

Εισαγωγή στις βασικές έννοιες των Μαθηματικών

5^ο Μάθημα Μαθηματική Λογική (επανάληψη)

Προτάσεις

- Η πρόταση είναι μια γλωσσική ενότητα, η οποία εκφράζει κάποιο νόημα.
- Παραδείγματα:
 - Η Μαρία σχεδιάζει ένα τρίγωνο.
 - Σχεδίασε η Μαρία το τρίγωνο;
 - Μαρία, σχεδίασε το τρίγωνο σε παρακαλώ!
 - Κοιτάξτε, η Μαρία σχεδίασε ένα τρίγωνο!

Προτάσεις

- Η πρόταση είναι μια γλωσσική ενότητα, η οποία εκφράζει κάποιο νόημα.
- Παραδείγματα:
 - **Η Μαρία σχεδιάζει ένα τρίγωνο.**
 - Σχεδίασε η Μαρία το τρίγωνο;
 - Μαρία, σχεδίασε το τρίγωνο σε παρακαλώ!
 - Κοιτάξτε, η Μαρία σχεδίασε ένα τρίγωνο!

Ποιες είναι προτάσεις;

1. Το 33 είναι μεγαλύτερο του 32.
2. Η Πράγα είναι πρωτεύουσα της Αυστρίας.
3. Ο ήλιος θα λάμπει για τα επόμενα 200000000 χρόνια.
4. Η πρόταση αυτή αποτελείται από επτά λέξεις.
5. Η πρώτη έκφραση αυτής της άσκησης είναι πρόταση.
6. Η δεύτερη έκφραση αυτής της άσκησης είναι αληθής πρόταση.
7. Σας αρέσει η Λογική;
8. Αν στο δύο προσθέσουμε τρία θα πάρουμε τέσσερα.
9. Η θάλασσά μας περιλαμβάνει $10^{29} + 69$ ψάρια.
10. Γιατί το διάβασες αυτό;
11. Υπάρχει ένα πράσινο τετράδιο στο κομοδίνο.
12. Φύγε από εδώ αμέσως.
13. Ο αριθμός 3 διαιρεί τον αριθμό 10.
14. Ο αριθμός $\sqrt{3}$ είναι περιττός.

Λογικοί Σύνδεσμοι

- Η γωνία A είναι οξεία.
- Η γωνία B είναι αμβλεία.



- Η γωνία A είναι οξεία **και** η γωνία B είναι αμβλεία
- **Ούτε** η γωνία A είναι οξεία **ούτε** η γωνία B είναι αμβλεία

Πίνακας αληθοτιμών

Η γωνία A είναι οξεία	Η γωνία B είναι αμβλεία	Η γωνία A είναι οξεία και η γωνία B είναι αμβλεία	Ούτε η γωνία A είναι οξεία ούτε η γωνία B είναι αμβλεία
A	A		
A	Ψ		
Ψ	A		
Ψ	Ψ		

Πίνακας αληθοτιμών

Η γωνία A είναι οξεία	Η γωνία B είναι αμβλεία	Η γωνία A είναι οξεία και η γωνία B είναι αμβλεία	Ούτε η γωνία A είναι οξεία ούτε η γωνία B είναι αμβλεία
A	A	A	
A	Ψ	Ψ	
Ψ	A	Ψ	
Ψ	Ψ	Ψ	

Πίνακας αληθοτιμών

Η γωνία A είναι οξεία	Η γωνία B είναι αμβλεία	Η γωνία A είναι οξεία και η γωνία B είναι αμβλεία	Ούτε η γωνία A είναι οξεία ούτε η γωνία B είναι αμβλεία
A	A	A	Ψ
A	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	A	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	A

Λογικοί Σύνδεσμοι

Λογικός σύνδεσμος	Διαβάζεται	Λογική πράξη
\neg ή $\bar{}$	όχι	Άρνηση
\vee	..ή..	Εγκλειστική Διάζευξη
$\underline{\vee}$	ή μόνο...ή μόνο	Αποκλειστική Διάζευξη
\wedge	και	Σύζευξη
\rightarrow	εάν,...,τότε	Συνεπαγωγή
\leftrightarrow	... εάν, και μόνο εάν	Ισοδυναμία

Άρνηση

- Ονομάζουμε άρνηση μιας αρχικής πρότασης p μια νέα πρόταση, η οποία συμβολίζεται με \bar{p} διαβάζεται: «όχι p »

Βρείτε τις αρνήσεις των προτάσεων:

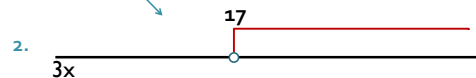
1. Το κουτί είναι μαύρο.
2. Ο αριθμός είναι ρητός.
3. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
4. $2x > 3$
5. Όλα τα στοιχεία του A είναι μικρότερα του 7.
6. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο τεμπέληδες στην τάξη.

«Μεταφράσεις»

- $3x > 17$. Ποια είναι η άρνησή της;
1. Το $3x$ δεν είναι μεγαλύτερο του 17 ή Το $3x$ είναι μικρότερο ή ίσο του 17

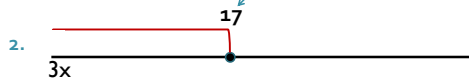
«Μεταφράσεις»

- $3x > 17$ Ποια είναι η άρνησή της;
1. Το $3x$ δεν είναι μεγαλύτερο του 17 ή Το $3x$ είναι μικρότερο ή ίσο του 17



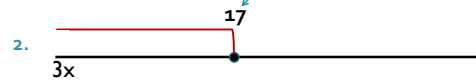
«Μεταφράσεις»

- $3x > 17$. Ποια είναι η **άρνησή της**;
1. Το $3x$ δεν είναι μεγαλύτερο του 17 ή
Το $3x$ είναι μικρότερο ή ίσο του 17



«Μεταφράσεις»

- $3x > 17$. Ποια είναι η **άρνησή της**;
1. Το $3x$ δεν είναι μεγαλύτερο του 17 ή
Το $3x$ είναι μικρότερο ή ίσο του 17



$3x \leq 17$

«Μεταφράσεις»

Σκεφτείτε το νόημα των εκφράσεων:

- τουλάχιστον
- το πολύ
- περισσότερο από
- λιγότερο από

Άρνηση

- Βρείτε τις αρνήσεις των προτάσεων:
1. Σήμερα είναι Παρασκευή.
 2. Το 3 είναι πρώτος αριθμός.
 3. Το τρίγωνο δεν είναι ισοσκελές.
 4. $5x < 1$
 5. Όλα τα στοιχεία του A διαιρούνται με το 3.
 6. Υπάρχουν το πολύ δύο φοιτητές στην τάξη.

Σύζευξη

- Ονομάζουμε σύζευξη δύο αρχικών προτάσεων p και q μια νέα πρόταση, η οποία συμβολίζεται με $p \wedge q$, διαβάζεται « p και q » και είναι αληθής μόνο αν και οι δύο προτάσεις p, q είναι αληθείς.

p	q	$p \wedge q$
A	A	A
A	Ψ	Ψ
Ψ	A	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ

(Εγκλειστική) διάζευξη

- Ονομάζουμε εγκλειστική διάζευξη ή απλά διάζευξη δύο αρχικών προτάσεων p και q μια νέα πρόταση, η οποία συμβολίζεται με $p \vee q$, διαβάζεται « p ή q » και είναι ψευδής μόνο αν και οι δύο προτάσεις p, q είναι ψευδείς.

p	q	$p \vee q$
A	A	A
A	Ψ	A
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	Ψ

Αποκλειστική Διάζευξη

- Ονομάζουμε αποκλειστική διάζευξη δύο αρχικών προτάσεων p και q μια νέα πρόταση, η οποία συμβολίζεται με $p \underline{\vee} q$, διαβάζεται «ή μόνο p ή μόνο q » η οποία είναι ψευδής μόνο αν οι p, q έχουν την ίδια τιμή αληθείας.

p	q	$p \underline{\vee} q$
A	A	Ψ
A	Ψ	A
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	Ψ

Συνεπαγωγή

- Ονομάζουμε συνεπαγωγή δύο αρχικών προτάσεων p και q μια νέα πρόταση, η οποία συμβολίζεται με $p \rightarrow q$, διαβάζεται «αν p τότε q » και είναι ψευδής μόνο αν η p είναι αληθής και η q είναι ψευδής.

p	q	$p \rightarrow q$
A	A	A
A	Ψ	Ψ
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	A

Συνεπαγωγή

- p : Το ποτήρι περιέχει βότκα
- q : Υπάρχει αλκοόλ στο ποτήρι
- $p \rightarrow q$: Εάν το ποτήρι περιέχει βότκα τότε υπάρχει αλκοόλ στο ποτήρι

p	q	$p \rightarrow q$
A	A	
A	Ψ	
Ψ	A	
Ψ	Ψ	

Συνεπαγωγή

- p : Το ποτήρι περιέχει βότκα
- q : Υπάρχει αλκοόλ στο ποτήρι
- $p \rightarrow q$: Εάν το ποτήρι περιέχει βότκα τότε υπάρχει αλκοόλ στο ποτήρι

p	q	$p \rightarrow q$
A	A	A
A	Ψ	
Ψ	A	
Ψ	Ψ	

Συνεπαγωγή

- p : Το ποτήρι περιέχει βότκα
- q : Υπάρχει αλκοόλ στο ποτήρι
- $p \rightarrow q$: Εάν το ποτήρι περιέχει βότκα τότε υπάρχει αλκοόλ στο ποτήρι

p	q	$p \rightarrow q$
A	A	A
A	Ψ	
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	

Συνεπαγωγή

- p : Το ποτήρι περιέχει βότκα
- q : Υπάρχει αλκοόλ στο ποτήρι
- $p \rightarrow q$: Εάν το ποτήρι περιέχει βότκα τότε υπάρχει αλκοόλ στο ποτήρι

p	q	$p \rightarrow q$
A	A	A
A	Ψ	
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	A

Συνεπαγωγή

- p : Το ποτήρι περιέχει βότκα
- q : Υπάρχει αλκοόλ στο ποτήρι
- $p \rightarrow q$: Εάν το ποτήρι περιέχει βότκα τότε υπάρχει αλκοόλ στο ποτήρι

p	q	$p \rightarrow q$
A	A	A
A	Ψ	Ψ
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	A

Συνεπαγωγή

- p : Με απατάς
- q : Σε χωρίζω
- $p \rightarrow q$: Αν με απατήσεις θα σε χωρίσω

p	q	$p \rightarrow q$
A	A	A
A	Ψ	Ψ
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	A

Κρυμμένες συνεπαγωγές

- Ο βήχας και ο έρωτας δεν κρύβονται
- Η είσοδος δεν επιτρέπεται σε ανήλικους
- Το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή ονομάζεται ορθογώνιο.

Ισοδυναμία

- Ονομάζουμε ισοδυναμία δύο αρχικών προτάσεων p και q μια νέα πρόταση, η οποία συμβολίζεται με $p \leftrightarrow q$, διαβάζεται « p ισοδυναμεί q » και είναι αληθής αν και μόνο αν οι p, q έχουν την ίδια τιμή αληθείας.

p	q	$p \leftrightarrow q$
A	A	A
A	Ψ	Ψ
Ψ	A	Ψ
Ψ	Ψ	A

Ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος αν και μόνο αν δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες

Άσκηση

- Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς;
 - α. Το 5 είναι μικρότερο του 6.
 - β. Το 5 είναι μικρότερο ή ίσο του 6.
 - γ. Το 5 είναι μικρότερο ή ίσο του 5.
 - δ. Το 5 είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 5.

Σύνθετες προτάσεις

- Θα πάω στην Αθήνα και θα συναντήσω τους φίλους μου ή θα μελετήσω.
- p: Θα πάω στην Αθήνα
- q: θα συναντήσω τους φίλους μου
- r: θα μελετήσω

$$p \wedge (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \vee r$$

Σχεδιάστε τον πίνακα αληθοτιμών!

Σύνθετες προτάσεις

- Θα πάω στην Αθήνα και θα συναντήσω τους φίλους μου ή θα μελετήσω.
- p: Θα πάω στην Αθήνα
- q: θα συναντήσω τους φίλους μου
- r: θα μελετήσω

$$p \wedge (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \vee r$$

Σύνθετες προτάσεις

p	q	r		
A	A	A		
A	A	Ψ		

Σύνθετες προτάσεις

p	q	r		
A	A	A		
A	A	Ψ		
A	Ψ	A		
A	Ψ	Ψ		
Ψ	A	A		
Ψ	A	Ψ		
Ψ	Ψ	A		
Ψ	Ψ	Ψ		

Σύνθετες προτάσεις

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$
A	A	A		
A	A	Ψ		
A	Ψ	A		
A	Ψ	Ψ		
Ψ	A	A		
Ψ	A	Ψ		
Ψ	Ψ	A		
Ψ	Ψ	Ψ		

Σύνθετες προτάσεις

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$
A	A	A	Ψ	
A	A	Ψ		
A	Ψ	A		
A	Ψ	Ψ		
Ψ	A	A		
Ψ	A	Ψ		
Ψ	Ψ	A		
Ψ	Ψ	Ψ		

Σύνθετες προτάσεις

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$
A	A	A	Ψ	
A	A	Ψ	A	
A	Ψ	A	A	
A	Ψ	Ψ	Ψ	
Ψ	A	A	Ψ	
Ψ	A	Ψ	A	
Ψ	Ψ	A	A	
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	

Σύνθετες προτάσεις

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$
A	A	A	Ψ	
A	A	Ψ	A	
A	Ψ	A	A	
A	Ψ	Ψ	Ψ	
Ψ	A	A	Ψ	
Ψ	A	Ψ	A	
Ψ	Ψ	A	A	
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	

Σύνθετες προτάσεις

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$
A	A	A	Ψ	Ψ
A	A	Ψ	A	A
A	Ψ	A	A	A
A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	A	A	Ψ	Ψ
Ψ	A	Ψ	A	Ψ
Ψ	Ψ	A	A	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ

Σύνθετες προτάσεις

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee r$
A	A	A	Ψ	Ψ	
A	A	Ψ	A	A	
A	Ψ	A	A	A	
A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	
Ψ	A	A	Ψ	Ψ	
Ψ	A	Ψ	A	Ψ	
Ψ	Ψ	A	A	Ψ	
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	

Σύνθετες προτάσεις

Διαφορετικές αληθοτιμές,
άρα οι σύνθετες προτάσεις
δεν είναι ισοδύναμες.

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee r$
A	A	A	Ψ	Ψ	Ψ
A	A	Ψ	A	A	A
A	Ψ	A	A	A	A
A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	A	A	Ψ	Ψ	A
Ψ	A	Ψ	A	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	A	A	Ψ	A
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ

Σύνθετες προτάσεις

1. Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180 μοίρες και το τετράγωνο είναι παραλληλόγραμμο.
2. Αν ο 5 είναι άρτιος, τότε αν ο 7 είναι περιττός, σήμερα είναι Τρίτη.
3. Το 7 διαιρεί το 14 όταν και μόνο όταν το 4 δεν είναι περιττός.
4. Δεν ισχύει ότι: το 7 είναι περιττός και το 4 δεν είναι άρτιος.

Σύνθετες προτάσεις

1. Το τετράγωνο είναι παραλληλόγραμμο και σήμερα δεν είναι Παρασκευή.
2. Αν το 3 είναι άρτιος, τότε αν το 4 είναι περιττός, το 5 διαιρεί το 25.
3. Το 6 διαιρεί το 24 όταν και μόνο όταν το 3 είναι περιττός.
4. Δεν ισχύει ότι: το 17 είναι πρώτος αριθμός και το 7 δεν είναι άρτιος.
5. Αν το 3 είναι άρτιος, τότε το 7 είναι περιττός και το 5 διαιρεί το 15.

Σύνθετες προτάσεις

- Να βρεθεί η τιμή αληθείας των παρακάτω προτάσεων

$$(3 > 2)$$

$$(2 < 1) \vee (7 > 3)$$

$$(2 < 1) \wedge (7 > 3)$$

$$(2^2 = 4) \rightarrow (2 > 4)$$

$$(4 \geq 2) \rightarrow [(5 > 2) \wedge (3 \geq 5)]$$

Σύνθετες προτάσεις

Να βρεθεί η τιμή αληθείας της πρότασης

$$[(p \rightarrow q) \vee (\bar{p} \wedge q)] \wedge (r \leftrightarrow q)$$

αν δίνεται ότι:

1. Η p είναι αληθής, η q αληθής, η r ψευδής
2. Η p είναι ψευδής, η q αληθής, η r ψευδής
3. Η p είναι ψευδής, η q ψευδής, η r ψευδής

Σύνθετες προτάσεις

Να βρεθεί η τιμή αληθείας της πρότασης

$$[(p \rightarrow q) \vee (\bar{p} \wedge q)] \wedge (r \leftrightarrow q)$$

$$[(A \rightarrow A) \vee (\bar{A} \wedge A)] \wedge (\Psi \leftrightarrow A)$$

$$(A \vee \Psi) \wedge \Psi$$

$$A \wedge \Psi$$

$$\Psi$$

Άσκηση

- Κατασκευάστε τους πίνακες αληθείας των ακόλουθων σύνθετων προτάσεων:

$$(\bar{p}) \leftrightarrow q$$

$$\overline{(p \wedge \bar{q})}$$

$$\overline{(p \rightarrow q)} \leftrightarrow (p \wedge \bar{q})$$

$$\overline{(p \wedge q)} \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$$

p	q	\bar{p}	(\bar{p})	$(\bar{p}) \leftrightarrow q$

p	q	\bar{p}	(\bar{p})	$(\bar{p}) \leftrightarrow q$
A	A			
A	Ψ			
Ψ	A			
Ψ	Ψ			

p	q	\bar{p}	(\bar{p})	$(\bar{p}) \leftrightarrow q$
A	A	Ψ		
A	Ψ	Ψ		
Ψ	A	A		
Ψ	Ψ	A		

p	q	\bar{p}	(\bar{p})	$(\bar{p}) \leftrightarrow q$
A	A	Ψ	A	
A	Ψ	Ψ	A	
Ψ	A	A	Ψ	
Ψ	Ψ	A	Ψ	

p	q	\bar{p}	(\bar{p})	$(\bar{p}) \leftrightarrow q$
A	A	Ψ	A	
A	Ψ	Ψ	A	
Ψ	A	A	Ψ	
Ψ	Ψ	A	Ψ	

p	q	\bar{p}	(\bar{p})	$(\bar{p}) \leftrightarrow q$
A	A	Ψ	A	A
A	Ψ	Ψ	A	Ψ
Ψ	A	A	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	A	Ψ	A

Άσκηση

- Κατασκευάστε τους πίνακες αληθείας των ακόλουθων σύνθετων προτάσεων:

$$\overline{(\overline{p})} \leftrightarrow q$$

$$\overline{(p \wedge \overline{q})}$$

$$\overline{(p \rightarrow q)} \leftrightarrow (p \wedge \overline{q})$$

$$\overline{(p \wedge q)} \leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$$

Ταυτολογίες – αυτοαντιφάσεις

Κάθε παράσταση η οποία **για κάθε συνδυασμό** των τιμών αληθείας των μεταβλητών της λαμβάνει:

- τιμή αληθείας Α, ονομάζεται **ταυτολογία**.
 - Σήμερα θα βρέξει ή δεν θα βρέξει
- τιμή αληθείας Ψ, ονομάζεται **αυτοαντίφαση**.
 - Είναι Τρίτη και δεν είναι Τρίτη.

Χρήσιμες ταυτολογίες (Νόμοι)

$\overline{(\overline{p})} \leftrightarrow p$	Διπλής άρνησης
$\overline{(p \wedge \overline{p})}$	Αντίφασης
$p \vee \overline{p}$	Συμπληρώματος
$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$	Αντιμεταθετικότητα
$\overline{(p \wedge q)} \leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$	De Morgan Σύζευξης
$\overline{(p \vee q)} \leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$	De Morgan Διάζευξης
$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\overline{q} \rightarrow \overline{p})$	Αντιθετοαντιστροφής

Νόμος της αντιθετοαντιστροφής

- Η είσοδος δεν επιτρέπεται σε ανήλικους
- ↓
- Αν είσαι ανήλικος δεν (σου) επιτρέπεται η είσοδος.
- ↓
- Αν σου επιτρέπεται η είσοδος, τότε είσαι ενήλικος.

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\overline{q} \rightarrow \overline{p})$$

Νόμος της αντιθετοαντιστροφής

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$$

- Αν ένα αυτοκίνητο είναι Ferrari, τότε είναι γρήγορο αυτοκίνητο.

Ποια είναι η ισοδύναμή της πρότασης;

Νόμος της αντιθετοαντιστροφής

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$$

- Αν $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$.

Ποια είναι η ισοδύναμή της πρότασης;
Ποιος άλλος νόμος πρέπει να εφαρμοστεί για να τη βρούμε;

$$(\alpha = 0) \vee (\beta = 0) \leftrightarrow (\alpha = 0 \wedge \beta = 0)$$

$$(\alpha = 0) \vee (\beta = 0) \leftrightarrow (\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0)$$

Άσκηση

- Γράψτε τρεις συνεπαγωγές που να προέρχονται από την καθημερινότητα ή από τα Μαθηματικά.
- Γράψτε τις ισοδύναμές τους χρησιμοποιώντας τον νόμο της αντιθετοαντιστροφής.
- Σχολιάστε αν το νόημα παραμένει ίδιο!