

Εισαγωγή στις βασικές έννοιες των Μαθηματικών

3^ο Μάθημα Μαθηματική Λογική Συνολοθεωρία

Λογικοί Σύνδεσμοι

Λογικός σύνδεσμος	Διαβάζεται	Λογική πράξη
\neg ή $-$	όχι	Άρνηση
\vee	..ή..	Εγκλειστική Διάζευξη
$\underline{\vee}$	ή μόνο...ή μόνο	Αποκλειστική Διάζευξη
\wedge	και	Σύζευξη
\rightarrow	εάν,..., τότε	Συνεπαγωγή
\leftrightarrow	... εάν, και μόνο εάν	Ισοδυναμία

Άσκηση

- Αν η πρόταση $p \rightarrow q$ είναι ψευδής, να βρεθεί η τιμή αληθείας της πρότασης:

$$(p \rightarrow \bar{q}) \wedge (\bar{p} \leftrightarrow q)$$

Πότε η πρόταση $p \rightarrow q$ είναι ψευδής;

Γιατί ασχολούμαστε με τη Μαθηματική Λογική;

Περί... λογικής



- Στον σταθμό μας η μουσική δεν σταματά ποτέ.
- Διάλειμμα για διαφημίσεις και τα λέμε αμέσως μετά!

Την κυρία ή την τίγρη;

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΔΩΜΑΤΙΟ
ΥΠΑΡΧΕΙ ΜΙΑ ΚΥΡΙΑ
ΚΑΙ ΣΤΟ ΔΙΠΛΑΝΟ
ΜΙΑ ΤΙΓΡΗ

ΣΤΟ ΕΝΑ ΑΠΟ ΑΥΤΑ ΤΑ
ΔΩΜΑΤΙΑ ΥΠΑΡΧΕΙ ΜΙΑ
ΚΥΡΙΑ ΚΑΙ ΣΤΟ ΑΛΛΟ
ΜΙΑ ΤΙΓΡΗ

Έστω
p: στο Δωμάτιο I υπάρχει μια τίγρη
q: Στο Δωμάτιο II υπάρχει μια τίγρη

Η μία πινακίδα λέει την αλήθεια
και η άλλη λέει ψέματα. Ποιο
δωμάτιο θα διαλέγατε;

Την κυρία ή την τίγρη;

ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟ ΔΩΜΑΤΙΟ
ΥΠΑΡΧΕΙ ΜΙΑ ΚΥΡΙΑ
ΚΑΙ ΣΤΟ ΔΙΠΛΑΝΟ
ΜΙΑ ΤΙΓΡΗ

ΣΤΟ ΕΝΑ ΑΠΟ ΑΥΤΑ ΤΑ
ΔΩΜΑΤΙΑ ΥΠΑΡΧΕΙ ΜΙΑ
ΚΥΡΙΑ ΚΑΙ ΣΤΟ ΑΛΛΟ
ΜΙΑ ΤΙΓΡΗ

$\bar{p} \wedge q$

$(\bar{p} \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q})$

Την κυρία ή την τίγρη;

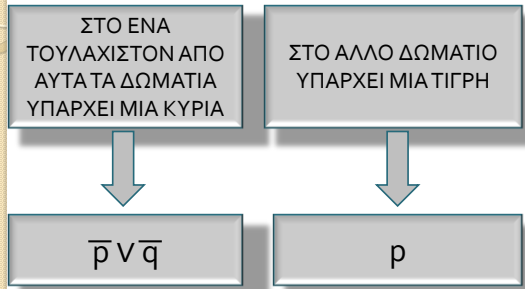
ΣΤΟ ΕΝΑ
ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΑΠΟ
ΑΥΤΑ ΤΑ ΔΩΜΑΤΙΑ
ΥΠΑΡΧΕΙ ΜΙΑ ΚΥΡΙΑ

ΣΤΟ ΑΛΛΟ ΔΩΜΑΤΙΟ
ΥΠΑΡΧΕΙ ΜΙΑ ΤΙΓΡΗ

Έστω
p: στο Δωμάτιο I υπάρχει μια τίγρη
q: Στο Δωμάτιο II υπάρχει μια τίγρη

Και οι δύο πινακίδες λένε την αλήθεια
ή οι δύο πινακίδες λένε ψέματα.
Ποιο δωμάτιο θα διαλέγατε;

Την κυρία ή την τίγρη;



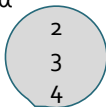
Σύνολα

- Κάθε συλλογή αντικειμένων που θεωρούνται ως μία ολότητα. Τα αντικείμενα αυτά είναι σαφώς ορισμένα και μπορούμε να διακρίνουμε για καθένα από αυτά αν ανήκει ή όχι στο σύνολο.
- Είναι σύνολα:
 - οι άρτιοι αριθμοί;
 - οι ψηλοί άνθρωποι;
 - οι φοιτητές που τους αρέσουν τα Μαθηματικά;

Σύνολα

Τρόποι αναπαράστασης:

- Αναγραφή
 - $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- Περιγραφή
 - $B = \{n: n \text{ φυσικός αριθμός μικρότερος του } 3\}$
 - $\Gamma = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ και } n \leq 7\}$
- Γραφικά



Μπορούν όλα τα σύνολα να αναπαρασταθούν με όλους τους τρόπους;

Ισότητα συνόλων

Ιδιότητες:

1. $A = A$
2. Αν $A = B$ τότε $B = A$
3. Αν $A = B$ και $B = \Gamma$ τότε $A = \Gamma$

Γνήσιο υποσύνολο

- $A \subset B$ αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B και υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο του B που δεν ανήκει στο A .
 - $A \subset B \Leftrightarrow ((\forall x \in A: x \in B) \wedge (\exists y \in B: y \notin A))$.
- $N \subset Z \subset Q \subset R$
- $\emptyset \subset A$ για κάθε $A \neq \emptyset$

Υποσύνολο

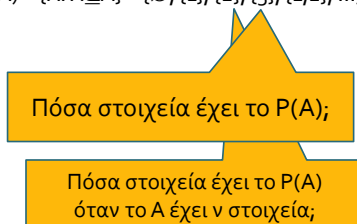
- $A \subseteq B$ αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B .
 - $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A: x \in B)$

Ιδιότητες:

1. $A \subseteq A$
2. $A \subseteq B$ και $B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$
3. Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$ τότε $A \subseteq \Gamma$
4. $\emptyset \subseteq A$

Δυναμοσύνολο

- Το σύνολο των υποσυνόλων του A .
 - Αν $A = \{1, 2, 3\}$ τότε:
 $P(A) = \{X: X \subseteq A\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \dots\}$



Τομή συνόλων

- $A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$

Ιδιότητες

- $A \cap A = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$

Ένωση συνόλων

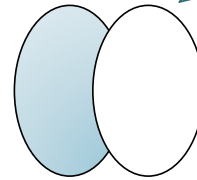
- $A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$

Ιδιότητες

- $A \cup A = A$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$
- $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$
- $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

Διαφορά συνόλων

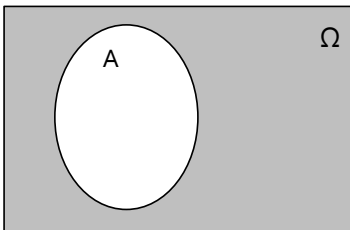
- $A - B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$



$A = \{1, 2, 3, 4\}$
 $B = \{1, 3, 5\}$
 $A - B = \{2, 4\}$

Συμπλήρωμα συνόλου

- $A^c = \{x: x \in \Omega \wedge x \notin A\}$



Άσκηση 1

- Αν $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{2, 4, 6\}$ $\Gamma = \{1, 3, 5\}$ βρείτε τα:
 - $A \cap B$
 - $A \cup B$
 - $(A - B) \cup \Gamma$
 - $(A \cap B) \cup \Gamma$
 - $B - \Gamma$



Άσκηση 2

◦ Αν:

A το σύνολο όλων των τριγώνων

B το σύνολο των ισοσκελών τριγώνων

Γ το σύνολο των ισοπλευρών τριγώνων

βρείτε τα:

$$A \cup B$$

$$A \cap B$$

$$B \cup \Gamma$$

$$(A \cap B) \cap \Gamma$$