

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ Ι)

1. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

$$(\alpha) f(x) = \sqrt{x}, x > 0 \quad (\beta) 2x^2 - 3x + 5 \quad (\gamma) \frac{1}{x} \quad (\delta) \sin x$$

2. Υπολογίστε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

$$(\alpha) y = \frac{2x + 5}{3x - 2} \quad (\beta) p = \left(\frac{q^2 + 3}{12q} \right) \left(\frac{q^4 - 1}{q^3} \right) \quad (\gamma) y = \frac{4}{\cos x} + \frac{1}{\tan x}$$

$$(\delta) y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$$

3. Μελετήστε την κίνηση σώματος που κινείται στον οριζόντιο άξονα x και η θέση του συναρτήσει του χρόνου, t , περιγράφεται από τις:

$$(\alpha) x = t^2 - 3t + 2, 0 \leq t \leq 2 \quad (\beta) x = -t^3 + 3t^2 - 3t, 0 \leq t \leq 3$$

4. (α) Έχει οριζόντιες εφαπτομένες η καμπύλη $y = x^4 - 2x^2 + 2$ και αν ναι σε ποια σημεία της;

(β) Βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία της καμπύλης $y = (x/2) + 1/(2x - 4)$ με κλίση $-3/2$.

(γ) Βρείτε τα σημεία της καμπύλης $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ όπου η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία $y = 1 - (x/24)$.

(δ) Βρείτε τα σημεία της καμπύλης $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, όπου η κάθετος είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x/2$.

5. Υπολογίστε, αν υπάρχει, την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων στο σημείο $x = 0$:

$$(\alpha) f(x) = |x| \quad (\beta) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (\gamma) f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0 \\ \tan x, & 0 \leq x \leq \pi/4 \end{cases}$$

6. Εξηγήστε αν και γιατί η παρακάτω συνάρτηση $f(x)$ διαθέτει παράγωγο στο $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

7. Βρείτε τις τιμές των a και b ώστε η παρακάτω συνάρτηση $g(x)$ να είναι διαφορίσιμη για κάθε τιμή του x .

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq -1 \\ ax^3 + x + 2b, & x > -1 \end{cases}$$

8. Με χρήση μαθηματικής επαγωγής αποδείξτε ότι αν $y = u_1 u_2 \dots u_n$ είναι ένα πεπερασμένο γινόμενο διαφορίσιμων συναρτήσεων, τότε η y είναι διαφορίσιμη στο κοινό πεδίο ορισμού τους και ότι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du_1}{dx} u_2 \dots u_n + u_1 \frac{du_2}{dx} \dots u_n + \dots + u_1 u_2 \dots u_{n-1} \frac{du_n}{dx}$$