Εισαγωγή στις βασικές έννοιες των Μαθηματικών

12ο Μάθημα
Επανάληψη
Διαιρετότητα

Πρώτοι αριθμοί

Θεώρημα

Κάθε **σύνθετος** φυσικός αριθμός $\alpha > 1$ έχει ένα τουλάχιστον πρώτο διαιρέτη $p \leq \sqrt{\alpha}$

Πρώτοι αριθμοί

Πόρισμα

Αν ένας φυσικός αριθμός $\alpha > 1$ δεν διαιρείται από κανένα πρώτο αριθμό $p \leq \sqrt{\alpha}$ τότε ο α είναι πρώτος αριθμός.

έτσι εξετάζω αν ένας αριθμός είναι πρώτος ή σύνθετος

<u>Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής</u>

Κάθε ακέραιος αριθμός $\alpha > 1$ μπορεί να αναλυθεί κατά ένα και μοναδικό τρόπο σε **γινόμενο πρώτων παραγόντων** (αν δεν λάβουμε υπόψη τη διάταξη).

Εύρεση Μ.Κ.Δ.

- $1^{ος}$ τρόπος:
- Παίρνοντας από τις πρωτογενείς τους αναλύσεις τους κοινούς παράγοντες στον μικρότερο εκθέτη.

Εύρεση Μ.Κ.Δ. – $1^{ος}$ τρόπος

- Βρείτε τον (130 , 72)

1. Αναλύω και τους δύο αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων
2. Γράφω τους κοινούς παράγοντες
3. Υψώνω καθένα από τους κοινούς παράγοντες στον μικρότερο εκθέτη που εμφανίζεται.

Εύρεση Μ.Κ.Δ. – $1^{ος}$ τρόπος

- Εύρεση του (130 , 72)

$$\begin{array}{r|l} 130 & 2 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

- $130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$
- $72 = 2^3 \cdot 3^2$
- (130 , 72) = 2

Εύρεση Μ.Κ.Δ.

- $2^{ος}$ τρόπος:
- Εφαρμόζοντας τον Ευκλείδειο αλγόριθμο.
- Παράδειγμα: (2014 , 130)

Εύρεση Μ.Κ.Δ.

- $2^{ος}$ τρόπος (Ευκλείδειος αλγόριθμος)
- 2014 = 130·15 + 64
- **130** = **64**·2 + $\boxed{\mathbf{2}}$
- **64** = **2**·32 + 0
- Ο Μ.Κ.Δ. ισούται με το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο

Άσκηση

- Απλοποιήστε το κλάσμα:

$$\frac{5320}{7980}$$

- Βρείτε το άθροισμα:

$$\frac{12}{1855}+\frac{77}{2650}$$

Ιδιότητες ΜΚΔ

- (20 , 35 , 60) = (5·4 , 5·7 , 5·12) = 5(4 , 7 , 12) = 5
- (20 , 35 , 90) = (20 , 35 , 20 + 2·35) = (20 , 35) = 5
- (6 , 10) = 2 επομένως $\left(\frac{6}{2},\frac{10}{2}\right)=(3,5)=1$
- (16 , 81) = (2^4 , 3^4) = $(2 , 3)^4$ = 1^4 = 1
- (4 , 16 , 64) = (2^2, 4^2, 8^2) = $(2 , 4 , 8)^2$ = … 4
- (7 , 21 , 40 , 155) = ((7 , 21) , 40 , 155) = (7 , 40 , 155) = (7 , (40 , 155)) = (7 , 5) = 1

Εύρεση ΕΚΠ

1. Με καταγραφή των πολλαπλασίων των αριθμών.
2. Παίρνοντας από τις πρωτογενείς τους αναλύσεις όλους τους παράγοντες στον μεγαλύτερο εκθέτη.

Εύρεση Ε.Κ.Π.

- Εύρεση του [130 , 72]

130	2	72	2
65	5	36	2
13	13	18	2
1		9	3
		3	3
		1	

- $130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$
- $72 = 2^3 \cdot 3^2$
- $[130 , 72] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$

Ιδιότητες ΕΚΠ

1. Αν $\lambda \neq 0$ τότε $[\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_\nu] = \lambda[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu]$
2. $[\alpha , \beta , \gamma , \delta] = [[\alpha,\beta] , \gamma , \delta]$

Παραδείγματα

1. $[30 , 270 , 620] =$
   $[10 \cdot 3 , 10 \cdot 27 , 10 \cdot 62] =$
   $10[3 , 27 , 62] = \ldots$
2. $[12 , 30 , 40 , 240] =$
   $[[12 , 30] , 40 , 240] =$
   $[60 , 40 , 240] =$
   $[[60 , 40] , 240] = \ldots$

Ιδιότητες ΕΚΠ – Παράδειγμα

- Υπολογίστε το [28 , 56 , 140] χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του ΕΚΠ.

Πρόβλημα 1

- Ο ΜΚΔ δύο αριθμών α και β είναι το 12 και το ΕΚΠ τους είναι το 600. Αν γνωρίζετε ότι $\alpha<\beta<500$ να βρείτε τα α, β.

Πρόβλημα 1 – Λύση

12	2
6	2
3	3
1	

600	2
300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

- $(\alpha, \beta) = 12 = 2^2 \cdot 3$
- $[\alpha, \beta] = 600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$
- Άρα **$\alpha = 2^3 \cdot 3$ και $\beta = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$**

Γιατί δεν μπορεί να υπάρχει άλλος συνδυασμός;

Πρόβλημα 2

- Δύο κολυμβητές, ο Τάκης και ο Σάκης, βουτούν ταυτόχρονα από τους βατήρες που βρίσκονται στο άκρο της πισίνας που έχει το μεγαλύτερο βάθος. Και οι δύο κολυμπούν με σταθερό ρυθμό. Ο Τάκης χρειάζεται 84 δευτερόλεπτα για να διανύσει το μήκος από το ένα άκρο της πισίνας στο άλλο, ενώ ο Σάκης χρειάζεται 78 δευτερόλεπτα. Έπειτα από πόσα μήκη θα ξανασυναντηθούν οι κολυμβητές σε κάποιο από τα άκρα της πισίνας; Αυτή η συνάντηση θα γίνει στο άκρο της πισίνας που έχει το μεγαλύτερο ή το μικρότερο βάθος;

Πρόβλημα 3

- Από ένα φύλλο MDF διαστάσεων 420 χιλ. μήκους και 372 χιλ. πλάτους, θέλουμε να κόψουμε τετραγωνάκια με τέτοιον τρόπο ώστε να μην έχουμε καθόλου περίσσευμα. Πόσο θα είναι το εμβαδόν του τετραγώνου; Πόσα τετραγωνάκια θα κόψουμε;