Εισαγωγή στις βασικές έννοιες των Μαθηματικών

9ο Μάθημα
Μέγιστος κοινός διαιρέτης
Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο

Πρώτοι αριθμοί

Θεώρημα

Κάθε **σύνθετος** φυσικός αριθμός $\alpha > 1$ έχει ένα τουλάχιστον πρώτο διαιρέτη $p \leq \sqrt{\alpha}$

Πρώτοι αριθμοί

Πόρισμα

Αν ένας φυσικός αριθμός $\alpha > 1$ δεν διαιρείται από κανένα πρώτο αριθμό $p \leq \sqrt{\alpha}$ τότε ο α είναι πρώτος αριθμός.

↓

έτσι εξετάζω αν ένας αριθμός είναι πρώτος ή σύνθετος

<u>Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής</u>

Κάθε ακέραιος αριθμός α>1 μπορεί να αναλυθεί κατά ένα και μοναδικό τρόπο σε **γινόμενο πρώτων παραγόντων** (αν δεν λάβουμε υπόψη τη διάταξη).

Εύρεση Μ.Κ.Δ.

- $1^{ος}$ τρόπος:
- Παίρνοντας από τις πρωτογενείς τους αναλύσεις τους κοινούς παράγοντες στον μικρότερο εκθέτη.

Εύρεση Μ.Κ.Δ. – $1^{ος}$ τρόπος

- Βρείτε τον (120 , 50)

1. Αναλύω και τους δύο αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων
2. Γράφω τους κοινούς παράγοντες
3. Υψώνω καθένα από τους κοινούς παράγοντες στον μικρότερο εκθέτη που εμφανίζεται.

Εύρεση Μ.Κ.Δ. – $1^{ος}$ τρόπος

- Εύρεση του (120 , 50)

120	2		50	2
60	2		25	5
30	2		5	5
15	3		1	
5	5			
1				

- $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
- $50 = 2 \cdot 5^2$
- $(120 , 50) = 2 \cdot 5$

Εύρεση Μ.Κ.Δ.

- $2^{ος}$ τρόπος:
- Εφαρμόζοντας τον Ευκλείδειο αλγόριθμο.
- Παράδειγμα: (2006 , 130)

Εύρεση Μ.Κ.Δ.

- $2^{ος}$ τρόπος (Ευκλείδειος αλγόριθμος)
- $2006 = 130 \cdot 15 + 56$
- $\mathbf{130} = \mathbf{56} \cdot 2 + 18$
- $\mathbf{56} = \mathbf{18} \cdot 3 + \boxed{\mathbf{2}}$
- $\mathbf{18} = \mathbf{2} \cdot 9 + 0$
- Ο Μ.Κ.Δ. ισούται με το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο

Άσκηση

- Βρείτε τους (2007 , 150) και (625 , 11025), χρησιμοποιώντας τον ευκολότερο (συντομότερο;) τρόπο.

Άσκηση χρήσης του ΜΚΔ

- Απλοποιήστε τα κλάσματα:

$$\frac{92}{286} \qquad \frac{184}{188}$$

Ιδιότητες ΜΚΔ

- Αν $\lambda \neq 0$: $(\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_\nu) = |\lambda|(a_1, a_2, \ldots, a_\nu)$
- Αν $y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_\nu x_\nu$:
  $(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, y) = (a_1, a_2, \ldots, a_\nu)$
- Αν $(a_1, a_2, \ldots, a_\nu) = d$ τότε $\left(\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, \ldots, \frac{a_\nu}{d}\right) = 1$
- Ισχύει: $\left(a_1^n, a_2^n, \ldots, a_\nu^n\right) = \left(a_1, a_2, \ldots, a_\nu\right)^n$
- $(\alpha , \beta , \gamma , \delta) = ((\alpha , \beta) , \gamma , \delta)$

Ιδιότητες ΜΚΔ

- (20 , 35 , 60) = (5·4 , 5·7 , 5·12) = 5(4 , 7 , 12) = 5
- (20 , 35 , 90) = (20 , 35 , 20 + 2·35) = (20 , 35) = 5
- (6 , 10) = 2 επομένως $\left(\frac{6}{2}, \frac{10}{2}\right) = (3,5) = 1$
- (16 , 81) = $(2^4 , 3^4) = (2 , 3)^4 = 1^4 = 1$
- (4 , 16 , 64) = $(2^2, 4^2, 8^2) = (2 , 4 , 8)^2$ = … 4
- (7 , 21 , 40 , 155) = ((7 , 21) , 40 , 155) =
(7 , 40 , 155) = (7 , (40 , 155)) = (7 , 5) = 1

Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο

Ο αριθμός μ λέγεται **ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο** των $α_1, α_2, …, α_ν$ αν:

1. $α_1|μ, α_2|μ, … , α_ν|μ$
2. Αν υπάρχει ρ: $α_1|ρ, α_2|ρ, … , α_ν|ρ$, τότε: $μ \le ρ$.

Εύρεση ΕΚΠ

1. Με καταγραφή των πολλαπλασίων των αριθμών.
2. Παίρνοντας από τις πρωτογενείς τους αναλύσεις όλους τους παράγοντες στον μεγαλύτερο εκθέτη.

Εύρεση ΕΚΠ

- Εύρεση του [120 , 150]

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

- $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
- $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$
- $[120 , 150] = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$

Εύρεση ΕΚΠ

- Βρείτε τα:
  - [8 , 56]
  - [25 , 60]
  - [140 , 200]

Ιδιότητες ΕΚΠ

1. Αν $\lambda \neq 0$ τότε $[\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_\nu] = \lambda[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu]$
2. $[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = [[\alpha, \beta], \gamma, \delta]$

Παραδείγματα

1. [30 , 270 , 620] =
   [10·3 , 10·27 , 10·62] =
   10[3 , 27 , 62] = …
2. [12 , 30 , 40 , 240] =
   [[12 , 30] , 40 , 240] =
   [60 , 40 , 240] =
   [[60 , 40] , 240] =…

Ιδιότητες ΕΚΠ – Παράδειγμα

- Υπολογίστε το [40 , 50 , 60] χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του ΕΚΠ.

Ιδιότητες ΕΚΠ – Παράδειγμα

- [40 , 50 , 60] =
  [10·4 , 10·5 , 10·6] =
  10[4 , 5 , 6] =
  10[[4,5] ,6] =
  10[20 , 6] =
  10·2[10 , 3] =
  20·30 = 600

Θεώρημα

- Αν για τους αριθμούς α, β (με $α, β \neq 0$) ο ΜΚΔ τους είναι (α,β) και το ΕΚΠ τους είναι [α,β] τότε ισχύει: $(α,β)\cdot[α,β] = α\cdotβ$.

Προσοχή!
Το θεώρημα δεν ισχύει για περισσότερους από 2 αριθμούς.

Πόρισμα:

- Αν οι α, β είναι πρώτοι μεταξύ τους τότε $[α,β] = α\cdotβ$

Πρόβλημα 1

- Ένας ανθοπώλης διαθέτει 60 άσπρα, 72 κόκκινα και 80 ροζ τριαντάφυλλα. Πόσες το πολύ όμοιες ανθοδέσμες μπορεί να σχηματίσει και πόσα τριαντάφυλλα από κάθε χρώμα θα περιέχει η κάθε μία;

Πρόβλημα 1 – λύση

- Το πρόβλημα απαιτεί ομοιόμορφο «μοίρασμα» τριών ποσοτήτων.
- Επομένως πρέπει να βρούμε έναν αριθμό που να διαιρεί και τις τρεις ποσότητες λουλουδιών.
- Συγκεκριμένα, πρέπει να βρούμε τον Μ.Κ.Δ.

Πρόβλημα 1 – λύση

- (60 , 72 , 80)

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

- $60=2^2\cdot3\cdot5$ $72=2^3\cdot3^2$ $80=2^4\cdot5$
- Άρα $(60 , 72 , 80) = 2^2 = 4$

Πρόβλημα 1 – Απάντηση

- Άρα ο μέγιστος αριθμός από ανθοδέσμες είναι τέσσερις (4).
- Κάθε ανθοδέσμη θα περιέχει:
  - 60:4 = **15** άσπρα τριαντάφυλλα
  - 72:4 = **18** κόκκινα τριαντάφυλλα
  - 80:4 = **20** ροζ τριαντάφυλλα

Πρόβλημα 2

- Δύο κατασκοπευτικοί δορυφόροι βρίσκονται σε τροχιές που περνούν πάνω από τα Ιωάννινα. Ο ένας εκτελεί μία πλήρη περιφορά γύρω από τη γη σε 20 ώρες, ενώ ο άλλος χρειάζεται 21 ώρες. Την Πέμπτη 12 Δεκεμβρίου του 2013, στις 3:00 μ.μ. οι δύο δορυφόροι βρίσκονταν ακριβώς πάνω από το Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων. Ποια μέρα της εβδομάδας και ποια ώρα θα ξαναβρεθούν ακριβώς πάνω από το Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων;

Πρόβλημα 2 – Λύση

- Το πρόβλημα απαιτεί την εύρεση του πρώτου κοινού πολλαπλασίου δύο αριθμών, δηλαδή του Ε.Κ.Π.

Πρόβλημα 2 – Λύση

- [20 , 21]

20	2
10	2
5	5
1	

21	3
7	7
1	

Παρατηρώντας ότι οι αριθμοί 20, 21 είναι πρώτοι μεταξύ τους, για να βρω το ΕΚΠ τους αρκεί να τους πολλαπλασιάσω.

- $20 = 2^2 \cdot 5$ $\quad$ $21 = 3 \cdot 7$
- Άρα $[20 , 21] = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$

Πρόβλημα 2 – Λύση

- Οι δύο δορυφόροι θα ξαναβρεθούν ακριβώς πάνω από το Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων μετά από 420 ώρες.
- Οι 420 ώρες πρέπει να μετατραπούν σε ημέρες.
  - 420:24 = 17 και υπόλοιπο 12
- Άρα **420 ώρες = 17 ημέρες και 12 ώρες**.
- Οι 17 ημέρες πρέπει να μετατραπούν σε εβδομάδες:
  - 17:7 = 2 και υπόλοιπο 3
- Άρα **17 ημέρες = 2 εβδομάδες και 3 ημέρες.**

Πρόβλημα 2 – Απάντηση

- Οι δύο δορυφόροι θα ξαναβρεθούν ακριβώς πάνω από το Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων μετά από **2 εβδομάδες 3 ημέρες και 12 ώρες,** δηλαδή:
  - **Δευτέρα στις 3:00 π.μ.**