Εισαγωγή στις βασικές έννοιες των Μαθηματικών

8ο Μάθημα
Διαιρετότητα

Ευκλείδεια διαίρεση

- Για κάθε ζεύγος ακεραίων αριθμών α, β με β≠0, υπάρχει μοναδικό ζεύγος ακεραίων q, r έτσι ώστε:
  α = βq + r με $0 \leq r < |\beta|$

Αν β = −9,
τότε για α = 1, 23, −29, −87:
- $1 = (-9)\cdot 0 + 1$
- $23 = (-9)(-2) + 5$
- $-29 = (-9)\cdot 4 + 7$
- $-87 = (-9)\cdot 10 + 3$

Ευκλείδεια διαίρεση με το 2

- **α = 2q + r** με **$0 \leq r < 2$**
  - Πιθανά υπόλοιπα:
    - r = 0: **α = 2q**
    - r = 1: **α = 2q + 1**

Διαιρετότητα

- **Ο ακέραιος α διαιρεί τον ακέραιο β αν υπάρχει ακέραιος γ τέτοιος ώστε β = αγ.**
- Αυτό συμβολίζεται με α|β
  Ισοδύναμες εκφράσεις:
  - *Ο β διαιρείται από τον α*
  - *Ο β είναι ένα πολλαπλάσιο του α*

•Το 4 διαιρεί το −20, αφού −20 = 4(−5),
•Το 15 δεν διαιρεί το 10, αφού δεν υπάρχει ακέραιος γ τέτοιος ώστε 10 = 15γ.

Κριτήρια διαιρετότητας

Ένας αριθμός διαιρείται:

- με το 2 αν το τελευταίο του ψηφίο διαιρείται με το 2.
- με το 3 αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3.
- με το 4 αν ο αριθμός που σχηματίζεται από τα δύο τελευταία ψηφία του διαιρείται με το 4.
- με το 5 αν το τελευταίο του ψηφίο διαιρείται με το 5.
- με το 8 αν ο αριθμός που σχηματίζεται από τα τρία τελευταία ψηφία του διαιρείται με το 8.
- με το 9 αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9.
- με το 10, το 100, το 1000, κ.ο.κ. αν τα τελευταία του ψηφία είναι 0, 00, 000, κ.ο.κ. αντίστοιχα.

Ιδιότητες διαιρετότητας

1. $\alpha|0$
2. Αν $0|\beta$ τότε $\beta=0$
3. $\alpha|\alpha$
4. Αν $\alpha|\beta$ και $\beta|\gamma$ τότε $\alpha|\gamma$
5. Αν $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$ τότε $\alpha|\kappa\beta+\lambda\gamma$
6. Αν $\alpha|\beta$ και $\gamma|\delta$ τότε $\alpha\gamma|\beta\delta$
7. Αν $\alpha|\beta$ τότε $\kappa\alpha|\kappa\beta$
8. Αν $\alpha|\beta$ και $\beta\neq 0$ τότε $|\alpha|\leq|\beta|$
9. Αν $\alpha|\beta$ και $\beta|\alpha$ τότε $|\alpha|=|\beta|$

$3|6$ και $6|18 \Rightarrow 3|18$

$3|6$ και $3|9 \Rightarrow 3|6+2\cdot 9$

$3|6$ και $2|4 \Rightarrow 6|24$

Πρώτοι αριθμοί

- Ένας φυσικός αριθμός p > 1 λέγεται **πρώτος αριθμός αν οι μοναδικοί φυσικοί διαιρέτες του είναι το 1 και ο p.**
- Κάθε φυσικός αριθμός που δεν είναι πρώτος ονομάζεται **σύνθετος**.
  Αν ο α είναι σύνθετος τότε
  $\alpha > 1$ και θα υπάρχει ανάλυση:
  $\alpha = \beta\gamma$ με $1<\beta<\alpha$ και $1<\gamma<\alpha$.

Πρώτοι αριθμοί

Θεώρημα 1

Κάθε φυσικός αριθμός $\alpha > 1$ έχει ένα τουλάχιστον πρώτο διαιρέτη.

Πρώτοι αριθμοί

Θεώρημα 2 – Ευκλείδη
Το πλήθος των πρώτων αριθμών είναι άπειρο.

Απόδειξη

- Έστω ότι το πλήθος των πρώτων αριθμών είναι **πεπερασμένο** και έστω $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\nu$ όλοι οι πρώτοι αριθμοί.
- Θεωρούμε τον φυσικό αριθμό $\alpha = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_\nu + 1$.
- Σύμφωνα με το Θεώρημα 1 ο αριθμός α θα έχει ένα πρώτο διαιρέτη p.
- Ο $p = p_\kappa$ για κάποιο κ, $1 \leq \kappa \leq \nu$.
- Είναι $p|\alpha$ και $p|\, p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_\nu$, επομένως $p|\, \alpha - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_\nu$ άρα $p|1 \Rightarrow p = 1$.

Πρώτοι αριθμοί

Θεώρημα 3

Κάθε **σύνθετος** φυσικός αριθμός $\alpha > 1$ έχει ένα τουλάχιστον πρώτο διαιρέτη $p \leq \sqrt{\alpha}$

Πρώτοι αριθμοί

Πόρισμα

Αν ένας φυσικός αριθμός $\alpha > 1$ δεν διαιρείται από κανένα πρώτο αριθμό $p \leq \sqrt{\alpha}$ τότε ο α είναι πρώτος αριθμός.

έτσι εξετάζω αν ένας αριθμός είναι πρώτος ή σύνθετος

Κόσκινο του Ερατοσθένη

Πώς βρίσκω τους πρώτους αριθμούς που δεν υπερβαίνουν έναν ακέραιο α>1;

- Γράφω σε έναν πίνακα με αύξουσα σειρά τους ακεραίους από 2 μέχρι α.
- Αφήνω το 2 και διαγράφω όλα τα πολλαπλάσιά του.
- Ο επόμενος πρώτος στον πίνακα μετά τον 2 είναι το 3. Αφήνω το 3 και διαγράφω όλα τα πολλαπλάσιά του κ.ο.κ.
- Συνεχίζω την ίδια διαδικασία μέχρι τον πρώτο p με $p \leq \sqrt{\alpha}$.
- Οι ακέραιοι που απομένουν, δηλαδή όσοι δεν «έπεσαν» από το «κόσκινο», είναι οι πρώτοι μεταξύ 2 και α. Όλοι οι άλλοι «έπεσαν», διότι, ως σύνθετοι, είχαν διαιρέτη κάποιον πρώτο μικρότερο ή ίσο της $\sqrt{\alpha}$ και ως πολλαπλάσιά του διαγράφηκαν.

Κόσκινο του Ερατοσθένη

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Κόσκινο του Ερατοσθένη

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Κόσκινο του Ερατοσθένη

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Κόσκινο του Ερατοσθένη

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Κόσκινο του Ερατοσθένη

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Κόσκινο του Ερατοσθένη

	2								10
11	12								20
21	22								30
31	32								40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

εξέτασα όλους τους πρώτους αριθμούς που είναι μικρότεροι ή ίσοι από $\sqrt{100} = 10$

Πρώτοι αριθμοί

Πόρισμα

Αν ένας φυσικός αριθμός α > 1 δεν διαιρείται από κανένα πρώτο αριθμό $p \leq \sqrt{\alpha}$ τότε ο α είναι πρώτος αριθμός.

έτσι εξετάζω αν ένας αριθμός είναι πρώτος ή σύνθετος

Τύποι εύρεσης πρώτων αριθμών

- **Fermat:** $F_\nu = 2^{2^\nu} + 1$

δίνει πρώτους αριθμούς για ν = 0, 1, 2, 3, 4, ενώ ο αριθμός που προκύπτει για ν = 5 είναι σύνθετος: $F_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297$ που διαιρείται με το 641.

Τύποι εύρεσης πρώτων αριθμών

- **Euler:** $f(\nu) = \nu^2 - \nu + 41$

δίνει πρώτους αριθμούς για ν = 0, 1, 2, …, 40, ενώ ο αριθμός που προκύπτει για ν = 41 είναι σύνθετος: $f(41) = 41^2$

Τύποι εύρεσης πρώτων αριθμών

- **Mersenne:** $M_\nu = 2^\nu - 1$ με το ν πρώτο αριθμό.

Για ν = 2, 3, 5, 7 προκύπτουν πρώτοι αριθμοί ενώ ο αριθμός που προκύπτει για ν = 11 είναι σύνθετος: $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047$ που διαιρείται με το 23.

(Πολύ) μεγάλοι πρώτοι αριθμοί

- Ο μεγαλύτερος πρώτος αριθμός που έχει βρεθεί είναι ο

$$2^{57.885.161} - 1$$

ο οποίος έχει 17.425.170 ψηφία! (GIMPS)

Εικασία του Goldbach

- Κάθε άρτιος ακέραιος μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων.

4 = 2+2
6 = 3+3
8 = 3+5
…

Πρώτοι αριθμοί

Θεώρημα 4

Αν p|αβ και p πρώτος αριθμός τότε:
p|α ή p|β.

Αν ο p δεν είναι πρώτος αριθμός δεν ισχύει το θεώρημα!
π.χ. $15|5\cdot 9$ αλλά $15\nmid 5$ και $15\nmid 9$

Πρώτοι αριθμοί

Θεώρημα 5

Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής

Κάθε ακέραιος αριθμός α>1 μπορεί να αναλυθεί κατά ένα και μοναδικό τρόπο σε **γινόμενο πρώτων παραγόντων** (αν δεν λάβουμε υπόψη τη διάταξη).

Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

- Ανάλυση του αριθμού 1275

1. Εξετάζω αν ο αριθμός διαιρείται με 2, 3 ή 5: 1275:3 = 425
2. Εξετάζω αν ο 425 διαιρείται με 2, 3 ή 5: 425:5 = 85
3. …

Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

- Ανάλυση του αριθμού 1275

1275	3
425	5
85	5
17	17
1	

- επομένως: $1275 = 3\cdot 5^2\cdot 17$

Άσκηση

- Βρείτε την πρωτογενή ανάλυση του 2010.

Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

- Ανάλυση του αριθμού 2010

2010	2
1005	3
335	5
67	67
1	

- επομένως: 2010 = 2·3·5·67

Άσκηση

- Βρείτε την πρωτογενή ανάλυση των 1204, 1989, 2012, 2013.

Πρωτογενής ανάλυση αριθμού

Θεώρημα 6

Έστω $\alpha = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_\nu^{\alpha_\nu}$

η πρωτογενής ανάλυση ενός φυσικού αριθμού α>1.

Ο φυσικός αριθμός δ είναι διαιρέτης του α, δηλαδή δ|α αν και μόνο αν ο δ είναι της μορφής

$$\delta = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_\nu^{\beta_\nu} \quad \text{με } 0 \le \beta_i \le \alpha_i$$

Πρωτογενής ανάλυση αριθμού

- Βρείτε την πρωτογενή ανάλυση του 72.
- $72 = 2^3 \cdot 3^2$
- Διαιρέτες του αριθμού είναι όλοι οι φυσικοί της μορφής: $2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2}$ όπου $0 \leq \beta_1 \leq 3$, $0 \leq \beta_2 \leq 2$.
- Ποιοι είναι αυτοί; Πόσοι είναι;

Μέγιστος κοινός διαιρέτης

Ο αριθμός δ λέγεται **μέγιστος κοινός διαιρέτης** των $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ αν:

1. $\delta|\alpha_1, \delta|\alpha_2, \ldots, \delta|\alpha_\nu$
2. Αν υπάρχει d: $d|\alpha_1, d|\alpha_2, \ldots, d|\alpha_\nu$, τότε: $d \leq \delta$.

Αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους

- Οι ακέραιοι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** αν ο μέγιστος κοινός τους διαιρέτης είναι το 1, δηλαδή αν $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu) = 1$.

Προσοχή: είναι δυνατόν να έχουμε $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu) = 1$ και οι ακέραιοι $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ να μην είναι πρώτοι μεταξύ τους ανά δύο.

Παράδειγμα

$(6, 14, 21) = 1$ ενώ $(6, 14) = 2$, $(6, 21) = 3$ και $(14, 21) = 7$.

Εύρεση Μ.Κ.Δ.

- 1ος τρόπος:
- Παίρνοντας από τις πρωτογενείς τους αναλύσεις τους κοινούς παράγοντες στον μικρότερο εκθέτη.

Εύρεση Μ.Κ.Δ. – 1^{ος} τρόπος

- Βρείτε τον (120 , 150)

1. Αναλύω και τους δύο αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων
2. Γράφω τους κοινούς παράγοντες
3. Υψώνω καθένα από τους κοινούς παράγοντες στον μικρότερο εκθέτη που εμφανίζεται.

Εύρεση Μ.Κ.Δ. – 1^{ος} τρόπος

- Εύρεση του (120 , 150)

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

150	2
75	3
25	5
5	5
1	

- $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
- $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$
- $(120 , 150) = 2 \cdot 3 \cdot 5$

Άσκηση

- Βρείτε τους:
  - (15 , 225)
  - (130 , 200)
  - (2006 , 130)