

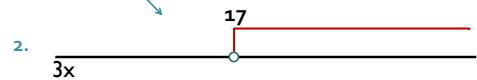
Εισαγωγή στις βασικές έννοιες των Μαθηματικών

2^ο Μάθημα Μαθηματική Λογική

«Μεταφράσεις»

- $3x > 17$ Ποια είναι η άρνησή της;

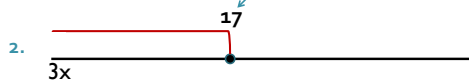
1. Το $3x$ δεν είναι μεγαλύτερο του 17 ή Το $3x$ είναι μικρότερο ή ίσο του 17



«Μεταφράσεις»

- $3x > 17$. Ποια είναι η άρνησή της;

1. Το $3x$ δεν είναι μεγαλύτερο του 17 ή Το $3x$ είναι μικρότερο ή ίσο του 17



$3x \leq 17$

«Μεταφράσεις»

Σκεφτείτε το νόημα των εκφράσεων:

- τουλάχιστον
- το πολύ
- περισσότερο από
- λιγότερο από

Λογικοί Σύνδεσμοι

Λογικός σύνδεσμος	Διαβάζεται	Λογική πράξη
\neg ή $\bar{}$	όχι	Άρνηση
\vee	..ή..	Εγκλειστική Διάζευξη
$\underline{\vee}$	ή μόνο...ή μόνο	Αποκλειστική Διάζευξη
\wedge	και	Σύζευξη
\rightarrow	εάν,...,τότε	Συνεπαγωγή
\leftrightarrow	... εάν, και μόνο εάν	Ισοδυναμία

Άρνηση

• Βρείτε τις αρνήσεις των προτάσεων:

1. Σήμερα είναι Παρασκευή.
2. Το 3 είναι πρώτος αριθμός.
3. Το τρίγωνο δεν είναι ισοσκελές.
4. $5x < 1$
5. Όλα τα στοιχεία του A διαιρούνται με το 3.
6. Υπάρχουν το πολύ δύο φοιτητές στην τάξη.

Σύνθετες προτάσεις

1. Το τετράγωνο είναι παραλληλόγραμμο και σήμερα δεν είναι Παρασκευή.
2. Αν το 3 είναι άρτιος, τότε αν το 4 είναι περιττός, το 5 διαιρεί το 25.
3. Το 6 διαιρεί το 24 όταν και μόνο όταν το 3 είναι περιττός.
4. Δεν ισχύει ότι: το 17 είναι πρώτος αριθμός και το 7 δεν είναι άρτιος.
5. Αν το 3 είναι άρτιος, τότε το 7 είναι περιττός και το 5 διαιρεί το 15.

Σύνθετες προτάσεις

• Να βρεθεί η τιμή αληθείας των παρακάτω προτάσεων

$$(3 > 2)$$

$$(2 < 1) \vee (7 > 3)$$

$$(2 < 1) \wedge (7 > 3)$$

$$(2^2 = 4) \rightarrow (2 > 4)$$

$$(4 \geq 2) \rightarrow [(5 > 2) \wedge (3 \geq 5)]$$

Σύνθετες προτάσεις

Να βρεθεί η τιμή αληθείας της πρότασης
 $[(p \rightarrow q) \vee (\bar{p} \wedge q)] \wedge (r \leftrightarrow q)$

αν δίνεται ότι:

1. Η p είναι αληθής, η q αληθής, η r ψευδής
2. Η p είναι ψευδής, η q αληθής, η r ψευδής
3. Η p είναι ψευδής, η q ψευδής, η r ψευδής

Σύνθετες προτάσεις

Να βρεθεί η τιμή αληθείας της πρότασης

$$[(p \rightarrow q) \vee (\bar{p} \wedge q)] \wedge (r \leftrightarrow q)$$

$$[(A \rightarrow A) \vee (\bar{A} \wedge A)] \wedge (\Psi \leftrightarrow A)$$

$$(A \vee \Psi) \wedge \Psi$$

$$A \wedge \Psi$$

$$\Psi$$

Άσκηση

- Κατασκευάστε τους πίνακες αληθείας των ακόλουθων σύνθετων προτάσεων:

$$(\bar{p}) \leftrightarrow q$$

$$(\bar{p} \wedge \bar{q})$$

$$(\bar{p} \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \bar{q})$$

$$(\bar{p} \wedge q) \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$$

p	q	\bar{p}	(\bar{p})	$(\bar{p}) \leftrightarrow q$
A	A	Ψ	A	A
A	Ψ	Ψ	A	Ψ
Ψ	A	A	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	A	Ψ	A

Ταυτολογίες – αυτοαντιφάσεις

Κάθε παράσταση η οποία **για κάθε συνδυασμό** των τιμών αληθείας των μεταβλητών της λαμβάνει:

- τιμή αληθείας A, ονομάζεται **ταυτολογία**.
 - Σήμερα θα βρέξει ή δεν θα βρέξει
- τιμή αληθείας Ψ, ονομάζεται **αυτοαντίφαση**.
 - Είναι Τρίτη και δεν είναι Τρίτη.

Χρήσιμες ταυτολογίες (Νόμοι)

$(\bar{\bar{p}}) \leftrightarrow p$	Διπλής άρνησης
$(p \wedge \bar{p})$	Αντίφασης
$p \vee \bar{p}$	Συμπληρώματος
$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$	Αντιμεταθετικότητας
$(\overline{p \wedge q}) \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$	De Morgan Σύζευξης
$(\overline{p \vee q}) \leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$	De Morgan Διάζευξης
$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$	Αντιθετοαντιστροφής

Νόμος της αντιθετοαντιστροφής

- Η είσοδος δεν επιτρέπεται σε ανήλικους
- ↓
- Αν είσαι ανήλικος δεν (σου) επιτρέπεται η είσοδος.
- ↓
- Αν σου επιτρέπεται η είσοδος, τότε είσαι ενήλικος.

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$$

Νόμος της αντιθετοαντιστροφής

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$$

- Αν ένα αυτοκίνητο είναι Ferrari, τότε είναι γρήγορο αυτοκίνητο.

Ποια είναι η ισοδύναμη της πρότασης;

Νόμος της αντιθετοαντιστροφής

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$$

- Αν $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$.

Ποια είναι η ισοδυναμική της πρότασης;
Ποιος άλλος νόμος πρέπει να εφαρμοστεί για να τη βρούμε;

$$(\alpha = 0) \vee (\beta = 0) \leftrightarrow (\alpha = 0 \wedge \beta = 0)$$

$$(\alpha = 0) \vee (\beta = 0) \leftrightarrow (\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0)$$

Άσκηση

- Γράψτε τρεις συνεπαγωγές που να προέρχονται από την καθημερινότητα ή από τα Μαθηματικά.
- Γράψτε τις ισοδύναμες τους χρησιμοποιώντας τον νόμο της αντιθετοαντιστροφής.
- Σχολιάστε αν το νόημα παραμένει ίδιο!