\, g_{\nu 0} - p\, g_{\mu\nu}\,. \tag{2.20}$$

Όπως και κάθε τανυστής δεύτερης τάξης, ο τανυστής ενέργειας-ορμής μπορεί να γραφεί σαν ένας πίνακας, στην προκειμένη περίπτωση διάστασης 4×4, εάν χρησιμοποιήσουμε τον μετρικό τανυστή (2.15) για το σύμπαν[1]

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_{11}\, p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_{22}\, p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g_{33}\, p \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Τόσο στην Νευτώνια θεωρία όσο και στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, η διατήρηση της ενέργειας, της μάζας και της ορμής παίζει έναν ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο. Μετά την ενοποίηση όλων αυτών των ποσοτήτων στα πλαίσια της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, αναμένουμε ένας τέτοιος νόμος διατήρησης της ενέργειας – ως μία οντότητα πλέον – να έχει την μορφή

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0\,. \tag{2.22}$$

Σε επίπεδο χωρόχρονο, ο παραπάνω νόμος είναι απόλυτα σωστός, όχι όμως και σε καμπύλο χωρόχρονο όπως αυτόν της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Σε μια τέτοια περίπτωση,

[1] Από εδώ και πέρα, υιοθετούμε το φυσικό σύστημα ή αλλιώς το Heavyside-Lorentz σύστημα μονάδων, και θέτουμε $c = 1$.

ο παραπάνω νόμος διατήρησης συμπληρώνεται ως εξής:

$$D^\nu T_{\mu\nu} \equiv g^{\nu\rho}\left(\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \Gamma^\alpha_{\mu\rho}\,T_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\rho\nu}\,T_{\mu\alpha}\right) = 0\,, \tag{2.23}$$

όπου D_ν η γνωστή ως 'συναλλοίωτη παράγωγος' και $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ τα λεγόμενα σύμβολα Christoffel, που δίνονται συναρτήσει του μετρικού τανυστή και των παραγώγων του

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta}\right). \tag{2.24}$$

Σε ένα επίπεδο χωρόχρονο, όπως για παράδειγμα αυτόν της Εξ. (2.1), όλες οι συνιστώσες του μετρικού τανυστή είναι σταθερές – ανεξάρτητες των συντεταγμένων – και οι παράγωγοί τους είναι μηδέν. Το γεγονός αυτό οδηγεί στον τετριμμένο μηδενισμό των συμβόλων Christoffel και στην απλοποίηση του νόμου διατήρησης της ενέργειας, όπως αναμένεται.

2.4 Οι Εξισώσεις Πεδίου του Einstein

Η επιθυμία του Einstein ήταν να συσχετίσει τη δομή του χωρόχρονου με την κατανομή ύλης και ενέργειας μέσα σε αυτό. Επιπλέον, η εξίσωση που θα έδινε αυτή την συσχέτιση έπρεπε να εκφράζεται συναρτήσει τανυστών της ίδιας τάξης, ώστε να παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τυχαίους μετασχηματισμούς, όπως κάθε αληθινός νόμος της φύσης οφείλει να κάνει. Ενώ ένας τανυστής ενέργειας ήταν σχετικά εύκολο να κατασκευαστεί, όπως είδαμε παραπάνω, η κατασκευή ενός κατάλληλου βαρυτικού τανυστή και ο τρόπος συσχέτισής του με τον $T_{\mu\nu}$ παρέμεναν ασαφή.

Η Νευτώνια θεωρία, στην οποία η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας όφειλε να καταλήγει στο όριο του πολύ ασθενούς βαρυτικού πεδίου, έδωσε στον Einstein την έμπνευση για την φύση του βαρυτικού αυτού τανυστή. Όπως ξέρουμε, το βαρυτικό δυναμικό $\Phi(r)$ ικανοποιεί τον νόμο του Poisson, ο οποίος το συνδέει με την πυκνότητα μάζας που το δημιούργησε,

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \tag{2.25}$$

όπου G η βαρυτική σταθερά του Νεύτωνα. Στα πλαίσια της Νευτώνιας θεωρίας το δυναμικό $\Phi(r)$ είναι η απλούστερη ποσότητα που μπορεί να περιγράψει τη μορφή του βαρυτικού πεδίου. Εαν λάβουμε υπόψη μας ότι στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας τον ρόλο αυτό τον παίζει ο μετρικός τανυστής $g_{\mu\nu}$, η παραπάνω εξίσωση υποδεικνύει ότι ο βαρυτικός τανυστής που ζητούσε ο Einstein όφειλε να περιέχει μέχρι δεύτερες παραγώγους του $g_{\mu\nu}$. Ο τανυστής καμπυλότητας του Riemann, τον οποίο συναντήσαμε παραπάνω, και ο οποίος ορίζεται ως

$$R^\rho{}_{\mu\sigma\nu} = \frac{\partial\Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial\Gamma^\rho_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\rho_{\alpha\sigma}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\sigma}\,, \tag{2.26}$$

φαινόταν να αποτελεί ένα καλό σημείο αφετηρίας, μια που ήταν ήδη γνωστό ότι μπορούσε να περιγράψει την καμπυλότητα μιας γεωμετρίας, και επιπλέον περιείχε μέχρι δεύτερες παραγώγους του μετρικού τανυστή. Ο τανυστής όμως του Riemann είχε διαφορετική τάξη από αυτή του τανυστή ενέργειας-ορμής. Ο τανυστής του Ricci όμως, ο οποίος προκύπτει από τον τανυστή του Riemann μετά από συστολή δύο δεικτών

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\rho}_{\alpha\rho}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\rho}\,, \tag{2.27}$$

ήταν όντως της ίδιας τάξης με τον $T_{\mu\nu}$, μια που είχε και αυτός δύο μόνο ελεύθερους δείκτες. Ποια όμως ήταν η συσχέτιση ανάμεσα στις δύο αυτές ποσότητες; Ο Einstein κατάφερε να κατασκευάσει έναν καινούριο τανυστή, συναρτήσει του τανυστή Ricci $R_{\mu\nu}$ και της βαθμωτής ποσότητας του Ricci R – η τελευταία ποσότητα δεν είναι τίποτα άλλο παρά η συστολή των δύο δεικτών του τανυστή Ricci με την βοήθεια του μετρικού τανυστή: $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. Ο τανυστής αυτός φέρει το όνομα του Einstein και έχει την μορφή

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R\,. \tag{2.28}$$

Ο Einstein απέδειξε επίσης ότι ο παραπάνω τανυστής ικανοποιεί την ίδια εξίσωση με τον τανυστή ενέργειας-ορμής, δηλαδή $D_\nu G_{\mu\nu} = 0$. Μια που η εξίσωση αυτή δεν είναι παρά μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, οι δύο ποσότητες οφείλουν να είναι η μία ανάλογη της άλλης, και άρα να ικανοποιούν την εξίσωση

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R = 8\pi G\, T_{\mu\nu}\,. \tag{2.29}$$

Η σταθερά αναλογίας $8\pi G$ επιλέχθηκε κατάλληλα από τον Einstein ώστε, στο όριο του ασθενούς βαρυτικού πεδίου, η παραπάνω εξίσωση να μας δίνει την εξίσωση Poisson. Η Εξ. (2.29), λόγω των δύο ελεύθερων δεικτών, είναι στην πραγματικότητα ένα σύστημα εξισώσεων, και είναι γνωστές ως οι εξισώσεις του βαρυτικού πεδίου του Einstein. Διατυπώθηκαν στην τελική τους μορφή το 1916, και συνδέουν την μορφή του βαρυτικού πεδίου με την κατανομή της ενέργειας μέσα σε αυτό.

2.5 Οι εξισώσεις Friedmann για το σύμπαν

Οι εξισώσεις πεδίου του Einstein μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την μελέτη μιας πληθώρας βαρυτικών συστημάτων. Εδώ θα περιοριστούμε στην περίπτωση του εξελισσόμενου στο χρόνο σύμπαντος. Χρησιμοποιώντας το βαρυτικό υπόβαθρο που περιγράφει το σύμπαν μας, Εξ. (2.15), θα παραγάγουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις πεδίου. Η μορφή αυτή των εξισώσεων του Einstein είναι γνωστή ως εξισώσεις Friedmann, και καθορίζουν την δυναμική εξέλιξη του σύμπαντος μέσω της λύσης για τον συντελεστή κλίμακας $a(t)$.

Το σημείο-αφετηρία στον υπολογισμό μας είναι ο μετρικός τανυστής $g_{\mu\nu}$ του στοιχείου μήκους του χωρόχρονου Robertson-Walker

$$g_{00} = 1\,, \quad g_{11} = -\frac{a^2}{1-kr^2}\,, \quad g_{22} = -a^2r^2\,, \quad g_{33} = -a^2r^2\sin^2\theta\,, \tag{2.30}$$

καθώς και ο αντίστροφός του $g^{\mu\nu}$

$$g^{00} = 1\,, \quad g^{11} = -\frac{1-kr^2}{a^2}\,, \quad g^{22} = -\frac{1}{a^2r^2}\,, \quad g^{33} = -\frac{1}{a^2r^2\sin^2\theta}\,. \tag{2.31}$$

Μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι τα στοιχεία του μετρικού τανυστή και του αντιστρόφου του ικανοποιούν όντως την εξίσωση (2.5). Ισοδύναμα, εάν οι δύο αυτές ποσότητες γραφούν σε μορφή πίνακα, το γινόμενό τους δίνει μονάδα. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, μπορούμε να υπολογίσουμε τα σύμβολα Christoffel με την βοήθεια της Εξ. (2.24). Οι μη μηδενικές συνιστώσες τους προκύπτουν να είναι

$$\begin{gathered}
\Gamma^0_{11} = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}\,, \quad \Gamma^0_{22} = a\dot{a}r^2\,, \quad \Gamma^0_{33} = a\dot{a}\,r^2\sin^2\theta\,, \\
\Gamma^1_{11} = \frac{kr}{1-kr^2}\,, \quad \Gamma^1_{22} = -r(1-kr^2)\,, \quad \Gamma^1_{33} = -r(1-kr^2)\sin^2\theta\,, \\
\Gamma^1_{01} = \Gamma^2_{02} = \Gamma^3_{03} = \frac{\dot{a}}{a}\,, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}\,, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta\,, \quad \Gamma^3_{23} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,,
\end{gathered} \tag{2.32}$$

όπου η τελεία $(\dot{\ })$ δηλώνει παραγώγιση ως προς τον χρόνο. Παραδείγματος χάρη, η πρώτη μη μηδενική συνιστώσα υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{11} &= \frac{1}{2}\,g^{0\beta}\left(\frac{\partial g_{\beta 1}}{\partial r} + \frac{\partial g_{1\beta}}{\partial r} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^\beta}\right) \\
&= \frac{1}{2}\,g^{00}\left(\frac{\partial g_{01}}{\partial r} + \frac{\partial g_{10}}{\partial r} - \frac{\partial g_{11}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{11}}{\partial t} = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}\,.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της εξίσωσης (2.27), υπολογίζουμε τις μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή Ricci

$$\begin{gathered}
R_{00} = -3\,\frac{\ddot{a}}{a}\,, \qquad R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2}\,, \\
R_{22} = r^2\,(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)\,, \qquad R_{33} = r^2\,(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)\sin^2\theta\,,
\end{gathered} \tag{2.34}$$

καθώς και την έκφραση του βαθμωτού Ricci

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right)\,. \tag{2.35}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω με την έκφραση του τανυστή ενέργειας-ορμής (2.21), μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τις μη μηδενικές συνιστώσες των εξισώσεων του Einstein (2.28). Σύμφωνα με τους υπολογισμούς μας, η (00)-συνιστώσα οδηγεί στην ακόλουθη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\,\rho\,, \tag{2.36}$$

ενώ όλες οι χωρικές συνιστώσες (ii) οδηγούν στην κοινή εξίσωση

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G p\,. \tag{2.37}$$

Οι δύο παραπάνω διαφορικές εξισώσεις αποτελούν τις εξισώσεις Friedmann του σύμπαντος. Η δεύτερη μπορεί να γραφεί πιο απλά εάν χρησιμοποιήσουμε την πρώτη για να απαλείψουμε τον όρο $\dot{a}^2/a^2$, οπότε και παίρνει την μορφή

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\,(\rho + 3p)\,. \tag{2.38}$$

Στην μορφή αυτή, η παραπάνω εξίσωση είναι γνωστή σαν εξίσωση Raychaudhuri ή εξίσωση επιτάχυνσης μια που μόνο η δεύτερη παράγωγος του συντελεστή κλίμακας εμφανίζεται στην έκφρασή της.

Οι Εξ. (2.36) και (2.38) καθορίζουν την μεταβολή του συντελεστή κλίμακας με τον χρόνο συναρτήσει της πυκνότητας ενέργειας και πίεσης του τέλειου ρευστού που περιέχει το σύμπαν. Οι δύο αυτές εξισώσεις συνοδεύονται από μία τρίτη, απουσία της οποίας είναι αδύνατο να λυθούν οι δύο πρώτες. Αυτή είναι η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας (2.23), η οποία μπορούμε να δούμε ότι παίρνει την λεπτομερή μορφή

$$\frac{d\rho}{dt} + 3\,\frac{\dot{a}}{a}\,(\rho + p) = 0\,. \tag{2.39}$$

Στην παραπάνω μορφή της, η εξίσωση αυτή ονομάζεται και εξίσωση ρευστού. Επιπλέον, λόγω της ομοιομορφίας της κατανομής ενέργειας και ύλης στο σύμπαν, τόσο η πυκνότητα ενέργειας όσο και η πίεση θεωρούνται συναρτήσεις μόνο της χρονικής συντεταγμένης t. Όπως μπορούμε να δούμε από την Εξ. (2.39), δύο είναι οι όροι που συνεισφέρουν στην μεταβολή της πυκνότητας της ενέργειας του σύμπαντος: ο πρώτος όρος μέσα στην παρένθεση δίνει την μείωση της πυκνότητας ενέργειας λόγω της διαστολής του σύμπαντος, όπως είναι φυσικό· ο δεύτερος όρος δίνει την μεταβολή (απώλεια, συνηθέστερα) ενέργειας λόγω του έργου που εκτελεί στο σύμπαν η πίεση της ύλης που περιέχει.

Το σύστημα των τριών εξισώσεων, (2.36), (2.38) και (2.39), περιέχει τρεις άγνωστες ποσότητες, a, ρ και p, άρα το σύστημα φαίνεται να είναι καλά ορισμένο. Μια πιο προσεκτική ματιά όμως φανερώνει ότι οι τρεις αυτές εξισώσεις δεν είναι όλες ανεξάρτητες: αν ξεκινήσει κανείς από την Εξ. (2.36) και την παραγωγήσει ως προς τον χρόνο, συνδυάζοντάς την παράλληλα με την εξίσωση για τη διατήρηση της ενέργειας, καταλήγει ευθύς αμέσως στην εξίσωση επιτάχυνσης. Η παρατήρηση αυτή φαίνεται να καθιστά την εύρεση λύσης αδύνατη, μια που ο αριθμός των ανεξάρτητων εξισώσεων φαίνεται τώρα να είναι μικρότερος από τον αριθμό των αγνώστων παραμέτρων. Η εντύπωση όμως αυτή είναι απατηλή, μια που και οι τρεις αυτές παράμετροι δεν είναι όλες ανεξάρτητες. Ο τελευταίος κρίκος που θα πρέπει να προσθέσουμε στην ανάλυσή μας είναι η καταστατική εξίσωση, που συνδέει την πυκνότητα ενέργειας με την πίεση του τέλειου ρευστού

$$p = w\,\rho\,. \tag{2.40}$$

Ο συντελεστής αναλογίας w μπορεί στην γενικότητα να είναι επίσης μια συνάρτηση του χρόνου. Στα μοντέλα που θα μελετήσουμε όμως στο επόμενο κεφάλαιο, ο συντελεστής αυτός θα είναι μια σταθερά. Στην περίπτωση αυτή, χρήση της καταστατικής εξίσωσης οδηγεί στην ακόλουθη εναλλακτική μορφή της εξίσωσης διατήρησης της ενέργειας

$$\frac{\dot\rho}{\rho} = -3\,(1+w)\,\frac{\dot a}{a}\,, \tag{2.41}$$

και στην λύση

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^{3(1+w)}}\,, \tag{2.42}$$

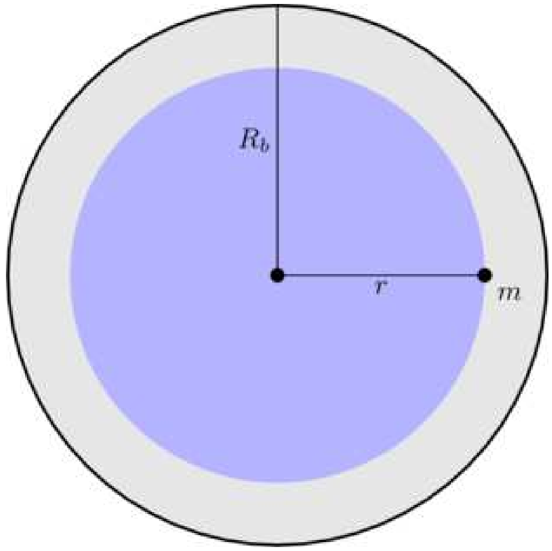
όπου ρ_0 μια σταθερά ολοκλήρωσης.

Οι δύο διαφορικές εξισώσεις (2.36) και (2.38), σε συνδυασμό με την παραπάνω έκφραση για την πυκνότητα ενέργειας αλλά και την καταστατική εξίσωση, οδηγούν στον προσδιορισμό της μορφής του συντελεστή κλίμακας $a(t)$ και στην δυναμική εξέλιξη του σύμπαντος με τον χρόνο. Υπενθυμίζεται για άλλη μια φορά ότι οι παραπάνω εξισώσεις ισχύουν μόνο σε μεγάλη κλίμακα, και σε καμμία περίπτωση δεν καθορίζουν την κίνηση και συμπεριφορά των διαφόρων έμμαζων σωμάτων σε μικρότερες κλίμακες μήκους.

2.6 Νευτώνια Μηχανική

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας είναι μια θεωρία απαράμιλλης ομορφιάς και μαθηματικής ακρίβειας που περιγράφει τη δύναμη της βαρύτητας και θέτει τις βάσεις της Κοσμολογίας. Ευτυχώς, όμως, για τους μη γνώστες της θεωρίας αυτής, οι βασικές εξισώσεις της Κοσμολογίας, οι δύο εξισώσεις Friedmann και η εξίσωση ρευστού, μπορούν να διατυπωθούν και με εναλλακτικό τρόπο. Στην παράγραφο αυτή, θα επιχειρήσουμε να παραγάγουμε τις εξισώσεις αυτές χρησιμοποιώντας Νευτώνια Μηχανική.

Υποθέτοντας όπως και πριν ομοιόμορφη κατανομή ύλης και σφαιρική συμμετρία για το σύμπαν, θεωρούμε μια σφαιρική κατανομή μάζας, με ακτίνα r και πυκνότητα ενέργειας ρ,



Σχήμα 8: Σφαιρική κατανομή μάζας M στο σύμπαν. Μόνο η μάζα εντός του σφαιρικού κελύφους ασκεί βαρυτική δύναμη στο σωματίδιο μάζας m.

που συμμετέχει στην διαστολή του σύμπαντος. Σε μια δεδομένη χρονική στιγμή, σύμφωνα με το γνωστό ως 'θεώρημα κελύφους' του Νεύτωνα, ένα σωματίδιο μάζας m, που βρίσκεται στα όρια αυτής της κατανομής, δέχεται βαρυτική δύναμη μόνο από την μάζα που περιέχεται μέσα στην σφαίρα αυτή, και όχι από την μάζα εκτός αυτής (Σχήμα 8). Η δύναμη αυτή έχει τη μορφή

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{G\,(4\pi/3)r^3\rho\,m}{r^2} = \frac{4\pi}{3}\,G\rho\,rm\,, \tag{2.43}$$

ενώ η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια δίνεται από την έκφραση

$$V_E = -\frac{GMm}{r} = -\frac{4\pi}{3}\,G\rho\,r^2 m\,. \tag{2.44}$$

Η κινητική ενέργεια τέλος του σωματιδίου, λόγω της ακτινικής του κίνησης προς μεγαλύτερα r, δίνεται από

$$K_E = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2\,. \tag{2.45}$$

Στο σημείο αυτό, θα πρέπει να ορίσουμε την έννοια της φυσικής απόστασης μέσα στο διαστελλόμενο χωρόχρονο. Σε έναν επίπεδο χωρόχρονο, όπως αυτόν της Εξ. (2.1), η φυσική, χωρική απόσταση d ανάμεσα σε δύο σημεία ταυτίζεται με αυτή που αντιστοιχεί στην μεταβολή των συντεταγμένων $\Delta\vec{x}$, καθώς το σωματίδιο κινείται από το σημείο 1 στο σημείο 2. Στην περίπτωση του διαστελλόμενου σύμπαντος όμως, εκτός από την πραγματική μετατόπιση του σωματιδίου, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη και η διαστολή του ίδιου του χωρόχρονου. Η φυσική λοιπόν απόσταση ορίζεται τότε ως

$$\vec{d} = a(t)\,(\Delta\vec{x})\,. \tag{2.46}$$

Στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας, αυτό γίνεται φανερό από το γεγονός ότι στον ορισμό του αναλλοίωτου διαστήματος ds^2, Εξ. (2.15), το χωρικό διάστημα ανάμεσα σε δύο σημεία δεν ορίζεται σαν αυτό που απλώς αντιστοιχεί στην μεταβολή των συντεταγμένων $(dr, d\theta, d\varphi)$, αλλά αυτό στο οποίο οι κατάλληλοι πολλαπλασιαστικοί, γεωμετρικοί παράγοντες – r, $\sin\theta$ και τώρα $a(t)$ – έχουν ληφθεί σωστά υπόψη.

Στην περίπτωση δε που το σύστημα αναφοράς συν-κινείται με ένα σωματίδιο που απλώς συμμετέχει στην διαστολή του σύμπαντος, η μόνη μεταβολή στην θέση του θα οφείλεται στην διαστολή του χωρόχρονου και όχι στην μετακίνησή του από ένα σημείο σε ένα άλλο. Εάν λοιπόν επανέλθουμε στο σωματίδιο μάζας m, που βρίσκεται στα όρια του σφαιρικής κατανομής μάζας M, μπορούμε να γράψουμε για την ταχύτητά του: $\dot{r} = \dot{a}\,x$. Η συνολική του ενέργεια, η οποία φυσικά διατηρείται, δίνεται τότε από την έκφραση

$$U = K_E + V_E = \frac{1}{2}\,m\,x^2\,\dot{a}^2 - \frac{4\pi}{3}\,G\,\rho\,x^2 a^2 m\,. \tag{2.47}$$

Εάν αναδιατάξουμε την παραπάνω εξίσωση, και θέσουμε την σταθερή ποσότητα $-2U/mx^2$ ίση με k, καταλήγουμε στη μορφή

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\,\rho\,, \tag{2.48}$$

που δεν είναι παρά η πρώτη εξίσωση Friedmann.

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση, ως προς τον χρόνο, για τον συντελεστή κλίμακας $a(t)$ δεν μπορεί να λυθεί εάν δεν συνοδεύεται από μία εξίσωση για την ίδια την πυκνότητα ενέργειας $\rho(t)$. Μια τέτοια εξίσωση μπορεί να παραχθεί από τον πρώτο νόμο της Θερμοδυναμικής

$$dE + pdV = TdS\,, \tag{2.49}$$

όπου E είναι η ενέργεια του σύμπαντος, p η πίεση, V ο όγκος, T η θερμοκρασία και S η εντροπία. Όπως ξέρουμε

$$E = Mc^2 = \rho V c^2 = \frac{4\pi}{3}\,a^3\rho\,, \tag{2.50}$$

όπου θέσαμε και πάλι για απλότητα $c = 1$. Η μεταβολή στο χρόνο της παραπάνω ποσότητας δίνεται από

$$\frac{dE}{dt} = 4\pi a^2\dot{a}\rho + \frac{4\pi}{3}\,a^3\dot{\rho}\,, \tag{2.51}$$

ενώ $dV = 4\pi a^2 \dot{a}$. Μια βασική αρχή της Κοσμολογίας είναι ότι η διαστολή του σύμπαντος είναι 'αδιαβατική': κατά τη διαστολή του στο χρόνο, κανένα ποσό θερμότητας ή ενέργειας δεν προσθέτεται στο σύμπαν (από ποιον και από πού, άλλωστε;) αλλά ούτε και αφαιρείται από αυτό. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η εντροπία του σύμπαντος να διατηρείται σταθερή, $dS = 0$. Χρησιμοποιώντας όλα τα παραπάνω, η Εξ. (2.49) παίρνει τη μορφή της εξίσωσης ρευστού

$$\dot{\rho} + 3\,\frac{\dot{a}}{a}\,(\rho + p) = 0\,, \tag{2.52}$$

που διατυπώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο με χρήση μιας εναλλακτικής εξίσωσης διατήρησης της ενέργειας, αυτής της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας, Εξ. (2.23).

Η δεύτερη εξίσωση Friedmann, ή η εξίσωση επιτάχυνσης, μπορεί τώρα να παραχθεί εύκολα με παραγώγιση της πρώτης,

$$\frac{2\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{2\dot{a}^3}{a^3} - \frac{2k\dot{a}}{a^3} = \frac{8\pi G}{3}\,\dot{\rho} = -8\pi G\,(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a}\,. \tag{2.53}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη με $a/(2\dot{a})$ και κάνοντας και πάλι χρήση της πρώτης εξίσωσης Friedmann, φτάνουμε στη μορφή

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\,(\rho + 3p)\,, \tag{2.54}$$

όπως αναμένεται. Όπως και στην ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου, το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων οδηγεί σε λύση με την χρήση της καταστατικής εξίσωσης $p = w\rho$. Στο επόμενο κεφάλαιο, θα μελετήσουμε μια σειρά από κοσμολογικά μοντέλα στα οποία διαφορετικές καταστατικές εξισώσεις, ή ισοδύναμα διαφορετικές επιλογές για τον συντελεστή αναλογίας w, αρκούν για να οδηγήσουν σε ριζικά διαφορετικές ιδιότητες για το σύμπαν. Σαν ένα προοίμιο των όσων θα συζητήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο, προσθέτουμε εδώ το ακόλουθο σχόλιο: σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση, η εξ' ορισμού θετική πυκνότητα ενέργειας στο σύμπαν επιβραδύνει τον ρυθμό διαστολής του σύμπαντος. Εάν $w > 0$, η πίεση συνεισφέρει και αυτή στην επιβράδυνση της διαστολής, ενώ εάν $w < 0$, η πίεση δουλεύει προς την αντίθετη κατεύθυνση. Στην ειδική περίπτωση που το w είναι μικρότερο από -1/3, $\rho + 3p < 0$, και η διαστολή του σύμπαντος προκύπτει να είναι επιταχυνόμενη – περισσότερα όμως για αυτό στο επόμενο κεφάλαιο.

2.7 Η παράμετρος του Hubble

Όπως έχει γίνει αντιληπτό μέχρι τώρα, ο συντελεστής κλίμακας $a(t)$ είναι μια πολύ βασική ποσότητα για την Κοσμολογία. Ακόμα και όταν η τοπολογία του σύμπαντος δεν θεωρείται σφαιρική, ο συντελεστής κλίμακας συνεχίζει να αποκαλείται ‘‘ακτίνα του σύμπαντος’’. Μέσω των εξισώσεων Friedmann, η ακριβής του μορφή μπορεί να προσδιοριστεί και να μας δώσει πολύτιμες πληροφορίες για το παρελθόν και μέλλον του σύμπαντός μας. Επιπλέον, ο συντελεστής κλίμακας ορίζει την φυσική απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία του διαστελλόμενου σύμπαντος, και καθορίζει τη μεταβολή της απόστασης αυτής με τον χρόνο.

Μια εξίσου σημαντική ποσότητα για την Κοσμολογία είναι η παράμετρος Hubble, η οποία ορίζεται μέσω του συντελεστή κλίμακας ως εξής

$$H = \frac{\dot{a}}{a}\,. \tag{2.55}$$

Η παράμετρος Hubble δίνει τον ρυθμό διαστολής του σύμπαντος, και, όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια, η τιμή της σχετίζεται επίσης με την ηλικία του σύμπαντος. Είναι αρκετά σύνηθες η βασική εξίσωση Friedmann να εκφράζεται συναρτήσει της παραμέτρου Hubble αντί του συντελεστή κλίμακας

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\,\rho - \frac{k}{a^2}\,. \tag{2.56}$$

Η τιμή της παραμέτρου Hubble είναι σταθερή στον χώρο, όπως απαιτεί η υπόθεση του ομοιογενούς και ισότροπου σύμπαντος, είναι όμως χρονο-εξαρτώμενη και έτσι έχει διαφορετική τιμή σε διαφορετικές εποχές της εξέλιξης του σύμπαντος. Η τιμή της την σημερινή εποχή H_0 μπορεί να θεωρηθεί σταθερά, και αποκαλείται σταθερά Hubble.

Την παράμετρο αλλά και τη σταθερά Hubble τις είχαμε συναντήσει και στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η παράμετρος Hubble ήταν η σταθερά αναλογίας στον νόμο του Hubble που διέπει την απομάκρυνση των γαλαξιών: $\vec{v} = H\,\vec{d}$. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι πρόκειται για την ίδια παράμετρο, την οποία ορίζουμε εδώ με περισσότερη ακρίβεια. Σύμφωνα με αυτά που είπαμε παραπάνω, η φυσική θέση ενός σωματιδίου μέσα στο διαστελλόμενο σύμπαν δίνεται από τη σχέση: $\vec{d} = a\,\vec{x}$. Τότε, μπορούμε να γράψουμε για την ταχύτητα απομάκρυνσης

$$\vec{v} = \dot{\vec{d}} = \dot{a}\,\vec{x} = \frac{\dot{a}}{a}\,(a\,\vec{x}) = H\,\vec{d}, \tag{2.57}$$

που δεν είναι παρά ο νόμος του Hubble για την ταχύτητα απομάκρυνσης των γαλαξιών μέσα στο σύμπαν. Παρατηρούμε ότι, σε αντίθεση με τον στατικό χώρο όπου η ταχύτητα κίνησης ενός σώματος είναι ανάλογη της μεταβολής του διανύσματος θέσης, στον διαστελλόμενο χωρόχρονο η ταχύτητα προκύπτει να είναι ανάλογη του διανύσματος θέσης – ενώ στον στατικό χώρο η κίνηση ενός σώματος είναι το αποτέλεσμα της αλλαγής των συντεταγμένων της θέσης του, στον διαστελλόμενο χώρο οι συντεταγμένες του παραμένουν σταθερές αλλά διαστέλλεται το ίδιο το υπόβαθρο.