ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΙΙ)

1. Βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

$$(\alpha)\;\; y=\frac{3}{(5x^2+\sin 2x)^{3/2}} \qquad (\beta)\;\; y=(2x+1)\sqrt{2x+1}$$

$$(\gamma)\;\; y=\cosh(x^2-3x+1) \qquad (\delta)\;\; y=\left(\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\right)^2$$

2. Υπολογίστε την παράγωγο dy/dx στις παρακάτω συναρτήσεις:

$$(\alpha)\;\; e^{xy}+y\ln x=\cos 2x \qquad (\beta)\;\; x=\sec t,\; y=\tan t,\; -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$$

$$(\gamma)\;\; x=t-t^2\;\; y=t-t^3 \qquad (\delta)\;\; y^2\cos\left(\frac{1}{y}\right)=2x+2y$$

3. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

$$(\alpha)\;\; \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2} \qquad (\beta)\;\; \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x} \qquad (\gamma)\;\; \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x \qquad (\delta)\;\; \lim_{x\to 0}\frac{t-\ln(1+2t)}{t^2}$$

4. Αποδείξτε το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής: αν $f(x)$ και $g(x)$ είναι συνεχείς στο $[a,\, b]$ και διαφορίσιμες στο $(a,\, b)$ με $g'(x)\neq 0$, τότε υπάρχει κάποιος αριθμός c στο $(a,\, b)$ τέτοιος ώστε:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

5. Αν $a<b$, δείξτε ότι ισχύει η σχέση:

$$\frac{b-a}{1+b^2}<\tan^{-1}b-\tan^{-1}a<\frac{b-a}{1+a^2}$$

6. Βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι αύξουσες ή φθίνουσες:

$$(\alpha)\;\; f(x)=x^3-12x-5 \qquad (\beta)\;\; f(x)=x^2+\frac{2}{x} \qquad (\gamma)\;\; f(x)=\sin x\cos x,\; 0\leq x\leq \pi$$

7. Για κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις, βρείτε τα διαστήματα όπου (α) είναι αύξουσα, (β) είναι φθίνουσα, (γ) στρέφει τα κοίλα άνω, (δ) στρέφει τα κοίλα κάτω. Κατόπιν εντοπίστε και χαρακτηρίστε τα όποια τοπικά ακρότατα και σημεία καμπής. Τέλος σχεδιάστε πρόχειρα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

$$\text{(i)}\;\; y=x^4-12x^3+48x^2-64x \qquad \text{(ii)}\;\; y=-2x^3+6x^2-3 \qquad \text{(iii)}\;\; y=2(x+1)e^{-x}$$