


Εισαγωγή στις βασικές έννοιες
των Μαθηματικών

1^ο Μάθημα
Εισαγωγή
Μαθηματική Λογική

Επικοινωνία (1)

- ktatsis@uoi.gr
-  [twitter: tatsis_kostas](https://twitter.com/tatsis_kostas)
- Τηλέφωνο: 2651005870
- Ώρες συνεργασίας (3^{ος} όροφος):
 - Τετάρτη 17:00-19:00
 - Πέμπτη 17:00-19:00

Επικοινωνία (2)

- <http://ecourse.uoi.gr>
 - Διαλέξεις = ύλη μαθήματος
 - Ανακοινώσεις
 - Υποστηρικτικό υλικό
- κλειδί: **math2009**

Επικοινωνία (3)

- Ανακοινώσεις
μαθήματος:
 - <http://ecourse.uoi.gr>
 - Εργαστήριο έρευνας στη
Διδασκαλία των Μαθηματικών
(1^{ος} όροφος)

Περιεχόμενο μαθήματος

- Μαθηματική Λογική
- Θεωρία Αριθμών
- Θεωρία Συνόλων – έννοια συνάρτησης
- Συστήματα αρίθμησης

Υπάρχουν
προαπαιτούμενες γνώσεις
για το μάθημα;

Μαθηματικά στο δημοτικό

- Τι μαθηματικά;
- Γιατί;
- Πώς;
- Ποιες οι προαπαιτούμενες γνώσεις;

Μαθηματικά στο δημοτικό

- Τι μαθηματικά;
 - Φυσικοί αριθμοί μέχρι το 100
 - Εισαγωγή στους αριθμούς
 - Ανάλυση και σύνθεση των αριθμών σε αθροίσματα
 - Εισαγωγή στους διψήφιους αριθμούς και το σύστημα αρίθμησης
 - Οι πράξεις
 - Προοδευτική μετάβαση στους νοερούς υπολογισμούς
 - Διαφορετικές στρατηγικές υπολογισμού
 - Γεωμετρία
 - Λύση προβλήματος

● Αριθμοί
● Πράξεις
● Γεωμετρία
● Μετρήσεις
● Προβλήματα
◆ Επανάληψη

Σκοποί Μαθηματικών

Οι ειδικοί σκοποί του μαθήματος των μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο, όπως ορίζουν τα νέα ΑΠΣ και ΔΕΠΠΣ, είναι:

1. Η απόκτηση βασικών μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων.
2. Η καλλιέργεια της μαθηματικής γλώσσας ως μέσο επικοινωνίας.
3. Η κατανόηση στοιχειωδών μαθηματικών μεθόδων.
4. Η εξοικείωση με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία.
5. Η ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων.
6. Η ανάδειξη της δυνατότητας εφαρμογής και πρακτικής χρήσης των μαθηματικών.
7. Η ανάδειξη της δυναμικής διάστασης της μαθηματικής επιστήμης (ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εργαλείων, συμβόλων και εννοιών).
8. Η καλλιέργεια θετικής στάσης απέναντι στα μαθηματικά.

Μαθηματικά στο δημοτικό

- Τι μαθηματικά;
- Γιατί;

Τα Μαθηματικά αποτελούν σχολικό μάθημα, αλλά και κομμάτι της καθημερινής ζωής!

Μαθηματικά στο δημοτικό

- Τι μαθηματικά;
- Γιατί;
- Πώς;

Διδακτική Μαθηματικών

Μαθηματικά στο δημοτικό

- Τι μαθηματικά;
- Γιατί;
- Πώς;
- Ποιες οι προαπαιτούμενες γνώσεις;

Λογική σκέψη
Βασικές μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες
Εφαρμογή των μαθηματικών γνώσεων
Επίλυση προβλήματος

Απλοποίηση κλάσματος (1)

$$a) \frac{7550}{18375} = \frac{7550:5}{18375:5} = \frac{1470:5}{3675:5} = \frac{294}{735}$$

Άρα το $\frac{294}{735}$ είναι απλοποίηση των $\frac{7550}{18375}$ αφού διακρίνεται διαδοχικά με το 5.

Μπορούμε αν ξέρουμε να συνεχίσουμε την απλοποίηση και να διακρίνουμε το 294 με το 7 και το 735 με το 5.
 Έτσι θα έχουμε $\frac{294:7}{735:5 \cdot 7} = \frac{42}{105}$

Απλοποίηση κλάσματος (2)

1^ο θέμα

α) Για να απλοποιήσουμε το κλάσμα βρίσκουμε το Μ.Κ.Α.

$$18375 = 7550 \cdot 2 + 32675$$

$$7550 = 3875 \cdot 2 + 3475$$

$$3875 = 3475 \cdot 1 + 400$$

$$3475 = 400 \cdot 8 + 275$$

$$400 = 275 \cdot 1 + 125$$

$$275 = 125 \cdot 2 + 25$$

$$125 = 25 \cdot 5 + 0$$

Επομένως ο Μ.Κ.Α. είναι 25.

$$\frac{7550}{18375} = \frac{7550:25}{18375:25} = \frac{302}{735}$$

Απλοποίηση κλάσματος (3)

$$1a) \frac{7380:5}{18375:3} = \frac{1470:5}{6125:5} = \frac{294:2}{1225:5} = \frac{147:3}{245:5} = \frac{27}{49}$$

$$= \frac{27:3}{49:7} = \frac{9:3}{7:7} = \frac{3}{1}$$

Λογική – Ιστορική αναδρομή

- Ο Ευκλείδης, με το έργο του Στοιχεία, χρησιμοποιώντας κάποιες προτάσεις ως βάση του συστήματός του (αξιώματα) παράγαγε όλες τις υπόλοιπες (θεωρήματα).
- Παραδείγματα αξιωμάτων:
 - Από δύο σημεία διέρχεται μία μοναδική ευθεία.
 - Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις χωρίς κενά.

Λογική – Ιστορική αναδρομή

- Ο όρος λογική με τη σημερινή της έννοια αναφέρεται πρώτη φορά από τον Αλέξανδρο τον Αφροδισία (3ος αι. μ.Χ.).
- Ο Πλάτων ισχυριζόταν ότι είναι αδύνατο κάτι να ισχύει και να μην ισχύει ταυτόχρονα (Νόμος της αντίφασης, Πολιτεία).
- Στον Αριστοτέλη οφείλεται η δημιουργία του πρώτου συστήματος λογικών αρχών.

Προτάσεις

- Η πρόταση είναι μια γλωσσική ενότητα, η οποία εκφράζει κάποιο νόημα.
- Παραδείγματα:
 - **Η Μαρία σχεδιάζει ένα τρίγωνο.**
 - Σχεδίασε η Μαρία το τρίγωνο;
 - Μαρία, σχεδίασε το τρίγωνο σε παρακαλώ!
 - Κοιτάξτε, η Μαρία σχεδίασε ένα τρίγωνο!

Αποφαντικές προτάσεις

- 1α. Μου αρέσει το μπάσκετ.
- 1β. Μου αρέσει η καλαθοσφαίριση.
- 2α. Η Μαρία και ο Γιάννης μαλώνουν.
- 2β. Ο Γιάννης και η Μαρία μαλώνουν.
- 3α. Ο Παρθενώνας σχεδιάστηκε από τους Ικτίνο και Καλλικράτη
- 3β. Οι Ικτίνος και Καλλικράτης σχεδίασαν τον Παρθενώνα.

ΟΜΩΣ:

- 4α. Θα σε βαθμολογήσω και μετά θα σου δώσω εργασία.
4β. Θα σου δώσω εργασία και μετά θα σε βαθμολογήσω.

Ποιες είναι προτάσεις;

1. Το 33 είναι μεγαλύτερο του 32.
2. Η Πράγα είναι πρωτεύουσα της Αυστρίας.
3. Ο ήλιος θα λάμπει για τα επόμενα 200000000 χρόνια.
4. Η πρόταση αυτή αποτελείται από επτά λέξεις.
5. Η πρώτη έκφραση αυτής της άσκησης είναι πρόταση.
6. Η δεύτερη έκφραση αυτής της άσκησης είναι αληθής πρόταση.
7. Σας αρέσει η Λογική;
8. Αν στο δύο προσθέσουμε τρία θα πάρουμε τέσσερα.
9. Η θάλασσά μας περιλαμβάνει $10^{29} + 69$ ψάρια.
10. Γιατί το διάβασες αυτό;
11. Υπάρχει ένα πράσινο τετράδιο στο κομοδίνο.
12. Φύγε από εδώ αμέσως.
13. Ο αριθμός 3 διαιρεί τον αριθμό 10.
14. Ο αριθμός $\sqrt{3}$ είναι περιττός.

Ο Επιμενίδης, ο οποίος καταγόταν από την Κρήτη, έλεγε:
«Όλοι οι Κρητικοί είναι ψεύτες».
Μπορεί η απόφασή του να είναι πρόταση;

Λογικοί Σύνδεσμοι

- Η γωνία A είναι οξεία.
- Η γωνία B είναι αμβλεία.



- Η γωνία A είναι οξεία **και** η γωνία B είναι αμβλεία
- **Ούτε** η γωνία A είναι οξεία **ούτε** η γωνία B είναι αμβλεία

Πίνακας αληθοτιμών

Η γωνία A είναι οξεία	Η γωνία B είναι αμβλεία	Η γωνία A είναι οξεία και η γωνία B είναι αμβλεία	Ούτε η γωνία A είναι οξεία ούτε η γωνία B είναι αμβλεία
A	A	A	Ψ
A	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	A	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	A

Λογικοί Σύνδεσμοι

Λογικός σύνδεσμος	Διαβάζεται	Λογική πράξη
\neg ή $-$	όχι	Άρνηση
\vee	..ή..	Εγκλειστική Διάζευξη
$\underline{\vee}$	ή μόνο...ή μόνο	Αποκλειστική Διάζευξη
\wedge	και	Σύζευξη
\rightarrow	εάν,...,τότε	Συνεπαγωγή
\leftrightarrow	... εάν, και μόνο εάν	Ισοδυναμία

Άρνηση

- Ονομάζουμε άρνηση μιας αρχικής πρότασης p μια νέα πρόταση, η οποία συμβολίζεται με \bar{p} διαβάζεται : «όχι p » και είναι αληθής αν η p είναι ψευδής και ψευδής αν η p είναι αληθής.

Βρείτε τις αρνήσεις των προτάσεων:

1. Το κουτί είναι μαύρο.
2. Ο αριθμός είναι ρητός.
3. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
4. $2x > 3$
5. Όλα τα στοιχεία του A είναι μικρότερα του 7.
6. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο τεμπέληδες στην τάξη.

Σύζευξη

- Ονομάζουμε σύζευξη δύο αρχικών προτάσεων p και q μια νέα πρόταση, η οποία συμβολίζεται με $p \wedge q$, διαβάζεται « p και q » και είναι αληθής μόνο αν και οι δύο προτάσεις p , q είναι αληθείς.

p	q	$p \wedge q$
A	A	A
A	Ψ	Ψ
Ψ	A	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ

(Εγκλειστική) διάζευξη

- Ονομάζουμε εγκλειστική διάζευξη ή απλά διάζευξη δύο αρχικών προτάσεων p και q μια νέα πρόταση, η οποία συμβολίζεται με $p \vee q$, διαβάζεται « p ή q » και είναι ψευδής μόνο αν και οι δύο προτάσεις p , q είναι ψευδείς.

p	q	$p \vee q$
A	A	A
A	Ψ	A
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	Ψ

Αποκλειστική Διάζευξη

- Ονομάζουμε αποκλειστική διάζευξη δύο αρχικών προτάσεων p και q μια νέα πρόταση, η οποία συμβολίζεται με $p \vee q$, διαβάζεται «ή μόνο p ή μόνο q » η οποία είναι ψευδής μόνο αν οι p, q έχουν την ίδια τιμή αληθείας.

p	q	$p \vee q$
A	A	Ψ
A	Ψ	A
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	Ψ

Συνεπαγωγή

- Ονομάζουμε συνεπαγωγή δύο αρχικών προτάσεων p και q μια νέα πρόταση, η οποία συμβολίζεται με $p \rightarrow q$, διαβάζεται «αν p τότε q » και είναι ψευδής μόνο αν η p είναι αληθής και η q είναι ψευδής.

p	q	$p \rightarrow q$
A	A	A
A	Ψ	Ψ
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	A

Συνεπαγωγή

- p : Το ποτήρι περιέχει βότκα
- q : Υπάρχει αλκοόλ στο ποτήρι
- $p \rightarrow q$: Εάν το ποτήρι περιέχει βότκα τότε υπάρχει αλκοόλ στο ποτήρι

p	q	$p \rightarrow q$
A	A	A
A	Ψ	Ψ
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	A

Συνεπαγωγή

- p : Με απατάς
- q : Σε χωρίζω
- $p \rightarrow q$: Αν με απατήσεις θα σε χωρίσω

p	q	$p \rightarrow q$
A	A	A
A	Ψ	Ψ
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	A

Κρυμμένες συνεπαγωγές

- Ο βήχας και ο έρωτας δεν κρύβονται
- Η είσοδος δεν επιτρέπεται σε ανήλικους
- Το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή ονομάζεται ορθογώνιο.

Συνεπαγωγή;

- «Αν με καλέσεις στο πάρτι σου, θα σε καλέσω στο δικό μου».
- Τι παριστάνουν τα p και q αν η πρόταση αυτή γραφεί σύμφωνα με τη μορφή $p \rightarrow q$;
- Νομίζετε πως ο ομιλητής εννοούσε περισσότερα από όσα είπε;
- Τι θα έπρεπε να πει για να κάνει το νόημα της πρότασης εντελώς ξεκάθαρο;

Ισοδυναμία

- Ονομάζουμε ισοδυναμία δύο αρχικών προτάσεων p και q μια νέα πρόταση, η οποία συμβολίζεται με $p \leftrightarrow q$, διαβάζεται « p ισοδυναμεί q » και είναι αληθής αν και μόνο αν οι p , q έχουν την ίδια τιμή αληθείας.

p	q	$p \leftrightarrow q$
A	A	A
A	Ψ	Ψ
Ψ	A	Ψ
Ψ	Ψ	A

Άσκηση

- Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς;
 - α. Το 5 είναι μικρότερο του 6.
 - β. Το 5 είναι μικρότερο ή ίσο του 6.
 - γ. Το 5 είναι μικρότερο ή ίσο του 5.
 - δ. Το 5 είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 5.

Σύνθετες προτάσεις

- Θα πάω στην Αθήνα και θα συναντήσω τους φίλους μου ή θα μελετήσω.
- p: Θα πάω στην Αθήνα
- q: θα συναντήσω τους φίλους μου
- r: θα μελετήσω

$$p \wedge (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \vee r$$

Σχεδιάστε τον πίνακα αληθοτιμών!

Σύνθετες προτάσεις

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$
A	A	A	Ψ	
A	A	Ψ	A	
A	Ψ	A	A	
A	Ψ	Ψ	Ψ	
Ψ	A	A	Ψ	
Ψ	A	Ψ	A	
Ψ	Ψ	A	A	
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	

Σύνθετες προτάσεις

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$
A	A	A	Ψ	Ψ
A	A	Ψ	A	A
A	Ψ	A	A	A
A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	A	A	Ψ	Ψ
Ψ	A	Ψ	A	Ψ
Ψ	Ψ	A	A	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ

Σύνθετες προτάσεις

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee r$
A	A	A	Ψ	Ψ	
A	A	Ψ	A	A	
A	Ψ	A	A	A	
A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	
Ψ	A	A	Ψ	Ψ	
Ψ	A	Ψ	A	Ψ	
Ψ	Ψ	A	A	Ψ	
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	

Σύνθετες προτάσεις

Διαφορετικές αληθοτιμές,
άρα οι σύνθετες προτάσεις
δεν είναι ισοδύναμες.

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee r$
A	A	A	Ψ	Ψ	Ψ
A	A	Ψ	A	A	A
A	Ψ	A	A	A	A
A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	A	A	Ψ	Ψ	A
Ψ	A	Ψ	A	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	A	A	Ψ	A
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ

Σύνθετες προτάσεις

1. Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180 μοίρες και το τετράγωνο είναι παραλληλόγραμμο.
2. Αν ο 5 είναι άρτιος, τότε αν ο 7 είναι περιττός, σήμερα είναι Τρίτη.
3. Το 7 διαιρεί το 14 όταν και μόνο όταν το 4 δεν είναι περιττός.
4. Δεν ισχύει ότι: το 7 είναι περιττός και το 4 δεν είναι άρτιος.