3 ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ: Κοσμολογικά Μοντέλα

3.1 Βασικές Εξισώσεις

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι εξισώσεις του Einstein για ένα εξελισσόμενο στο χρόνο σύμπαν, που περιγράφεται από το στοιχείο μήκους Robertson-Walker και περιέχει ένα τέλειο ρευστό, παίρνουν την μορφή των εξισώσεων Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\,\rho\,, \qquad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\,(\rho + 3p)\,. \tag{3.1}$$

Για την εύρεση της μορφής του συντελεστή κλίμακας του σύμπαντος, $a(t)$, μόνο η μία από τις δύο παραπάνω εξισώσεις χρειάζεται να λυθεί. Θα πρέπει όμως να συνοδεύεται από την εξίσωση ρευστού (2.39), η οποία σε συνδυασμό με την καταστατική εξίσωση $p = w\rho$, όπου w ένας σταθερός αριθμός, οδηγεί στην λύση

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^{3(1+w)}}\,, \tag{3.2}$$

όπου ρ_0 μια σταθερά ολοκλήρωσης. Η τιμή της σταθεράς w καθορίζει το είδος του ρευστού που περιέχει το σύμπαν και, όπως θα δούμε, την εξέλιξή του στον χρόνο. Μερικές χαρακτηριστικές τιμές της σταθεράς αυτής είναι:

- $w = 0$: στην περίπτωση αυτή το σύμπαν περιέχει μόνο ''σκόνη'', μη ρελατιβιστική δηλαδή ύλη (matter) που δεν εξασκεί καμμία πίεση. Στην κατηγορία αυτή ανήκει τόσο η συνηθισμένη ορατή ύλη όσο και η σκοτεινή. Τότε:

$$\rho_m(t) = \frac{\rho_0^m}{a(t)^3}\,, \tag{3.3}$$

- $w = 1/3$: στην περίπτωση αυτή το σύμπαν περιέχει αποκλειστικά και μόνο ''ακτινοβολία'', ρελατιβιστικά δηλαδή σωματίδια (radiation) που χαρακτηρίζονται από μη μηδενική πίεση. Τότε:
$$\rho_r(t) = \frac{\rho_0^r}{a(t)^4}\,, \tag{3.4}$$

- $w = -1$: στην περίπτωση αυτή, όπως εύκολα μπορούμε να δούμε από την Εξ. (2.39), η πυκνότητα ενέργειας του σύμπαντος δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο. Η σταθερή αυτή, και ομοιόμορφα κατανεμημένη, ενέργεια ονομάζεται ''ενέργεια κενού'' ρ_v (vacuum energy) ή κοσμολογική σταθερά Λ (cosmological constant). Στην κατηγορία αυτή είναι πιθανό να ανήκει η σκοτεινή ενέργεια του σύμπαντος, αυτό όμως δεν έχει αποδειχθεί ακόμη.

Στην πραγματικότητα, το σύμπαν περιέχει ένα συνδυασμό των παραπάνω συστατικών, ή και άλλων με διαφορετική καταστατική εξίσωση, οπότε η πρώτη εξίσωση Friedmann μπορεί να γραφεί ως εξής
$$H^2(t) = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\,(\rho_m + \rho_r + \rho_v + ...) - \frac{k}{a^2}\,, \tag{3.5}$$
όπου $\rho_{total} = \rho_m + \rho_r + \rho_v + ...$ η συνολική πυκνότητα ενέργειας του σύμπαντος. Όσο περισσότερα ''συστατικά'' περιλαμβάνουμε στην παραπάνω εξίσωση τόσο πιο ρεαλιστικό, αλλά και περίπλοκο, γίνεται το μοντέλο και επομένως τόσο πιο δύσκολη η αναλυτική επίλυση του προβλήματος. Οι σύγχρονες κοσμολογικές μελέτες που σκοπό έχουν να οδηγήσουν σε ακριβείς προβλέψεις, που θα συγκριθούν με τα παρατηρησιακά δεδομένα, χρησιμοποιούν εξ' ολοκλήρου αριθμητική ανάλυση. Στην περίπτωση όμως απλουστευμένων κοσμολογικών μοντέλων όπου η εξίσωση Friedmann περιέχει ένα ή το πολύ δύο από τα παραπάνω συστατικά είναι δυνατή η αναλυτική επίλυση του μοντέλου.

Πριν να στραφούμε στην ανάλυση αυτών των μοντέλων, οφείλουμε σε αυτό το σημείο να κάνουμε μια παρατήρηση που αφορά την σχέση μεταξύ της καμπυλότητας του σύμπαντος και της πυκνότητας ενέργειας που περιέχει. Η πρώτη εξίσωση Friedmann μπορεί να γραφεί εναλλακτικά ως εξής:
$$\frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\,(\rho_{total} - \rho_c)\ , \tag{3.6}$$
όπου ρ_c είναι η λεγόμενη ''κρίσιμη πυκνότητα ενέργειας'' του σύμπαντος και ορίζεται μέσω της σχέσης
$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G} = 1.88\,h^2 \times 10^{-29}\,\mathrm{gr/cm^3}\,. \tag{3.7}$$
Η σταθερά h που εμφανίζεται στην παραπάνω εξίσωση δεν είναι παρά η αδιάστατη τιμή της παραμέτρου Hubble διαιρεμένη με το 100, δηλαδή
$$h \equiv \frac{H}{100\,(\mathrm{Km/sec})/\mathrm{Mpc}}\,. \tag{3.8}$$

Είναι αρκετά συνηθισμένο να συναντούμε την παράμετρο h σε κοσμολογικές εξισώσεις. Ο λόγος για τον οποίο ακολουθείται αυτή η τακτική είναι ότι η τιμή της παραμέτρου Ηυββλε καθορίζεται αποκλειστικά και μόνο από τις παρατηρήσεις, και η τιμή της ποικίλλει ανάλογα με την μέθοδο και την χρονολογία της μέτρησης.

Σύμφωνα με την Εξ. (3.6), το σύμπαν είναι επίπεδο, και επομένως $k = 0$, όταν η πυκνότητα ενέργειας ρ_{total} είναι ακριβώς ίση με την κρίσιμη τιμή της ρ_c. Αντίθετα, όταν $\rho_{total} > \rho_c$, έχουμε αναγκαστικά κλειστό σύμπαν με $k = +1$, ενώ όταν $\rho_{total} < \rho_c$, το σύμπαν είναι ανοιχτό και χαρακτηρίζεται από $k = -1$. Μια πολύ χρήσιμη παράμετρος είναι η παράμετρος Ω, η οποία ορίζεται ως

$$\Omega_{total} \equiv \frac{\rho_{total}}{\rho_c} = \begin{cases} >1\,, & k = +1 \\ =1\,, & k = 0 \\ <1\,, & k = -1\,. \end{cases} \tag{3.9}$$

3.2 Επίπεδα Κοσμολογικά Μοντέλα

Αρχίζουμε με την μελέτη των κοσμολογικών μοντέλων που περιγράφουν ένα επίπεδο σύμπαν ($k = 0$) και επομένως έχουν Ω_{total} ίσο με την μονάδα. Θα υποθέσουμε επιπλέον ότι το σύμπαν περιέχει ένα μόνο συστατικό με καταστατική εξίσωση $p = w\rho$ και πυκνότητα ενέργειας που δίνεται από την Εξ. (3.2). Αντικατάσταση της έκφρασης αυτής στην πρώτη εξίσωση Friedmann οδηγεί στη διαφορική εξίσωση

$$\frac{da}{a}\, a^{3(1+w)/2} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\,\rho_0}\, dt\,, \tag{3.10}$$

και στο αποτέλεσμα

$$a(t) \sim t^{2/3(1+w)} = \begin{cases} t^{2/3}\,, & \text{για } w = 0 \ \text{(ύλη)} \\ t^{1/2}\,, & \text{για } w = 1/3 \ \text{(ακτινοβολία)}\,. \end{cases} \tag{3.11}$$

Και στις δύο περιπτώσεις, ο συντελεστής κλίμακας του σύμπαντος διαστέλλεται με τον χρόνο επ' άπειρον, στην πρώτη όμως περίπτωση η διαστολή είναι πιο γρήγορη. Ο ρυθμός διαστολής δίνεται για την κάθε περίπτωση από την έκφραση

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \begin{cases} \frac{2}{3t}\,, & \text{για } w = 0 \ \text{(ύλη)} \\ \frac{1}{2t}\,, & \text{για } w = 1/3 \ \text{(ακτινοβολία)}\,. \end{cases} \tag{3.12}$$

Είναι φανερό ότι, καθώς ο χρόνος μεγαλώνει, ο ρυθμός διαστολής μικραίνει, και για $t \to \infty$, ο ρυθμός τελικά μηδενίζεται. Η διαστολή επομένως του σύμπαντος και στις δύο αυτές περιπτώσεις είναι επιβραδυνόμενη. Η παράμετρος επιβράδυνσης q (deceleration parameter) φανερώνει την επιβράδυνση ή μη της διαστολής του σύμπαντος όπως αυτή περιγράφεται από ένα συγκεκριμένο κοσμολογικό μοντέλο και ορίζεται ως εξής:

$$q \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = \begin{cases} 1/2\,, & \text{για } w = 0 \text{ (ύλη)} \\ 1\,, & \text{για } w = 1/3 \text{ (ακτινοβολία)}\,. \end{cases} \tag{3.13}$$

Το μείον στην έκφραση του q έχει σαν αποτέλεσμα θετικές τιμές του να φανερώνουν επιβραδυνόμενη διαστολή του σύμπαντος και αρνητικές τιμές επιταχυνόμενη. Σύμφωνα με τις παραπάνω τιμές, $q^r > q^m$, και η διαστολή στη δεύτερη περίπτωση είναι πιο γρήγορα επιβραδυνόμενη από την πρώτη. Το επίπεδο κοσμολογικό μοντέλο μόνο με ύλη ($k = 0$ και $w = 0$) είναι γνωστό ως μοντέλο Einstein-de Sitter, πολλές φορές όμως στην βιβλιογραφία το ίδιο όνομα χρησιμοποιείται και για το επίπεδο μοντέλο μόνο με ακτινοβολία ($k = 0$ και $w = 1/3$).

Μια που το σύμπαν περιέχει τόσο ύλη όσο και ακτινοβολία, ένα ρεαλιστικό κοσμολογικό μοντέλο θα πρέπει να περιέχει ταυτόχρονα και τα δύο είδη πυκνότητας ενέργειας, ρ_m και ρ_r. Η αντίστοιχη λύση για τον συντελεστή κλίμακας μπορεί και πάλι να προσδιοριστεί αλλά είναι αρκετά πιο περίπλοκη. Μια πιο χρήσιμη τακτική είναι αυτή που προσδιορίζει την εποχή στην ιστορία του σύμπαντος όπου το καθένα από τα συστατικά αυτά κυριαρχεί. Μια που το σύμπαν διαστέλλεται, η τιμή του συντελεστή κλίμακας μεγαλώνει με τον χρόνο. Στην εποχή λοιπόν του αρχέγονου σύμπαντος, όπου η τιμή του $a(t)$ ήταν μικρή, η πυκνότητα ενέργειας της ακτινοβολίας, $\rho_r \sim 1/a^4$, κυριαρχούσε έναντι αυτής της πυκνότητας ύλης, $\rho_m \sim 1/a^3$. Όσο όμως η διαστολή συνεχίζεται, το ρ_r ελαττώνεται γρηγορότερα από το ρ_m, το οποίο κάποια στιγμή αρχίζει να κυριαρχεί έναντι του ρ_r. Μέχρι πριν από λίγα χρόνια, το καθιερωμένο κοσμολογικό μοντέλο περιελάμβανε μόνο τα δύο αυτά συστατικά, και θεωρούσε ότι το μεν ρ_r κυριαρχούσε στην αρχέγονη εποχή (radiation-dominated era) το δε ρ_m στη σημερινή εποχή που φαινόταν να κυριαρχείται από ύλη (matter-dominated era).

3.3 Η Αρχική Ανωμαλία

Πριν στραφούμε στην μελέτη των καμπύλων κοσμολογικών μοντέλων, ας σταθούμε για λίγο στις εκφράσεις (3.11) του συντελεστή κλίμακας για το επίπεδο σύμπαν που περιέχει είτε μη ρελατιβιστική ύλη είτε ακτινοβολία. Και στις δύο περιπτώσεις, ο συντελεστής κλίμακας μηδενίζεται όταν $t \to 0$. Στο σημείο αυτό, η αντίστοιχη πυκνότητα ενέργειας του σύμπαντος απειρίζεται, και μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι το σημείο αυτό αποτελεί μια πραγματική χωροχρονική ανωμαλία όπου όλες οι τροχιές των σωματιδίων τερματίζουν χωρίς δυνατότητα επέκτασης. Το σημείο αυτό είναι η λεγόμενη Αρχική Ανωμαλία του σύμπαντος (Big Bang). Μια που καμμιά πληροφορία δεν μπορεί να φτάσει σε εμάς από ότι υπήρξε πριν από εκείνη την χρονική στιγμή, το σημείο αυτό θεωρείται η αρχή της ιστορίας του σύμπαντός μας και συμβατικά το τοποθετούμε στο $t = 0$.

Υπάρχει τρόπος να αποφύγουμε την Αρχική Ανωμαλία του σύμπαντος; Σύμφωνα με τα πειραματικά δεδομένα, το σύμπαν διαστέλλεται, άρα $\dot{a} > 0$. Από την εξίσωση επιτάχυνσης (3.1)(β), συμπεραίνουμε ότι εάν $(\rho + 3p) > 0$, η διαστολή είναι επιβραδυνόμενη. Επομένως, η συνάρτηση $a(t)$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση του χρόνου που έχει όμως τα κοίλα προς τα κάτω. Εάν επεκτείνουμε την κάτω πλευρά της καμπύλης, αυτή αναπόφευκτα θα συναντήσει τον οριζόντιο άξονα (και άρα την τιμή $a = 0$) σε μια πεπερασμένη χρονική στιγμή πριν από την παρούσα. Η παρουσία μιας πραγματικής χωροχρονικής ανωμαλίας σε ένα σύμπαν με ύλη που ικανοποιεί την συνθήκη $(\rho+3p) > 0$ ήταν και το περιεχόμενο των singularity theorems που διατυπώθηκαν την δεκαετία του '60 από τους Hawking και Penrose. Η συνθήκη αυτή είναι η λεγόμενη ''ισχυρή συνθήκη ενέργειας'' (strong energy condition), και έχει αποδειχθεί ότι ικανοποιείται από κάθε συμβατική μορφή ενέργειας στο σύμπαν, συμπεριλαμβανομένων της μη ρελατιβιστικής ύλης και της ακτινοβολίας.

Δεν υπάρχει λοιπόν καμμιά ελπίδα; Ίσως και ναι... Η ύπαρξη της Αρχικής Ανωμαλίας προέκυψε από την χρήση των εξισώσεων του Einstein, οι οποίες όμως είναι κλασικές εξισώσεις περιγραφής της βαρύτητας και επομένως παύουν να ισχύουν σε πολύ μεγάλες τιμές της ενέργειας όπως στις πρώτες στιγμές της δημιουργίας του σύμπαντος. Μια κβαντική θεωρία βαρύτητας πιθανώς να μην παρουσιάζει πρόβλημα Αρχικής Ανωμαλίας. Ένα παράδειγμα αποτελεί η θεωρία των υπερχορδών: στα πλαίσια αυτής της θεωρίας, οι εξισώσεις πεδίου του Einstein τροποποιούνται από την παρουσία επιπλέον πεδίων (βαθμωτών, φερμιονικών και μποζονικών) όπως επίσης και ανώτερων βαρυτικών όρων, όπως ο λεγόμενος όρος Gauss-Bonnet

$$R^2_{GB} = R^{\mu\nu\rho\sigma}\, R_{\mu\nu\rho\sigma} - 4R^{\mu\nu}\, R_{\mu\nu} + R^2\,. \tag{3.14}$$

Οι επιπλέον όροι που εμφανίζονται μπορούν εναλλακτικά να ερμηνευθούν ως καινούριοι όροι ενέργειας στο σύμπαν, οι οποίοι δεν είναι απαραίτητο να ικανοποιούν την ισχυρή συνθήκη $(\rho + 3p) > 0$. Πραγματικά, οι θεωρίες υπερχορδών προβλέπουν την ύπαρξη κοσμολογικών λύσεων απαλλαγμένων από την Αρχική Ανωμαλία, όπως και οι νέες θεωρίες που προβλέπουν την ύπαρξη επιπλέον χωρικών διαστάσεων.

3.4 Καμπύλα Κοσμολογικά Μοντέλα

Περνάμε τώρα στην μελέτη των κοσμολογικών μοντέλων που περιγράφουν την εξέλιξη στον χρόνο ενός σύμπαντος με μη μηδενική καμπυλότητα ($k \neq 0$). Η πρώτη εξίσωση Friedmann θα έχει τότε την μορφή

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\,(\rho_m + \rho_r) - \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\,\left(\frac{\rho_0^m}{a^3} + \frac{\rho_0^r}{a^4}\right) - \frac{k}{a^2}\,. \tag{3.15}$$

Όπως αναφέραμε παραπάνω, όσο ο χρόνος περνάει και ο συντελεστής κλίμακας μεγαλώνει, η πυκνότητα ενέργειας της ακτινοβολίας γίνεται λιγότερο σημαντική από την πυκνότητα ενέργειας της ύλης. Για ένα καμπύλο χωρόχρονο, ο κανόνας αυτός μπορεί να γενικευθεί ως εξής:

$$t \longrightarrow \infty : \qquad \frac{\rho_0^r}{a^4} \quad \ll \quad \frac{\rho_0^m}{a^3} \quad \ll \quad \frac{|k|}{a^2} \,. \tag{3.16}$$

Επομένως, ο όρος στην εξίσωση Friedmann που περιγράφει την καμπυλότητα του σύμπαντος γίνεται σημαντικός σε εποχές που αντιστοιχούν σε μεγάλες τιμές του κοσμικού χρόνου (late-time epoch), ενώ αντίθετα είναι αμελητέος στην αρχέγονη εποχή. Από εδώ και πέρα, θα επικεντρωθούμε στην εποχή των μεγάλων χρόνων, όπου ο όρος της ακτινοβολίας μπορεί να αγνοηθεί και η ανάλυση του μοντέλου να απλοποιηθεί – χωρίς παρ' όλα αυτά να χάσουμε οποιαδήποτε σημαντική πληροφορία για την εξέλιξη του σύμπαντος.

Για την μελέτη ενός καμπύλου σύμπαντος, είναι βολικό να εισαγάγουμε μια καινούργια συντεταγμένη χρόνου, τον λεγόμενο ''σύμμορφο χρόνο'' η (conformal time), που ορίζεται μέσω της σχέσης: $dt = a(\eta)\, d\eta$. Τότε, η πρώτη εξίσωση Friedmann παίρνει την μορφή

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{a'^2}{a^4} = \frac{8\pi G}{3}\,\frac{\rho_0}{a^3} - \frac{k}{a^2} \Rightarrow \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \equiv \zeta^2 = \frac{8\pi G}{3}\,\frac{\rho_0}{a} - k\,, \tag{3.17}$$

όπου το σύμβολο a' δηλώνει την παραγώγιση του a ως προς τον σύμμορφο χρόνο η. Η δεύτερη εξίσωση Friedmann, με την σειρά της, παίρνει την μορφή:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{a^2}\,\frac{d}{d\eta}\left(\frac{a'}{a}\right) = -\frac{4\pi G}{3}\,\frac{\rho_0}{a^3} = -\frac{1}{2a^2}\,(\zeta^2 + k) \;\Rightarrow\; \frac{d\zeta}{k + \zeta^2} = -\frac{1}{2}\,d\eta\,. \tag{3.18}$$

Όπως γίνεται φανερό από την παραπάνω εξίσωση, η εξέλιξη ενός καμπύλου σύμπαντος στον χρόνο εξαρτάται στενά από το είδος της καμπυλότητας που το χαρακτηρίζει, οπότε από το σημείο αυτό θα πρέπει να διαχωρίσουμε τις περιπτώσεις του κλειστού και ανοιχτού σύμπαντος:

Α. Κλειστό Σύμπαν ($k = +1$): Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $\zeta = \cot w$, η παραπάνω διαφορική εξίσωση μας δίνει

$$\frac{d(\cot w)}{1 + \cot^2 w} = -dw = -\frac{1}{2}\,d\eta \;\Rightarrow\; w = \cot^{-1}\zeta = \frac{\eta}{2}\,, \tag{3.19}$$

ή αλλιώς

$$\zeta \equiv \frac{d\ln a}{d\eta} = \cot\frac{\eta}{2} \;\Rightarrow\; a(\eta) \sim \sin^2\frac{\eta}{2} = 1 - \cos\eta\,. \tag{3.20}$$

Σύμφωνα με το παραπάνω αποτέλεσμα, ένα κλειστό σύμπαν ξεκινάει από μία Αρχική Ανωμαλία (**Big Bang**) σε χρόνο $\eta = 0$, φτάνει σε μία μέγιστη ακτίνα σε χρόνο $\eta = \pi$, πριν να καταλήξει σε μία άλλη ανωμαλία, την Τελική Ανωμαλία (**Big Crunch**) σε χρόνο $\eta = 2\pi$. Λόγω της εξάρτησης του συντελεστή κλίμακας από τον χρόνο μέσω μιας περιοδικής συνάρτησης, το κλειστό σύμπαν πολλές φορές ονομάζεται και ''ταλαντωτικό σύμπαν'' (oscillating universe), μια που μπορεί να θεωρηθεί ότι ο κύκλος της δημιουργίας και καταστροφής του μπορεί να επαναληφθεί άπειρες φορές, με την Τελική Ανωμαλία του προηγούμενου σύμπαντος να παίζει τον ρόλο της Αρχικής Ανωμαλίας του επόμενου!

B. Ανοιχτό Σύμπαν ($k = -1$): Στην περίπτωση αυτή, η κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής είναι η $\zeta = \coth w$. Τότε, παίρνουμε:

$$-\frac{d(\coth w)}{1 - \coth^2 w} = -dw = -\frac{1}{2}\, d\eta \;\Rightarrow\; w = \coth^{-1}\zeta = \frac{\eta}{2}\,, \tag{3.21}$$

ή αλλιώς

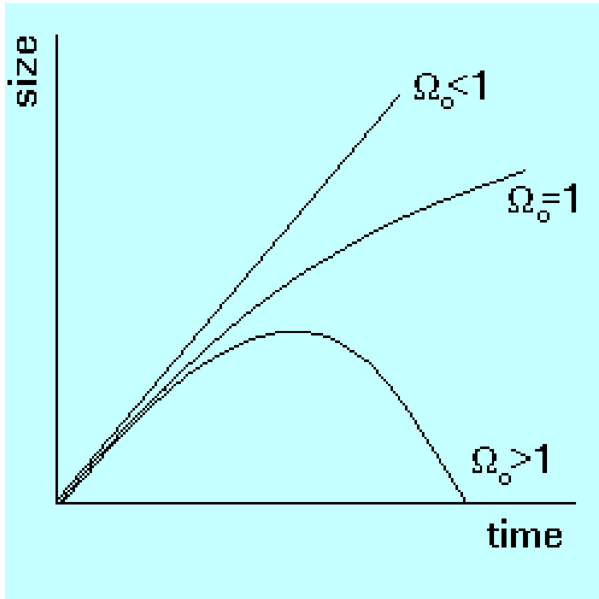
$$\zeta \equiv \frac{d\ln a}{d\eta} = \coth\frac{\eta}{2} \;\Rightarrow\; a(\eta) \sim \sinh^2\frac{\eta}{2} = \cosh\eta - 1\,. \tag{3.22}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα περιγράφει ένα σύμπαν που επίσης αρχίζει με μια Αρχική Ανωμαλία σε χρόνο $\eta = 0$, αλλά που συνεχίζει να διαστέλλεται επ' άπειρον. Ο ασυμπτωτικός ρυθμός διαστολής του σύμπαντος σε αυτή την περίπτωση μπορεί να βρεθεί εάν αγνοήσουμε παντελώς τον όρο της πυκνότητας ενέργειας ύλης (σε πολύ μεγάλους χρόνους και αυτός ο όρος θα γίνει αμελητέος σε σύγκριση με τον όρο της καμπυλότητας). Τότε, η πρώτη εξίσωση Friedmann γίνεται:

$$\frac{\dot a^2}{a^2} = -\frac{k}{a^2} = \frac{1}{a^2} \;\Rightarrow\; a(t) \sim t\,. \tag{3.23}$$

Στην περίπτωση επομένως του ανοιχτού σύμπαντος, σε μεγάλους χρόνους, το σύμπαν θα διαστέλλεται γραμμικά με τον χρόνο, πολύ πιο γρήγορα δηλαδή από την περίπτωση του επίπεδου σύμπαντος (όπου η εξάρτηση του συντελεστή κλίμακας δίνεται από $t^{2/3}$ ή $t^{1/2}$). Το παραπάνω σύμπαν είναι γνωστό σαν σύμπαν Milne και η αντίστοιχη διαστολή του σαν ''ελεύθερη διαστολή''.

Όπως αναμενόταν, σύμφωνα με αυτά που αναφέραμε στην αρχή της παραγράφου, η παρουσία του όρου της καμπυλότητας στην εξίσωση Friedmann δεν ήταν ικανή να εξαφανίσει την Αρχική Ανωμαλία από την ιστορία του σύμπαντος, μια που ο όρος αυτός γίνεται αμελητέος στην αρχέγονη εποχή. Σε μεγάλους όμως χρόνους είναι σε θέση να μεταβάλλει δραστικά την εξέλιξη του σύμπαντος σε σύγκριση με αυτή που παίρνουμε για το επίπεδο σύμπαν. Μια ματιά στην πρώτη εξίσωση Friedmann αρκεί να μας προιδεάσει για το ρόλο του όρου της καμπυλότητας, πριν καν την λύσουμε αναλυτικά. Στην περίπτωση του κλειστού σύμπαντος, το δεξί μέλος της εξίσωσης περιέχει δύο όρους με αντίθετα πρόσημα: παρ' όλο που αρχικά οι δύο όροι είναι διαφορετικού μεγέθους, με τον όρο πυκνότητας ύλης να υπερτερεί, η εξέλιξη του σύμπαντος θα προκαλέσει την εξίσωση του μεγέθους τους και τον μηδενισμό του ρυθμού διαστολής, $\dot a = 0$· η δεύτερη εξίσωση Friedmann μας λέει όμως ότι ο μηδενισμός είναι προσωρινός και, αφού η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητική, το σύμπαν θα αρχίσει να συστέλλεται και θα οδηγηθεί αναπόφευκτα στην Τελική Ανωμαλία. Στην περίπτωση του ανοιχτού σύμπαντος αντίθετα, το δεξί μέλος της πρώτης εξίσωσης Friedmann δίνεται από το



Σχήμα 9: Η εξάρτηση του συντελεστή κλίμακας από τον χρόνο στην περίπτωση του ανοιχτού, επίπεδου και κλειστού σύμπαντος.

άθροισμα δύο θετικών αριθμών: ο ρυθμός διαστολής δεν πρόκειται να μηδενιστεί ποτέ και η διαστολή θα συνεχιστεί επ' άπειρον.

Τα τρία κοσμολογικά μοντέλα που περιγράφουν την εξέλιξη του συντελεστή κλίμακας συναρτήσει του χρόνου για το επίπεδο, κλειστό και ανοιχτό σύμπαν δίνονται στο Σχήμα 9. Στην περίπτωση του κλειστού σύμπαντος ($\rho_{total} > \rho_c$), η συνολική πυκνότητα ενέργειας που περιέχει είναι αρκετά μεγάλη για να σταματήσει και να αναστρέψει την διαστολή του σύμπαντος. Στο ανοιχτό σύμπαν ($\rho_{total} = \rho_c$), η πυκνότητα ενέργειας έχει ακριβώς την τιμή εκείνη που θα επιτρέψει στη διαστολή να συνεχιστεί με μηδενικό όμως ρυθμό ασυμπτωτικά. Στην περίπτωση του ανοιχτού σύμπαντος τέλος ($\rho_{total} < \rho_c$), η πυκνότητα ενέργειας δεν επαρκεί για να αναστρέψει ή να μεταβάλλει με οποιοδήποτε σημαντικό τρόπο την διαστολή του σύμπαντος. Η παραπάνω κατάσταση παρουσιάζει μια προφανή αναλογία με την εκτόξευση ενός σώματος από την επιφάνεια της Γης: εάν η εκτόξευση γίνει με μικρή ταχύτητα, το σώμα θα σταματήσει την ανοδική του πορεία και θα πέσει πίσω στην Γη· εάν το σώμα εκτοξευθεί με ταχύτητα ίση ακριβώς με την ταχύτητα διαφυγής, μόλις που θα καταφέρει να ξεφύγει από την βαρυτική έλξη της Γης· εάν τέλος, το σώμα εκτοξευθεί με ταχύτητα πολύ μεγαλύτερη της ταχύτητας διαφυγής, τότε θα αποκτήσει και μια σταθερή ταχύτητα κίνησης που θα του επιτρέψει να κινηθεί μακριά από την Γη.

3.5 Η Κοσμολογική Σταθερά

Η ιδέα της κοσμολογικής σταθεράς εισήχθηκε από τον ίδιο τον Einstein ο οποίος προτιμούσε ένα στατικό σύμπαν από ένα διαστελλόμενο – πριν φυσικά οι παρατηρήσεις τον διαψεύσουν. Επιπλέον, προτιμούσε την ιδέα ενός κλειστού σύμπαντος από κάθε άλλη τοπολογία. Μέσα σε ένα σύμπαν με $k = +1$, λοιπόν, εισήγαγε την πυκνότητα ύλης ρ_m – που φαινόταν να κυριαρχεί στο σύμπαν – καθώς και μια σταθερή κατανομή θετικής ενέργειας Λ. Η εξίσωση Friedmann παίρνει τότε την μορφή

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\,\frac{\rho_0}{a^3} + \frac{8\pi G}{3}\,\Lambda - \frac{1}{a^2}\,. \tag{3.24}$$

Ο Einstein απαίτησε την ύπαρξη μια κρίσιμης τιμής του συντελεστή κλίμακας, a_c, για την οποία να μηδενίζεται το δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης και επομένως ο ρυθμός διαστολής του σύμπαντος. Το γεγονός αυτό όμως από μόνο του δεν επαρκεί για την δημιουργία ενός πραγματικά στατικού σύμπαντος: όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, κάθε κλειστό σύμπαν φτάνει σε μία μέγιστη τιμή του συντελεστή κλίμακας, όπου $\dot{a} = 0$, πριν να αρχίσει η φάση της συστολής. Για να είναι το σύμπαν πραγματικά στατικό, θα πρέπει και η δεύτερη παράγωγος να μηδενίζεται για την ίδια τιμή του $a(t)$. Από την δεύτερη εξίσωση Friedmann, παίρνουμε τότε, για $\rho_{total} = \rho_m + \Lambda$ και $p_{total} = -\Lambda$,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\,(\rho_{total} + 3p_{total}) = -\frac{4\pi G}{3}\left(\frac{\rho_0}{a_c^3} - 2\Lambda\right) \equiv 0\,, \tag{3.25}$$

το οποίο οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\Lambda \equiv \Lambda_c = \frac{\rho_0}{2a_c^3} = \frac{1}{2}\,\rho_m\,. \tag{3.26}$$

Για την δημιουργία ενός στατικού σύμπαντος λοιπόν, με $a = a_c$, η κοσμολογική σταθερά θα πρέπει να έχει μια συγκεκριμένη τιμή, ίση με το μισό της πυκνότητας ύλης που αντιστοιχεί στην κρίσιμη τιμή a_c. Αντικατάσταση της έκφρασης του Λ_c στο δεξί μέλος της Εξ. (3.24) και απαίτηση αυτό να μηδενίζεται οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\frac{8\pi G}{3}\,\frac{\rho_0}{a_c^3} + \frac{8\pi G}{3}\,\frac{\rho_0}{2a_c^3} - \frac{1}{a_c^2} \equiv 0 \;\Rightarrow\; a_c = 4\pi G\rho_0\,. \tag{3.27}$$

Το μοντέλο αυτό ονομάστηκε στατικό μοντέλο Einstein, όμως πολύ γρήγορα εγκαταλείφθηκε, όταν οι παρατηρήσεις του Hubble απέδειξαν την διαστολή του σύμπαντος, οδηγώντας τον Einstein να δηλώσει ότι η εισαγωγή της κοσμολογικής σταθεράς στην κοσμολογία ‘‘ήταν το μεγαλύτερο λάθος της ζωής του’’. Εκτός από την έλλειψη συμφωνίας με τις παρατηρήσεις, το στατικό σύμπαν του Einstein έπασχε και από ένα άλλο πρόβλημα: όπως απέδειξε ο Eddington το μοντέλο ήταν ασταθές κάτω από μικρές διαταραχές – εάν για κάποιο λόγο το σύμπαν διασταλεί ή συσταλεί έστω και κατά λίγο, η πυκνότητα ύλης θα μεταβληθεί και η λεπτή ισορροπία ανάμεσα στα δύο συστατικά του σύμπαντος θα καταστραφεί για πάντα (για $\dot{a} > 0$, προκύπτει ότι $\ddot{a} > 0$, ενώ για $\dot{a} < 0$, παίρνουμε $\ddot{a} < 0$, σημάδι αστάθειας του συστήματος).

Ο όρος της θετικής κοσμολογικής σταθεράς στις εξισώσεις Friedmann ονομάζεται και όρος "κοσμικής άπωσης" (cosmic repulsion). Η ονομασία αυτή οφείλεται όχι μόνο στο γεγονός ότι εμφανίζεται με θετικό πρόσημο στο δεξί μέλος της Εξ. (3.24) – άλλωστε και ο όρος της πυκνότητας ύλης κάνει το ίδιο και όμως προκαλεί την βαρυτική έλξη και επιβράδυνση της διαστολής – αλλά στο ότι εμφανίζεται με επίσης θετικό πρόσημο στο δεξί μέλος της εξίσωσης επιτάχυνσης (3.25). Η παρουσία μιας θετικής κοσμολογικής σταθεράς στο σύμπαν επομένως έχει σαν αποτέλεσμα όχι μόνο την διατήρηση της διαστολής αλλά και της επιτάχυνσής της. Πώς όμως συνδυάζεται στην γενικότητα ο όρος αυτός με τους υπόλοιπους που συζητήσαμε μέχρι τώρα; Μπορούμε να γενικεύσουμε τον κανόνα (3.16), που δίνει τα σχετικά μεγέθη τους με την πάροδο του χρόνου, με τον ακόλουθο τρόπο

$$t \longrightarrow \infty : \qquad \frac{\rho_0^r}{a^4} \quad \ll \quad \frac{\rho_0^m}{a^3} \quad \ll \quad \frac{|k|}{a^2} \quad \ll \quad \Lambda\,. \tag{3.28}$$

Σύμφωνα με το παραπάνω, η παρουσία της κοσμολογικής σταθεράς είναι αμελητέα στην εποχή του αρχέγονου σύμπαντος σε σύγκριση με τους υπόλοιπους όρους της εξίσωσης και ειδικότερα της πυκνότητας ακτινοβολίας. Αντίθετα, μια που παραμένει σταθερά, δεν μειώνεται με την πάροδο του χρόνου, όπως οι υπόλοιποι όροι, και έτσι κυριαρχεί τελικά στην εξέλιξη του σύμπαντος σε μεγάλους χρόνους.

Για να πειστούμε για το γεγονός αυτό, ας θεωρήσουμε την πρώτη εξίσωση Friedmann όπου συμμετέχουν μόνο οι δύο κυρίαρχοι όροι σε μεγάλους χρόνους, οι όροι της καμπυλότητας και της κοσμολογικής σταθεράς

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\,\Lambda - \frac{k}{a^2}\,. \tag{3.29}$$

Μπορεί κανείς εύκολα να επαληθεύσει ότι η λύση για τον συντελεστή κλίμακας σε κάθε μία περίπτωση τοπολογίας του σύμπαντος δίνεται από την έκφραση

$$a(t) \sim \begin{cases} \frac{1}{A}\cosh(At)\,, & \text{για} \;\; k = +1 \text{ (κλειστό)} \\ \quad e^{At}\,, & \text{για} \;\; k = 0 \text{ (επίπεδο)} \\ \frac{1}{A}\sinh(At)\,, & \text{για} \;\; k = -1 \text{ (ανοιχτό)}\,, \end{cases} \tag{3.30}$$

όπου $A = \sqrt{8\pi G\Lambda/3}$. Παρ'όλο που η παράμετρος τοπολογίας k διαφοροποιεί εν γένει την έκφραση του συντελεστή κλίμακας, η ασυμπτωτική συμπεριφορά του $a(t)$ για μεγάλους χρόνους ($t \to \infty$) είναι η ίδια για όλα τα μοντέλα και δίνεται από την εκθετική συνάρτηση. Και στις τρεις περιπτώσεις το σύμπαν διαστέλλεται επ' άπειρον (ακόμη και στην περίπτωση του κλειστού σύμπαντος) ενώ η ασυμπτωτική ταχύτητα διαστολής αυξάνεται συνεχώς με τον χρόνο – είναι επομένως μεγαλύτερη από κάθε άλλο μοντέλο που είδαμε μέχρι τώρα, και για πρώτη φορά οδηγεί σε επιτάχυνση της διαστολής με $\ddot{a} > 0$ και $q = -1$. Το επίπεδο μοντέλο ($k = 0$) που εξελίσσεται εκθετικά με τον χρόνο σε κάθε εποχή, και όχι μόνο ασυμπτωτικά, είναι γνωστό σαν μοντέλο de Sitter και έχει μεγάλη εφαρμογή στην Κοσμολογία, και ειδικότερα στο ''πληθωριστικό σενάριο'' (inflation), όπως θα δούμε παρακάτω.

Ένα ακόμα σημαντικό κοσμολογικό μοντέλο ήταν το μοντέλο του Lemaitre που ήταν ουσιαστικά μια τροποποιημένη έκδοση του στατικού μοντέλου του Einstein έτσι ώστε να εξελίσσεται με το χρόνο. Το μοντέλο προέβλεπε $k = +1$, ρ_m και $\Lambda > \Lambda_c$. Η συμπεριφορά του συντελεστή κλίμακας ήταν ένα κράμα από τα προηγούμενα απλούστερα μοντέλα: για μικρές τιμές του χρόνου, η εξάρτηση δινόταν από την έκφραση $t^{2/3}$· για μεγάλες τιμές του χρόνου, το σύμπαν διαστελλόταν απ' άπειρον σύμφωνα με την πρώτη από τις τρεις εκφράσεις της Εξ. (3.30)· ανάμεσα στις δύο αυτές ασυμπτωτικές περιοχές, τέλος, ο συντελεστής κλίμακας παρουσίαζε ένα πλατώ, που ήταν πιο έντονο και μεγαλύτερης διάρκειας όσο η κοσμολογική σταθερά πλησίαζε περισσότερο την κρίσιμη τιμή Λ_c.

Μέχρι στιγμής, έχουμε συζητήσει μόνο την περίπτωση της θετικής κοσμολογικής σταθεράς. Τι γίνεται όμως εάν το σύμπαν περιέχει μια σταθερή, ομοιόμορφη κατανομή αρνητικής ενέργειας $\Lambda = -|\Lambda| < 0$; Οι αντίστοιχες λύσεις για τον συντελεστή κλίμακας σε αυτή την περίπτωση προκύπτουν εύκολα από αυτές με $\Lambda > 0$, κάνοντας τον μετασχηματισμό $\Lambda \to -|\Lambda|$. Παραδείγματος χάρη, στην περίπτωση του ανοιχτού σύμπαντος ($k = -1$), από την Εξ. (3.30), προκύπτει ότι

$$a(t) \sim \frac{1}{|A|}\,\sin(|A|\,t)\,, \tag{3.31}$$

όπου τώρα $|A| = \sqrt{8\pi G|\Lambda|/3}$. Σύμφωνα με το παραπάνω, η ασυμπτωτική διαστολή στην περίπτωση αυτή δεν είναι ούτε επιταχυνόμενη αλλά ούτε καν ελεύθερη. Ο συντελεστής κλίμακας δίνεται μέσω μιας περιοδικής συνάρτησης του χρόνου και επομένως η τιμή του παραμένει φραγμένη. Επιπλέον, χαρακτηρίζεται τόσο από μια αρχική ανωμαλία σε χρόνο $t = 0$ όσο και από μια τελική σε χρόνο $t = \pi/|A|$. Το παραπάνω μοντέλο είναι γνωστό σαν μοντέλο Anti de Sitter.

Μπορεί μάλιστα να αποδειχθεί ότι το μοντέλο Anti de Sitter είναι συμβατό σε μεγάλους χρόνους μόνο με ένα σύμπαν αρνητικής καμπυλότητας, όπως παραπάνω. Για του λόγου το αληθές, εάν ξεκινήσουμε από την εκθετική λύση de Sitter (3.30) του συντελεστή κλίμακας για ένα επίπεδο σύμπαν με $k = 0$, και εκτελέσουμε τον μετασχηματισμό $\Lambda \to -|\Lambda|$, θα πάρουμε $a(t) \sim e^{i|A|\,t}$. Το στοιχείο τότε μήκους για το σύμπαν μπορεί να γραφεί ως εξής

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2i|A|t}\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) = dx^2 + e^{2|A|\,x}\,(-dt^2 + dy^2 + dz^2)\,, \tag{3.32}$$

όπου στο τελευταίο μέρος της εξίσωσης κάναμε τον μετασχηματισμό συντεταγμένων $t \to ix$ και $x \to it$, ώστε να αποφύγουμε την μιγαδική τιμή του συντελεστή κλίμακας. Ο παραπάνω όμως χωρόχρονος δεν είναι πλέον ισοτροπικός, μια που οι τρεις καρτεσιανές συντεταγμένες εμφανίζονται με διαφορετικό συντελεστή στο στοιχείο μήκους. Παρόμοιο πρόβλημα εμφανίζεται και για την λύση του κλειστού σύμπαντος μετά την αλλαγή του προσήμου της κοσμολογικής σταθεράς.

Μια πιο προσεκτική ματιά όμως στην μορφή της λύσης (3.31) αναιρεί την ίδια την ύπαρξή της: αφού η τιμή του συντελεστή κλίμακας είναι φραγμένη, δεν πρόκειται ποτέ να αυξηθεί τόσο πολύ που οι υπόλοιποι όροι της εξίσωσης Friedmann να είναι αμελητέοι. Ένα πιο ρεαλιστικό λοιπόν μοντέλο θα ήταν αυτό που θα περιείχε τους όρους πυκνότητας ύλης, καμπυλότητας και αρνητικής κοσμολογικής σταθεράς. Για απλότητα, θα μελετήσουμε την περίπτωση του επίπεδου σύμπαντος ($k = 0$). Ολοκληρώνοντας τότε την πρώτη εξίσωση Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{\rho_0}{a^3} - |\Lambda|\right) , \tag{3.33}$$

βρίσκουμε το αποτέλεσμα (βλέπε 2ο σετ ασκήσεων)

$$a^3(t) = \frac{\rho_0}{2|\Lambda|}\left[1 - \cos\left(\sqrt{24\pi G|\Lambda|}\, t\right)\right] . \tag{3.34}$$

Όπως αναμένεται, στο όριο $t \to 0$, ξαναβρίσκουμε την Αρχική Ανωμαλία για την οποία η κοσμολογική σταθερά δεν μπορεί να κάνει τίποτα. Καθώς το σύμπαν εξελίσσεται και ο συντελεστής κλίμακας αυξάνει, οι δύο όροι με αντίθετο πρόσημο στο δεξί μέλος της εξίσωσης Friedmann γίνονται ίσοι, και η ταχύτητα διαστολής μηδενίζεται όπως και στην περίπτωση του κλειστού σύμπαντος απουσία της κοσμολογικής σταθεράς. Στο σημείο αυτό, το σύμπαν θα φτάσει την μέγιστη ακτίνα του $a^3_{max} = \rho_0/|\Lambda|$, και σύμφωνα με την εξίσωση επιτάχυνσης

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho_{total} + 3p_{total}\right) = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho_m + 2|\Lambda|\right) < 0\,, \tag{3.35}$$

η κίνηση θα αναστραφεί και θα αρχίσει η φάση της συστολής. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι μια αρνητική κοσμολογική σταθερά έχει την ίδια επίδραση στην εξέλιξη του σύμπαντος με τον όρο καμπυλότητας στην περίπτωση $k = +1$, συμπέρασμα που δικαιολογείται από τον παρόμοιο τρόπο με τον οποίο οι δύο αυτοί όροι εμφανίζονται στο δεξί μέλος της πρώτης εξίσωσης Friedmann.

3.6 Εναλλακτικά Κοσμολογικά Μοντέλα

Τελειώνοντας το κεφάλαιο αυτό, καλό είναι να αναφέρουμε εν συντομία ορισμένα εναλλακτικά κοσμολογικά μοντέλα. Παρ' όλο που το Καθιερωμένο Κοσμολογικό Μοντέλο βασίζεται στις λύσεις που συζητήσαμε στις προηγούμενες παραγράφους, κάποια από τα εναλλακτικά αυτά μοντέλα αξίζουν της προσοχής μας είτε γιατί μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως συμπληρωματικά των βασικών είτε γιατί στο παρελθόν αποτέλεσαν αντικείμενο εντατικής έρευνας.

3.6.1 Ανισοτροπικά και Ανομοιογενή Μοντέλα

Παρ' όλο που η Κοσμολογική Αρχή περιγράφει με ακρίβεια το σύμπαν σε μεγάλη κλίμακα, σε μικρότερες κλίμακες το σύμπαν μας δεν είναι ούτε ισότροπο ούτε ομοιογενές. Κατά καιρούς, έχουν προταθεί εναλλακτικά – του Robertson-Walker – στοιχεία μήκους που σκοπό είχαν να περιγράψουν το σύμπαν στις μικρότερες αυτές κλίμακες μήκους. Ένα παράδειγμα είναι η λύση Kasner με στοιχείο μήκους

$$ds^2 = -dt^2 + X_1^2(t)\, dx_1^2 + X_2^2(t)\, dx_2^2 + X_3^2(t)\, dx_3^2 \,. \tag{3.36}$$

Το παραπάνω σύμπαν είναι μη ισοτροπικό αλλά ομοιογενές. Η κάθε κατεύθυνση στο χώρο χαρακτηρίζεται από τον δικό της συντελεστή κλίμακας $X_i(t)$, και ο μέσος ρυθμός διαστολής του σύμπαντος δίνεται από την έκφραση

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{3}\left(\frac{\dot{X}_1}{X_1} + \frac{\dot{X}_2}{X_2} + \frac{\dot{X}_3}{X_3}\right) \,, \tag{3.37}$$

όπου $a^3 \equiv X_1 X_2 X_3$. Το παραπάνω κοσμολογικό μοντέλο αποτελεί ειδική περίπτωση μιας γενικότερης ομάδας μοντέλων, των μοντέλων Bianchi. Τα μοντέλα Bianchi περιγράφουν πάντα ένα ομοιογενές σύμπαν και προκύπτουν απαιτώντας την απουσία προτιμητέου παρατηρητή στο σύμπαν και την ύπαρξη συμμετριών που συνδέουν ένα παρατηρητή A με ένα τυχαίο παρατηρητή B. Τα περισσότερα από τα μοντέλα Bianchi είναι ιδιαίτερα περίπλοκα και ακριβείς λύσεις μπορούν να παραχθούν μόνο σε ειδικές περιπτώσεις.

Ένα παράδειγμα ανομοιογενούς αλλά ισότροπου σύμπαντος είναι αυτό που περιγράφεται από το στοιχείο μήκους Tolman-Bondi

$$ds^2 = -dt^2 + e^{\lambda(r,t)}\, dr^2 - R^2(r,t)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \,. \tag{3.38}$$

Το παραπάνω στοιχείο μήκους είναι σφαιρικά συμμετρικό και άρα ισοτροπικό, όμως η εξάρτησή του από την ακτινική συντεταγμένη r είναι τέτοια που οδηγεί σε 3-διάστατο χώρο όπου η καμπυλότητα μεταβάλλεται με το r. Το μοντέλο Tolman-Bondi αναπτύχθηκε για να μελετηθεί το πέρασμα των φωτονίων μέσα από ανομοιογενείς κατανομές ύλης όπως ομάδες γαλαξιών.

3.6.2 Το Steady-State Μοντέλο

Το Steady-State μοντέλο αναπτύχθηκε το 1948 από τους Bondi, Gold και Hoyle, και βασίστηκε στην λεγόμενη Τέλεια Κοσμολογική Αρχή που έλεγε ότι, σε μεγάλη κλίμακα, το σύμπαν πρέπει να είναι το ίδιο σε κάθε σημείο, σε κάθε κατεύθυνση, κάθε χρονική στιγμή. Αποτέλεσμα αυτής της υπόθεσης ήταν ότι ο ρυθμός διαστολής του σύμπαντος πρέπει να είναι σταθερός

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \text{const.} = H_0 \,, \tag{3.39}$$

και επομένως το σύμπαν διαστέλλεται εκθετικά με το χρόνο. Εάν, όμως, το σύμπαν πρέπει να φαίνεται το ίδιο κάθε χρονική στιγμή, παρά την γρήγορη διαστολή του και την απομάκρυνση των γαλαξιών, είναι απαραίτητο να λαμβάνει χώρα μια συνεχής δημιουργία ύλης ώστε η μέση πυκνότητα στο σύμπαν να παραμένει σταθερή. Ο ρυθμός δημιουργίας ύλης ήταν της τάξης μεγέθους

$$\Gamma \simeq 10^{-16}\, h \,\frac{\text{nucleons}}{\text{cm}^3\,\text{year}} \,. \tag{3.40}$$

Οι εμπνευστές του μοντέλου δεν παρείχαν ποτέ καμμιά ικανοποιητική εξήγηση για το πώς η δημιουργία ύλης πραγματοποιείται στο σύμπαν, αν και ο Hoyle προσπάθησε να το εξηγήσει μέσω της μη διατήρησης της ενέργειας στο σύμπαν. Το μοντέλο επέζησε μέχρι την δεκαετία του '60, σαν εναλλακτική θεωρία αυτής του Big Bang, οπότε και εγκαταλείφθηκε. Είναι ειρωνικό το γεγονός ότι ο καθιερωμένος πλέον όρος Big Bang εισήχθηκε από τον ίδιο τον Hoyle σε μια προσπάθειά του να γελοιοποιήσει το ανταγωνιστικό μοντέλο που περιείχε μια Αρχική Ανωμαλία.

3.6.3 Η Θεωρία Brans-Dicke

Στην θεωρία αυτή, το σύμπαν περιέχει εκτός από την συνηθισμένη ύλη και ακτινοβολία ένα βαθμωτό σωμάτιο ϕ με σπιν 0, το οποίο παρουσιάζει μια ''σύμμορφη σύζευξη'' (conformal coupling) με την βαθμωτή ποσότητα Ricci, ϕR. Οι εξισώσεις του Einstein τότε παίρνουν την μορφή

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R = \frac{8\pi}{\phi}\, T_{\mu\nu} - \frac{\omega^2}{\phi^2}\,(D_\mu\phi D_\nu\phi - g_{\mu\nu} D_\rho\phi D^\rho\phi) - \frac{1}{\phi}\,(D_\mu D_\nu\phi - g_{\mu\nu} D^\rho D_\rho\phi)\,, \tag{3.41}$$

όπου ω μια σταθερή παράμετρος, και D_μ η συναλλοίωτη παράγωγος. Όπως είναι προφανές, στα πλαίσια της θεωρία αυτής, η βαρυτική σταθερά του Νεύτωνα έχει αντικατασταθεί από ένα χρονο-εξαρτώμενο βαθμωτό πεδίο. Στο Νευτώνιο όριο, μπορεί κανείς να υπολογίσει την σταθερά αυτή η οποία προκύπτει να είναι

$$G = \frac{2\omega + 4}{2\omega + 3}\,\frac{1}{\phi} \,. \tag{3.42}$$

Η εξίσωση κίνησης του ίδιου του βαθμωτού πεδίου έχει την μορφή

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\mu\left[\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\right] = \frac{8\pi}{3+2\omega}\,T^\mu_\mu\,. \tag{3.43}$$

Στο όριο $\omega \to \infty$, το δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης μηδενίζεται, και το βαθμωτό πεδίο είναι απλώς μια σταθερά, ϕ_0. Στο ίδιο όριο, η βαρυτική σταθερά G είναι απλώς το αντίστροφο του ϕ_0, και οι εξισώσεις του Einstein παίρνουν την συνηθισμένη τους μορφή. Όσο μικρότερη όμως είναι η παράμετρος ω, τόσο περισσότερο απομακρυνόμαστε από την θεωρία του Einstein και την σταθερή τιμή της σταθεράς του Νεύτωνα. Μια σειρά από πειράματα και παρατηρήσεις, που σκοπό έχουν να ανιχνεύσουν την εξάρτηση της βαρυτικής σταθεράς από τον χρόνο, έχουν καταφέρει να επιβάλλουν ένα πολύ αυστηρό όριο στην τιμή της παραμέτρου ω: ενώ πριν από λίγα χρόνια το όριο αυτό ήταν $\omega > 500$, σήμερα έχει γίνει $\omega > 4000$, γεγονός που οδηγεί στον αποκλεισμό της θεωρίας ως μη ρεαλιστικής.