

Κλασική Μηχανική
Ασκήσεις 2013
 Διδάσκων Καθηγητής:
Γ.Κ. Λεοντάρης

0.1 Ορμή, Στροφορμή, 2ος Νόμος του Kepler

1. Στο μάθημα εξετάσαμε τη περίπτωση βαγονιού που κινείται οριζόντια χωρίς τριβές εκπέμποντας αέρια με σταθερή ταχύτητα v_a . Δείξαμε ότι η εξίσωση κίνησης γράφεται

$$m \frac{dv}{dt} = -v_a \frac{dm}{dt}$$

Θεωρείστε τώρα πύραυλο που εκτοξεύεται κατακόρυφα. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να συνυπολογίσετε και τη βαρύτητα $-mg$. Θεωρείστε ότι ο ρυθμός μεταβολής της μάζας κατά την καύση είναι σταθερός

$$\frac{dm}{dt} = -\lambda$$

όπου λ θετική σταθερά. Δείξτε ότι $m = M - \lambda t$ και ότι το εκάστοτε ύψος του πυραύλου δίδεται από την εξίσωση

$$z(t) = v_a t - \frac{mv_a}{\lambda} \ln \frac{M}{m} - \frac{1}{2} g t^2$$

όπου M η αρχική μάζα και $v_0 = 0$.

2. Θεωρείστε σύστημα N σωμάτων με μάζες m_i και θέσεις \vec{r}_i ως προς το κέντρο συνστήματος συντεταγμένων O . Αν \vec{r}_i' τα διανύσματα θέσης των μαζών από το κέντρο μάζας \vec{r}_{cm} απλοποιείστε την έκφραση

$$\sum_i m_i \vec{r}_i'$$

3. Στο μάθημα μελετήσαμε τη στροφορμή δίσκου ως προς το κέντρο μάζας του, θεωρώντας ότι ο δίσκος απαρτίζεται από μικρές μάζες m_i (βλ. σχήμα). Στην προσέγγιση αυτή $\mathcal{L}_{(C.M.)} = I\omega$ και η ροπή αδράνειας γράφεται

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Υπολογίστε τη στροφορμή $\mathcal{L}_{(O)}$ ως προς το σημείο O του σχήματος και συγκρίνετε το αποτέλεσμα με αυτό για την $\mathcal{L}_{(C.M.)}$.

4. Δείξαμε ότι στο συνεχές όριο ο εν λόγω δίσκος (ακτίνας a) έχει ροπή αδράνειας

$$I = \frac{1}{2} M a^2$$

Δείξτε ότι στην περίπτωση άξονα περιστροφής κατά μήκος της διαμέτρου του

$$I = \frac{1}{4}Ma^2$$

ενώ για ομογενή σφαίρα ακτίνας a ως προς άξονα διερχόμενο από το κέντρο της

$$I = \frac{2}{3}Ma^2$$

5. Κάνετε χρήση των σφαιρικών συντεταγμένων r, θ, ϕ για να βρείτε το κέντρο μάζας ημισφαιρίου σταθερής πυκνότητας ρ ακτίνας a .

