Γεωργίου Κ. Λεοντάρη
Καθηγητή Θεωρητικής Φυσικής

Παραδόσεις Κλασικής Μηχανικής

Τμήμα Φυσικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Ιωάννινα 2014

Κεφάλαιο 1

Οι νόμοι του Newton

1.1 Εισαγωγή

Η Κλασσική Μηχανική μελετά την κίνηση των σωμάτων και τους νόμους της Φύσης που τη διέπουν.

Η Θεμελίωσή της οφείλεται στους Gallileo περί τον $16^0 - 17^0$ Αιώνα και τον Newton περί τον 17^0 και 18^0 Αιώνα.

Μια εναλλακτική ισοδύναμη περιγραφή της Κλασσικής Μηχανικής αναπτύχθηκε από τους Lagrange (18^0 Αιώνας) και Hamilton (19^0 Αιώνας).

Από τις αρχές του 20 Αιώνα γνωρίζουμε ότι για μεγάλες ταχύτητες (κοντά στην ταχύτητα του φωτός) καθώς και για αποστάσεις εντός του ατόμου η Κλασσική Μηχανική αποτυγχάνει. Στην πρώτη περίπτωση, αντικαθίσταται από την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας του Einstein ενώ στη δεύτερη από τη Κβαντική Μηχανική.

Στο παρόν Μάθημα θα επικεντρωθούμε στην Κλασσική Μηχανική η οποία περιγράφει πλήρως και επαρκώς όλα τα φαινόμενα για ταχύτητες και αποστάσεις που αφορούν πλείστα φαινόμενα του ορατού κόσμου.

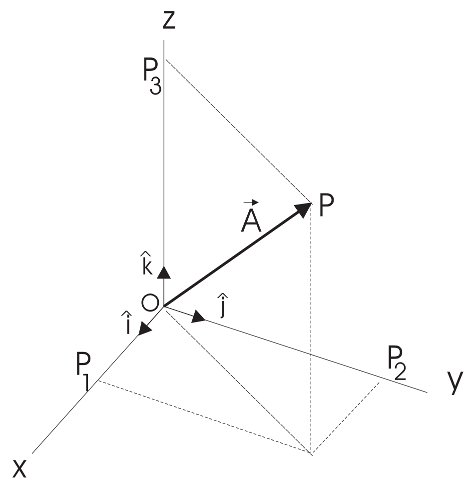
1.2 Οι Νόμοι του Newton

Η Θεμελείωση της Κλασσικής Μηχανικής βασίζεται στους τρεις Νόμους του Newton. Για την πλήρη περιγραφή, απαιτούνται οι έννοιες "Χώρος", "Χρόνος", "Μάζα" και " Δύναμη" τις οποίες θα επαναλάβουμε εν συντομία.

1.2.1 Χώρος

Για τη μελέτη προβλημάτων στον τρισδιάστατο χώρο, απαιτείται η έννοια του διανύσματος. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, διάνυσμα $\vec{A}$ ορίζεται μέσω των τριών προβολών του επί των αξόνων όπως στο σχήμα (1.2) και γράφεται

$$\vec{A} = A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}$$



Σχήμα 1.1: *Οι προβολές διανύσματος $\vec{A}$ σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.*

Ανάλογα, κάθε σημείο του χώρου ορίζεται μέσω του διανύσματος θέσης και των τριών συντεταγμένων (x, y, z) ως ακολούθως

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Θεμελειώδους σημασίας για τη Φυσική είναι οι πράξεις του εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου Για δύο διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως εξής

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv \vec{B} \cdot \vec{A} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = |A|\,|B|\cos\theta \tag{1.1}$$

θ η γωνία μεταξύ τους. Το εξωτερικό γινόμενο

$$\vec{A} \times \vec{B} \quad = \quad \hat{n}|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta \tag{1.2}$$

ή, ως το αποτέλεσμα της ορίζουσας

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

Η χρήση των διανυσμάτων στη Μηχανική διευκολύνει τη διατύπωση, εμβάθυνση και μελέτη των φυσικών νόμων και την ανακάλυψη των συμμετριών που τους διέπουν. Οι συμμετρίες με τη σειρά τους συσχετίζονται με χρήσιμες διατηρήσιμες φυσικές ποσότητες όπως η Ενέργεια, η Ορμή κ.α.

Οι βασικές πράξεις σχετίζονται με άμεση φυσική εφαρμογή τους. Για παράδειγμα, το έργο σχετίζεται άμεσα με το εσωτερικό γινόμενο

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

ενώ το εξωτερικό γινόμενο χρησιμεύει στη διατύπωση της ροπής

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

και πολλών άλλων φυσικών μεγεθών.

1.2.2 Χρόνος

Στην Κλασσική Μηχανική ο χρόνος είναι μια μοναδική ενιαία, απόλυτη και παγκόσμια έννοια. Όταν όλοι οι παρατηρητές συγχρονίσουν τα ρολόγια τους τότε συμφωνούν ότι όλα τα γεγονότα συμβαίνουν τις ίδιες χρονικές στιγμές για όλους. Σε αντίθεση, στη θεωρία της σχετικότητας δύο παρατηρητές που κινούνται ο ένας σε σχέση με τον άλλο δεν συμφωνούν.

1.2.3 Αδρανειακό Σύστημα

Στη μελέτη ενός προβλήματος της Κλασσικής Μηχανικής συνήθως επιλέγουμε κάποιο σύστημα αναφοράς όπου ώς αρχή του θεωρούμε την αρχή των χωρικών συντεταγμένων. Η επιλογή ενός δευτέρου συστήματος από άλλο παρατηρητή μπορεί να διαφέρει ώς προς τη χωρική αρχή, τη χρονική στιγμή ή να είναι περιστραμένο ως προς το πρώτο. Η προσεκτική επιλογή του συστήματος είναι δυνατό να απλοποιήσει σημαντικά τη μελέτη δοθέντος προβλήματος.

Η σημαντική διαφορά μεταξύ δύο συστημάτων προκύπτει όταν το ένα κινείται σε σχέση με το άλλο. Υπάρχει μιά κατηγορία συστημάτων τα οποία καλούμε Αδρανειακά Συστήματα όπου οι νόμοι της Φυσικής γράφονται στην απλούστερή τους μορφή. Ο πρώτος νόμος του Newton θα δούμε ότι είναι άμεσα σχετιζόμενος με τον ανωτέρω ορισμό. Αν ένα δεύτερο σύστημα επιταχύνεται σε σχέση με το Αδρανειακό Σύστημα, καλείται μή-αδρανειακό και οι νόμοι της Φυσικής δεν έχουν την απλή μορφή σε αυτό.

1.2.4 Μάζα

Η μάζα χαρακτηρίζει την αδράνεια του σώματος, την αντίστασή του να αλλάξει την κινητική του κατάσταση. Τα πειράματα έδειξαν επίσης την ισοδυναμία αδρανειακής και βαρυτικής μάζας. Για να γίνει κατανοητή η επίπτωση αυτής της ισοδυναμίας, ας θεωρήσουμε το 2ο νόμο του Newton όπου η αδρανειακή μάζα m_A εξ ορισμού υπεισέρχεται και η δύναμη είναι

$$F = m_A a$$

Στην ελεύθερη πτώση του σώματος στο βαρυτικό πεδίο, εμπλέκεται η βαρυτική μάζα m_B

$$F = G\frac{Mm_B}{R^2} = m_B\, g$$

όπου $g = GM/R^2$. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις, η επιτάχυνση για σώμα που πέφτει στο βαρυτικό πεδίο είναι

$$a = \frac{m_B}{m_A}\, g$$

Από το πείραμα, γνωρίζουμε με μεγάλη ακρίβεια ότι όλα τα σώματα πέφτουν με την ίδια επιτάχυνση, ανεξαρτήτως της μάζας τους, $a = g$ και επομένως για κάθε σώμα

$$m_A = m_B$$

Συνεπώς, λόγω της ανωτέρω ισοδυναμίας, δύο σώματα που έχουν το ίδιο βάρος στο ίδιο σημείο, έχουν τη ίδια μάζα. Ως μονάδα μέτρησης είναι το Kg.

1.2.5 Δύναμη

Η έννοια της Δύναμης γίνεται αντιληπτή με διάφορους τρόπους. Αισθανόμαστε την ύπαρξή της στην ανύψωση ενός αντικειμένου, την πτώση (δύναμη βαρύτητας) την ώθηση, την τριβή κλπ.

Ως μονάδα μέτρησης της δύναμης λαμβάνεται το Newton και είναι η δύναμη που επιταχύνει μάζα ενός Kg με επιτάχυνση $1m/s^2$

$$N = Kg \cdot m/s^2$$

Για την πλήρη γνώση της δύναμης απαιτείται η κατεύθυνσή της, η φορά, το μέγεθος και το σημείο εφαρμογής. Ως κατεύθυνση ορίζουμε αυτή της επιτάχυνσης που η δύναμη προκαλεί, απουσία άλλης δυνάμεως.

1.3 Οι Νόμοι του Newton

Θα μελετηθούν οι Νόμοι του Newton όπως αυτοί εφαρμόζονται στην περίπτωση σωμάτων με σημειακή μάζα. Σωμάτιο με σημειακή μάζα θεωρείται ότι δεν έχει διαστάσεις και δεν υπάρχουν εσωτερικοί βαθμοί ελευθερίας. Η προσέγγιση αυτή είναι ικανοποιητική διότι για πολλές εφαρμογές και ικανά μεγάλες αποστάσεις τα υπό μελέτη αντικείμενα μπορούν να θεωρηθούν σημειακά. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις, οι νόμοι του Newton έχουν ως εξής

1.3.1 Πρώτος Νόμος του Newton

Ο πρώτος νόμος αφορά στην κίνηση σώματος εν τη απουσία δυνάμεων. Για να μπορέσουμε να περιγράψουμε την κίνηση χρειαζόμαστε ένα σύστημα αναφοράς. Είμαστε ελεύθεροι να το επιλέξουμε, όμως σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι επιθυμητό να επιλεγεί ένα αδρανειακό σύστημα. Σε τέτοιο σύστημα, απομονωμένα σώματα -χωρίς επίδραση οποιασδήποτε δύναμης- κινούνται ομοιόμορφα στο χώρο. Ο πρώτος νόμος διατυπώνεται τότε ως εξής

Εν απουσία δυνάμεων, σωμάτιο κινείται με σταθερή ταχύτητα η οποία μπορεί να είναι και μηδενική.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η διανυσματική έκφραση της ταχύτητας δίδεται από τη παράγωγο του διατήματος ως προς το χρόνο

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$$

και εν τη απουσία δυνάμεων είναι $\dot{\vec{v}} = 0$.

1.3.2 Δεύτερος Νόμος του Newton

Ο δεύτερος νόμος του Newton διατυπώνεται ως εξής

Η συνολική δύναμη που ασκείται σε σωμάτιο μάζας m είναι ίση με τη μάζα αυτού επί την επιτάχυνση που η δύναμη προκαλεί.

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Μπορούμε να διατυπώσουμε εναλλακτικά το δεύτερο νόμο μέσω της ορμής. Η ορμή σωματίου ορίζεται

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Τότε ο δεύτερος νόμος του Newton διατυπώνεται και ως εξής

Η συνολική δύναμη που ασκείται σε σωμάτιο μάζας m είναι ίση με τη χρονική μεταβολή της ορμής.

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}(\vec{p}) = \dot{\vec{p}}$$

Υποθέσαμε σημειακές μάζες ενώ στη συνέχεια θεωρούμε τα σωμάτια με σταθερή μάζα, επομένως η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\vec{F} = m\frac{d}{dt}(\vec{v}) = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{a}$$

Παρατηρήσεις

1. Ο δεύτερος νόμος εισάγει την έννοια της Διαφορικής Εξίσωσης

   $$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m}$$

   Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα την απλή περίπτωση σταθερής δύναμης και κίνηση κατά τον άξονα x. Τότε

   $$\frac{d^2\,x}{dt^2} = \frac{F}{m}$$

   Η πρώτη ολοκλήρωση δίδει

   $$\frac{d\,x}{dt} = \frac{F}{m}t + c$$

   και για αρχική ταχύτητα $v(0) = v_0 \to c = v_0$. Δεύτερη ολοκλήρωση δίδει

   $$x(t) = \frac{F}{2m}t^2 + v_0 t + x_0$$

   Στην απλή αυτή περίπτωση η επίλυση της Διαφορικής Εξίσωσης είναι εύκολη και γίνεται με δύο συνεχείς ολοκληρώσεις όμως στη γενική περίπτωση η δύναμη είναι πολύπλοκη συνάρτηση και η αντίστοιχη Δ.Ε. επιλύεται δύσκολα.

2. Ο δεύτερος νόμος επάγει τον πρώτο. Πράγματι, εν τη απουσία δυνάμεων, $\vec{F} = 0$, ο 2ος νόμος

   $$0 = m\vec{a}$$

   συνεπάγεται μηδενική επιτάχυνση, ήτοι σταθερή ταχύτητα.

3. Όπως έχει ήδη υπονοηθεί στην εισαγωγή, ο δεύτερος νόμος δεν μπορεί να ισχύει με την ανωτέρω απλή μορφή σε κάθε σύστημα αναφοράς. Αν θεωρήσουμε για παράδειγμα σώμα m σε επίπεδο και σύστημα αναφοράς S

προσδεμένο στην επιφάνεια της Γής, τότε το σώμα έχει μηδενική ταχύτητα ως προς το S, ο πρώτος νόμος ισχύει και επομένως το S μπορεί να θεωρηθεί αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Αν δεύτερο σύστημα αναφοράς S' κινείται με σταθερή ταχύτητα v_0 ως προς το S, τότε το ίδο σώμα m κινείται ώς προς το S' με σταθερή ταχύτητα $-v_0$ και επομένως το S' είναι επίσης αδρανειακό. Σε σχέση όμως με κάποιο σύστημα S'' που επιταχύνεται ως προς το S, το σώμα m εμφανίζεται με αντίθετη επιτάχυνση και επομένως το S'' δεν είναι αδρανειακό.

4. Για τις περισσότερες εφαρμογές αυτού του μαθήματος, θα δεχθούμε ότι η Γη αποτελεί ένα ικανοποιητικό αδρανειακό σύστημα. Γνωρίζουμε βέβαια ότι η Γη κινείται κυκλικά, αλλά οι επιπτώσεις της προσέγγισης αυτής είναι αμελητέες [1]. Ορισμένα φαινόμενα (π.χ. παλλίροιες) θα μελετηθούν στη συνέχεια.

1.3.3 Ο Τρίτος Νόμος του Newton

Η δύναμη είναι αποτέλεσμα αλληλεπίδρασης σωμάτων. Οι δυνάμεις εμφανίζονται πάντα κατά ζεύγη και η διατύπωση του τρίτου νόμου απαιτεί την εισαγωγή δεύτερου σώματος, εκείνου που ασκεί δύναμη στο πρώτο και αντίστροφα.

Για απλότητα, ας θεωρήσουμε δύο σώματα απομονωμένα από άλλα. Το σώμα 1 ασκεί δύναμη F_{21} στο σώμα 2 ενώ το σώμα 2 ασκεί και αυτό δύναμη F_{12} επί του πρώτου, η οποία είναι Αντίθετη της F_{21}. Η διατύπωση του νόμου έχει ως εξής

Αν το σώμα 1 ασκεί δύναμη F_{21} στο σώμα 2, το σώμα 2 ασκεί μια αντίθετη δύναμη F_{21} στο σώμα 1 έτσι ώστε

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Το σύστημα Γής-Σελήνης στο σχήμα αποτελεί παράδειγμα εμφάνισης δυνάμεων δράσης-αντίδρασης, εφόσον θεωρήσουμε αμελητέες τις δυνάμεις Ηλίου και των άλλων πλανητών. Στο παράδειγμα αυτό οι δυνάμεις που εμφανίζονται είναι επίσης κεντρικές δυνάμεις, δηλαδή ευρίσκονται επί της ευθείας που ενώνει τα κέντρα των σωμάτων, αλλά ο Τρίτος Νόμος δεν απαιτεί αυτή τη συνθήκη.

[1] Πράγματι, για παράδειγμα στον Ισημερινό η κεντρομόλος επιτάχυνση λόγω της περιφοράς της Γης γύρω από τον άξονά της δίδεται από $a_I = \omega^2 R$ όπου $\omega = 2\pi/T$. Με $T = 24 \times 3600 sec$ and $R \sim 6.45 \times 10^6 m$ προκύπτει $a_I \sim g/290$, δηλαδή 290 περίπου φορές μικρότερη της βαρύτητας και επομένως μπορεί να αγνοηθεί.

1.3.4 Ο τρίτος νόμος και η διατήρηση ορμής

Ο Τρίτος νόμος του Newton οδηγεί στη διατήρηση της ορμής. Ας επικεντρωθούμε στο σύστημα δύο σωμάτων όπως στην περίπτωση Γης-Σελήνης που προαναφέραμε. Ας θεωρήσουμε επίσης και τη δύναμη από τον Ήλιο που ασκείται στο σύστημα, ως μια εξωτερική δύναμη. Τότε, η συνολική δύναμη στο σώμα 1 (Γη) και αντίστοιχα στο σώμα 2 (Σελήνη) είναι

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= \dot{\vec{p}}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_1^{ext} \\ \vec{F}_2 &= \dot{\vec{p}}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_2^{ext} \end{aligned} \tag{1.4}$$

όπου έγινε χρήση και του 2ου νόμου $\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_1$. Η ολική ορμή του συστήματος είναι το άθροισμα των επί μέρους ορμών

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

Παραγωγίζοντας

$$\dot{\vec{p}} = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_2^{ext}$$

Όμως από τον τρίτο νόμο,

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

την οποία αντικαθιστούμε στην προηγούμενη και λαμβάνουμε ότι η συνολική ορμή είναι

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}$$

Από την τελευταία προκύπτει, ότι αν η συνολική εξωτερική δύναμη σε σύστημα δύο σωμάτων είναι μηδέν, τότε η ορμή του συστήματος διατηρείται

$$\dot{\vec{p}} = 0$$

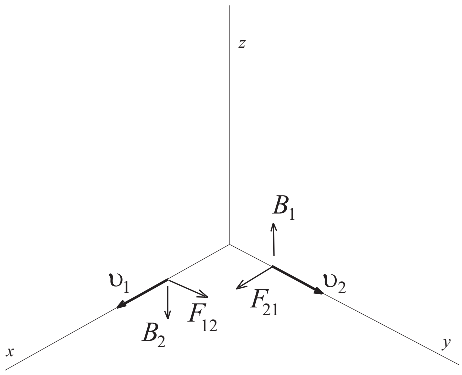
ή

$$\vec{F}^{ext} = 0 \rightarrow \vec{p} = constant$$

1.3.5 Τα όρια ισχύος του 3ου νόμου

Υπάρχουν περιπτώσεις που ο 3ος νόμος του Newton δεν ισχύει. Στην ειδική σχετικότητα για παράδειγμα, ακόμη και αν για κάποιο παρατηρητή η δράση είναι ίση με την αντίδραση δεδομένη χρονική στιγμή, το ταυτόχρονο δεν ισχύει για παρατηρητή που κινείται ως προς τον πρώτο. Αλλά, ας θεωρήσουμε και το ακόλουθο παράδειγμα απο την Ηλεκτροδυναμική.

Θεωρούμε τη διάταξη δύο κινουμένων φορτίων του σχήματος. Το φορτίο q_1 κινείται επί του άξονα x με ταχύτητα $\vec{v}_1$ ενώ το φορτίο q_2 κινείται επί του κάθετου άξονα y με ταχύτητα $\vec{v}_2$. Κινούμενα φορτία ισοδυναμούν με ρεύμα. Το q_1 δημιουργεί μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_1$ εντός του οποίου ευρίσκεται το φορτίο q_2. Η φορά του B_1 ευρίσκεται με τους γνωστούς κανόνες και για την περιοχή του φορτίου q_2 είναι παράλληλη με τον άξονα z όπως δείχνεται στο σχήμα. Η ασκούμενη δύναμη επί του q_2 ευρίσκεται από τον γνωστό τύπο $\vec{F}_{21} = q_2\vec{v}_2 \times \vec{B}_1$ και έχει κατεύθυνση παράλληλη του άξονα x. Ομοίως, ευρίσκουμε τη φορά του πεδίου $\vec{B}_2$ που δημιουργείται από το κινούμενο q_2 στη θέση του πρώτου φορτίου, Αυτή είναι αντίθετα της θετικής κατεύθυνσης του άξονα z ενώ η ασκούμενη δύναμη $\vec{F}_{12} = q_1\vec{v}_1 \times \vec{B}_2$ επί του q_1 είναι παράλληλη του άξονα y. Προφανώς, $\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} \neq 0$ και επομένως ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα παραβιάζεται.



Σχήμα 1.2: *Πεδία $\vec{B}$ και δυνάμεις από κινούμενα φορτισμένα σωμάτια.*

Όμως, ο 3ος νόμος σχετίζεται άμεσα με τη διατήρηση της ορμής του συστήματος και δεν είναι δυνατό η ορμή να μην διατηρείται. Πράγματι, η διατήρηση της ορμής είναι από τους θεμελιώδεις νόμους και η ισχύς του είναι αναμφισβήτητη. Η εξήγηση ευρίσκεται στο γεγονός ότι ενώ η Μηχανική Ορμή δεν διατηρείται, η συνολική ορμή του συστήματος διατηρείται και τούτο διότι η όποια απώλεια της Μηχανικής Ορμής αποθηκεύεται στα Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία.

1.3.6 Επίπεδη Κίνηση

Η Επίπεδη Κίνηση παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθότι σε πολλά προβλήματα της φυσικής η κίνηση λαμβάνει χώρα σε δύο διαστάσεις, όπως για παράδειγμα η περιστροφή των πλανητών γύρω από τον ήλιο.

Ας θεωρήσουμε ότι η επίπεδη κίνηση λαμβάνει χώρα στο επίπεδο (x, y) όπου τροχιά του κινητού δίδεται από τις εξισώσεις $x = x(t), y = y(t)$. Πολλές φορές, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις προβλημάτων με κυκλική συμμετρία, αντί για τη χρήση των καρτεσιανών μεταβλητών x, y, είναι προτιμότερη η χρήση των πολικών συντεταγμένων. Οι εξισώσεις μετασχηματισμού είναι [2]

$$x = r\cos\phi \tag{1.5}$$

$$y = r\sin\phi \tag{1.6}$$

$$r = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1.7}$$

$$\phi = \sin^{-1}\frac{y}{r} = \cos^{-1}\frac{x}{r} \tag{1.8}$$

όπου τώρα οι εξισώσεις γίνονται $r = r(t), \phi = \phi(t)$ η δε επιπλέον συνθήκη για την γωνία είναι απαραίτητη για να αποφευχθεί η αυθαιρεσία ως προς το ποίο τεταρτημόριο ευρίσκεται η ϕ. Συνηθίζουμε να παίρνουμε τη γωνία ϕ μεταξύ $[-\pi, \pi]$. Εισάγουμε στη συνέχεια δύο βολικά μοναδιαία κάθετα μεταξύ τους διανύσματα, $\hat{e}_r, \hat{e}_\phi$, το πρώτο κατά μήκος του διανύσματος θέσης $\vec{r}(t)$. Συνεπώς το διάνυσμα θέσης γράφεται $\vec{r}(t) = r\hat{e}_r$ ενώ το μοναδιαίο διάνυσμα είναι,

$$\hat{e}_r = \hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi \tag{1.9}$$

Από τη σχέση καθετότητας, εύκολα προσδιορίζουμε και το διάνυσμα $\hat{e}_\phi$ (επιλέγοντας τη φορά)

$$\hat{e}_\phi = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi \tag{1.10}$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι τα διανύσματα $\hat{e}_r, \hat{e}_\phi$ –σε αντίθεση με τα $\hat{i}, \hat{j}$– δεν είναι σταθερά, αλλά μεταβάλλονται με τη γωνία ϕ. Παραγωγίζοντας έχουμε τις σχέσεις

$$\frac{d\hat{e}_r}{d\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi \equiv \hat{e}_\phi \tag{1.11}$$

$$-\frac{d\hat{e}_\phi}{d\phi} = \hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi \equiv \hat{e}_r \tag{1.12}$$

[2] βλ. σχήμα στο κεφ.2 του συγγράμματος "Γ. Κ. Λεοντάρη, Διανυσματικός Λογισμός" .

Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα, παραγωγίζουμε το διάνυσμα θέσης ως προς το χρόνο t, $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}(t)}{dt} &= \frac{d\{r(t)\hat{e}_r(t)\}}{dt} \\ &= \frac{dr(t)}{dt}\hat{e}_r(t) + r(t)\frac{d\hat{e}_r(t)}{dt} \end{aligned}$$

και με τη χρήση της (1.11), έχουμε $\frac{d\hat{e}_r(t)}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\hat{e}_\phi$, άρα

$$\vec{v}(t) = \frac{dr}{dt}\hat{e}_r + r\frac{d\phi}{dt}\hat{e}_\phi \tag{1.13}$$

Παραγωγίζοντας την (1.13) ευρίσκουμε ότι η επιτάχυνση δίδεται

$$\vec{\alpha}(t) = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]\hat{e}_r + \left[r\frac{d^2\phi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}\right]\hat{e}_\phi \tag{1.14}$$

δηλαδή, η επιτάχυνση εν γένει αναλύεται σε μια ακτινική και μία γωνιακή συνιστώσα, $\vec{\alpha}(t) = \alpha_r\hat{e}_r + \alpha_\phi\hat{e}_\phi$.

Η δύναμη γράφεται

$$\vec{F} = F_r\hat{e}_r + F_\phi\hat{e}_\phi \tag{1.15}$$

$$F_r = m\frac{d^2r}{dt^2} - mr\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \tag{1.16}$$

$$F_\phi = mr\frac{d^2\phi}{dt^2} + 2m\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt} \tag{1.17}$$

Για κεντρικές δυνάμεις μόνο η συνιστώσα F_r είναι διάφορη του μηδενός, ενώ $F_\phi = 0$. Λόγω του ιδιαίτερου φυσικού ενδιαφέροντος, θα μελετήσουμε αναλυτικά την περίπτωση αυτή στα επόμενα παραδείγματα.

1.4 Σφαιρικές Συντεταγμένες

Όταν η κίνηση γίνεται σε τρεις διαστάσεις, πέραν των καρτεσιανών συντεταγμένων ανάλογα με τις συμμετρίες που διέπουν το πρόβλημα, κάνουμε χρήση κάποιων καμπυλόγραμμων συντεταγμένων. Θα αρχίσουμε με τη γραφή των εξισώσεων κίνησης τις σφαιρικές. Η μαθηματική περιγραφή απαιτεί γενική μελέτη μέσω ορθογώνιων μετασχηματισμών αλλά εδώ θα ακολουθήσουμε μια συντομότερη οδό. Οι συντεταγμένες x, y, z γράφονται ως προς τις r, θ, ϕ ως εξής (βλ. σχήμα)

$$
\begin{aligned}
x &= r \sin\theta \cos\phi, \quad 0 \le r < \infty \\
y &= r \sin\theta \sin\phi, \quad 0 \le \phi \le 2\pi \\
z &= r \cos\theta, \qquad\quad 0 \le \theta \le \pi
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

όπου $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Ως συντεταγμένες ενός σώματος που διαγράφει τροχιά μεταβάλλονται με το χρόνο και εν γένει είναι

$$r = r(t),\ \theta = \theta(t),\ \phi = \phi(t)$$

Το διάνυσμα θέσης γράφεται

$$\vec{r} = r\hat{e}_r \tag{1.19}$$

όπου

$$\hat{e}_r = \cos\phi \sin\theta\, \hat{\imath} + \sin\phi \sin\theta\, \hat{\jmath} + \cos\theta\, \hat{k} \tag{1.20}$$

είναι μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση της ακίνας r. Ως μοναδιαίο, ικανοποιεί την ακόλουθη ταυτότητα (αποδείξτε την)

$$\hat{e}_r \cdot \frac{d\hat{e}_r}{dt} = 0$$

η οποία συνεπάγεται ότι είναι μεταξύ τους κάθετα

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} \perp \hat{e}_r$$

Θα παραγάγουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας και επιτάχυνσης. Προς διευκόλυνση, θα προηγηθούν οι παράγωγοι του μοναδιαίου διανύσματος και τα νέα μεγέθη που προκύπτουν.

Η πρώτη παράγωγος είναι

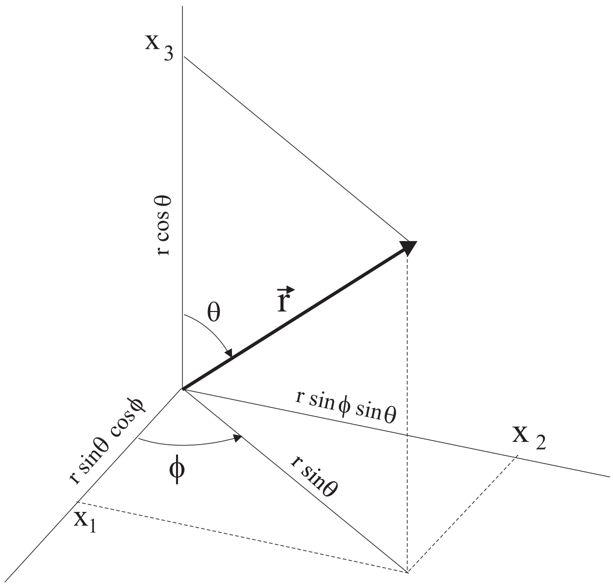
$$
\begin{aligned}
\frac{d\hat{e}_r}{dt} &= \dot{\theta}\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} + \dot{\phi}\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \phi} \\
&= \dot{\theta}\, \hat{e}_\theta + \dot{\phi}\, \sin\theta \hat{e}_\phi
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

όπου ορίσαμε

$$\begin{aligned} \hat{e}_\theta &= (\cos\phi\,\hat{i} + \sin\phi\,\hat{j})\cos\theta - \sin\theta\,\hat{k} \\ \hat{e}_\phi &= -\sin\phi\,\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j} \end{aligned} \tag{1.22}$$

Είναι απλό να δειχθεί ότι οι ορισθείσες ποσότητες είναι και αυτά μοναδιαία διανύσματα κάθετα μεταξύ τους και κάθετα στο $\hat{e}_r$. Επομένως η τριάδα $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi$ αποτελεί ιδανικό σύνολο για τον ορισμό ενός στιγμιαίου τρισορθογωνίου συστήματος που ακολουθεί το κινητό.

Από τη μορφή του $\hat{e}_\theta$ συνάγουμε ότι αποτελείται από το γραμμικό συνδυασμό της προβολής του $\vec{r}$ στο επίπεδο (xy) και συνιστώσας κατά μήκος του άξονα z, άρα ευρίσκεται στο επίπεδο που ορίζουν αυτές οι δύο κατευθύνσεις. Το $\hat{e}_\phi$ ταυτίζεται με το αντίστοιχο των πολικών συντεταγμένων και επομένως εφάπτεται του κύκλου που είναι παράλληλος στο (xy).



Σχήμα 1.3: *Οι συνιστώσες του διανύσματος θέσης x_1, x_2, x_3 στις σφαιρικές συντεταγμένες.*

Μια χρήσιμη σχέση για τη συνέχεια προκύπτει αν λάβουμε το ακόλουθο γραμμικό συνδυασμό

$$\cos\theta\,\hat{e}_r - \sin\theta\,\hat{e}_\theta = \hat{k} \tag{1.23}$$

Φυσικά η σχέση (μαζί με τις υπόλοιπες που δεν μας αφορούν εδώ) προκύπτει και μέσω των ορθογωνίων μετασχηματισμών που συνδέουν τα δυο ορθογώνια σύνολα μοναδιαίων διανυσμάτων.

Χρήσιμοι θα φανούν και οι παράγωγοι των δύο νέων μοναδιαίων διανυσμάτων. Έτσι,

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} &= \dot{\theta}\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial\theta} + \dot{\phi}\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial\phi} \\ &= -\dot{\theta}\,\hat{e}_r + \dot{\phi}\,\cos\theta\hat{e}_\phi\end{aligned} \tag{1.24}$$

όπως εύκολα μπορεί να επιβεβαιωθεί.

Για την παράγωγο του $\hat{e}_\phi$ έχουμε

$$\frac{d\hat{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}(\cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}) \tag{1.25}$$

Χωρίς την χρήση των ορθογωνίων μετασχηματισών, η τελευταία έκφραση δεν γράφεται εύκολα ως συνδυασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων των σφαιρικών, όμως ευτυχώς εδώ χρειαζόμαστε μόνο το γινόμενο $\sin\theta\frac{d\hat{e}_\phi}{dt}$ το οποίο με τη χρήση των προηγουμένων σχέσεων είναι

$$\begin{aligned}\sin\theta\frac{d\hat{e}_\phi}{dt} &= -\dot{\phi}\sin\theta\,(\cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}) \\ &= -\dot{\phi}(\hat{e}_r - \cos\theta\hat{k}) \\ &= -\dot{\phi}(\hat{e}_r - \cos\theta(\cos\theta\hat{e}_r - \sin\theta\hat{e}_\theta))\end{aligned} \tag{1.26}$$

Τελικά

$$\sin\theta\frac{d\hat{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}(\sin^2\theta\hat{e}_r + \cos\theta\sin\theta\hat{e}_\theta) \tag{1.27}$$

1.4.1 Ταχύτητα και Επιτάχυνση

$$\begin{aligned}\hat{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \dot{r}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{dt} \\ &= \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{e}_\phi\end{aligned} \tag{1.28}$$

δηλαδή, η ταχύτητα εκφράστηκε στη μορφή $\vec{v} = v_r\hat{e}_r + v_\theta\hat{e}_\theta + v_\phi\hat{e}_\phi$, ή

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{e}_\phi \tag{1.29}$$

Για να βρούμε την επιτάχυνση παραγωγίζουμε την ταχύτητα και κάνουμε χρήση των τύπων που αποδείξαμε παραπάνω. Τελικά

$$\vec{a} = a_r\hat{e}_r + a_\theta\hat{e}_\theta + a_\phi\hat{e}_\phi$$

όπου οι συνιστώσες της είναι

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \cos\theta \sin\theta \\ a_\phi &= r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta \end{aligned} \tag{1.30}$$

Η δύναμη γράφεται ως εξής

$$\vec{F} = m\vec{a} = ma_r\hat{e}_r + ma_\theta\hat{e}_\theta + ma_\phi\hat{e}_\phi \tag{1.31}$$

1.5 Παραδείγματα

1. Στο παράδειγμα αυτό θα δούμε τα όρια της υπόθεσης μέτρησης ακριβείας. Ας θεωρήσουμε σώμα μάζας m η ταχύτητα του οποίου είναι v_0 με αβεβαιότητα στη μέτρηση δv_0. Το σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R. Να βρεθεί η αβεβαιότητα στον εντοπισμό της θέσης του μετά χρόνο t. Πόση είναι η αβεβαιότητα μετά χρόνο $\delta t = 2\pi \frac{R}{\delta v_0}$;.

   Μετά την παρέλευση χρόνου t η θέση του είναι
   $$l_0 = v_0 t$$
   Όμως, λόγω της αβεβαιότητας στη μέτρηση της ταχύτητας, $v_0 + \delta v_0$ έχουμε
   $$l = (v_0 + \delta v_0)t = l_0 + \delta l$$
   Επομένως, η αβεβαιότητα στη θέση μετά χρόνο t:
   $$\delta l = \delta v_0 t$$
   Για πάροδο του χρόνου δt
   $$\delta l_0 = (\delta v_0 2)\pi \frac{R}{\delta v_0} = 2\pi R!$$
   δηλαδή η αβεβαιότητα στη θέση είναι ίση με το ίδιο το μήκος της περιμέτρου και επομένως η θέση του είναι εντελώς απροσδιόριστη.

2. Η έννοια της αδρανειακής μάζας σώματος m_A εμφανίζεται εξ ορισμού στο 2ο νόμο του Newton.
   $$F = m_A\, a \tag{1.32}$$
   Η βαρυτική μάζα m_B του σώματος υπεισέρχεται κατά την ελεύθερη πτώση σώματος λόγω της έλξης της βαρύτητας
   $$F = G\frac{M m_B}{R^2} \tag{1.33}$$
   Εξισώνοντας λαμβάνουμε
   $$a = G\frac{M m_B}{R^2 m_A} = \frac{m_B}{m_A}\, g$$
   πειραματικά γνωρίζουμε ότι η επιτάχυνσή του στο πεδίο της βαρύτητας είναι η ίδια για κάθε σώμα $a = g$, άρα
   $$m_A = m_B$$
   δηλαδή έχουμε ισοδυναμία αδρανειακής και βαρυτικής μάζας.

3. Θεωρούμε δύναμη της μορφής $F = -ke^{-x/\lambda}$ που δρά σε σωμάτιο m με αρχικές συνθήκες $x_0 = 0$ και $v_0 > 0$ επί του άξονα x. Να μελετηθεί η περίπτωση που $v_\infty = 0$.

   Η δύναμη είναι μόνο συνάρτηση της θέσης x. Από το 2ο νόμο του Newton
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,e^{-x/\lambda}$$
   Για δύναμη της μορφής $F(x)$ γράφουμε το αριστερό μέλος ως εξής
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}(v) = \frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = v\frac{dv}{dx}$$
   Τότε η εξίσωση κίνησης γράφεται
$$v\frac{dv}{dx} = -k\,e^{-x/\lambda}$$
   Ολοκληρώνοντας
$$v^2 - v_0^2 = \frac{2k\lambda}{m}\left(e^{-x/\lambda} - 1\right)$$
   Ορίζουμε
$$\bar{v}^2 = \frac{2k\lambda}{m}$$
   και παίρνουμε την τετραγωνική ρίζα (με το θετικό πρόσημο διότι $v_0 > 0$)
$$v = \sqrt{v_0^2 - \bar{v}^2\left(1 - e^{-x/\lambda}\right)}$$
   Παρατηρούμε ότι για $x \to \infty$
$$v_\infty = \sqrt{v_0^2 - \bar{v}^2}$$
   το οποίο μηδενίζεται όταν
$$v_0 = \bar{v}$$
   Άρα, επιστρέφοντας στην εξίσωση για την ταχύτητα, έχουμε
$$\frac{dx}{dt} = v = \sqrt{v_0^2 e^{-x/\lambda}} = v_0 e^{-x/2\lambda}$$
   Η τελευταία ολοκληρώνεται εύκολα και έχουμε το διάστημα ως συνάρτηση του χρόνου
$$x(t) = 2\lambda \ln(1 + \frac{v_0 t}{2\lambda})$$
   ενώ η ταχύτητα προκύπτει με απλή παραγώγιση
$$v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{v_0 t}{2\lambda}}$$

1.6 Ασκήσεις

1. Τρεις ίδιοι κύλινδροι ίσης ακτίνας και ίσης μάζας τοποθετούνται όπως στο σχήμα. Οι κύλινδροι μπορούν μόνο να ολισθήσουν, χωρίς να κυλήσουν. Αν οι κύλινδροι έχουν συντελεστή στατικής τριβής μ με το έδαφος, (τριβές δεν υπάρχουν), βρείτε την μέγιστη οριζόντια απόσταση μεταξύ των κέντρων των κάτω κυλίνδρων για την οποία το σύστημα παραμένει σε ισορροπία.

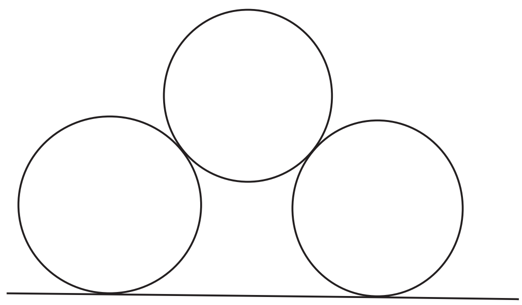
2. Σφαιρίδιο μάζης m προσδεμένο σε νήμα περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα σε οριζόντιο επίπεδο. Κάνετε χρήση των πολικών συντεταγμένων να μελετήστε την κίνησή του.

3. Σφαιρίδιο μάζης m περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα σε κυκλική τροχιά στην άκρη νήματος μήκους ℓ του οποίου η άλλη άκρη παραμένη σταθερή. Το νήμα σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφη. Να εφαρμοστούν οι εξισώσεις κίνησης στις πολικές συντεταγμένες για να υπολογιστεί η τάση του νήματος.

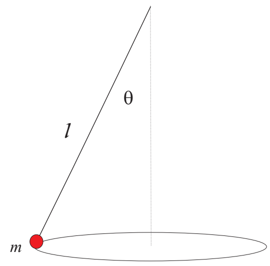
4. Σωμάτιο κινείται με $\dot{\phi} = \omega$ σταθερό σε τροχιά $r = \lambda\, e^{-\omega t}$. Υπολογίστε τη γωνιακή και ακτινική επιτάχυνση.

5. Σιδηροδρομικός συρμός στον οποίο εφαρμόζεται δύναμη κίνησης F αποτελείται από N πανομοιότυπα βαγόνια έκαστο μάζης m. Να βρεθεί η επιτάχυνση του συρμού και ο γενικός τύπος που δίνει την τάση μεταξύ δύο τυχαίων βαγονιών.

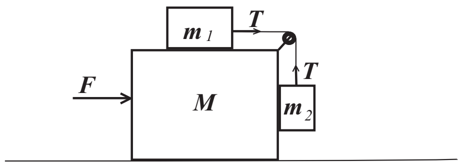
6. Σώμα σε σχήμα κύβου μάζας M ερίσκεται σε οριζόντιο δάπεδο χωρίς τριβές. Μικρότερο σώμα μάζας m_1 βρίσκεται στην πάνω επιφάνεια αυτού και συνδέεται με νήμα με άλλο $m_2 > m_1$ που εφάπτεται της καθέτου επιφάνειας του πρώτου. Να βρεθεί το μέγεθος οριζόντιας δύναμης F που



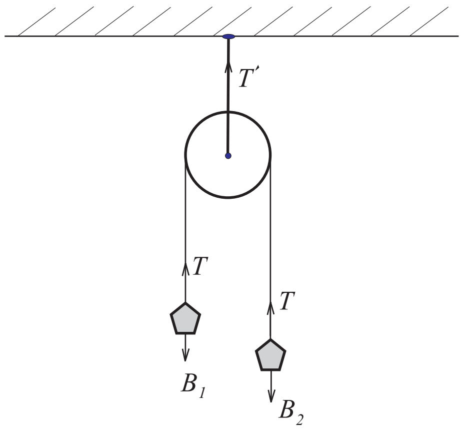
Σχήμα 1.4: Ισορροπία 3 κυκλίνδρων



πρέπει να ασκείται στο M ώστε να μην υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ των τριών μαζών.



7. Θεωρείστε απλή μηχανή Adwood με δύο σώματα, αναρτημένη από οροφή. Υπολογίστε την επιτάχυνση στης κίνησης αν δίδονται το άθροισμα των βαρών B και η δύναμη F που ασκείται στην οροφή.



Σχήμα 1.5: *Η απλή μηχανή Adwood.*

8. Σώμα κινείται από δύναμη της μορφής $F = -\frac{k}{x^3}$, με σταθερά $k > 0$. Αν αρχικά ευρίσκεται στη θέση x_0 με $v_0 = 0$ να βρεθεί ο χρόνος που θα

χρειαστεί να φτάσει στην αρχή $x = 0$.

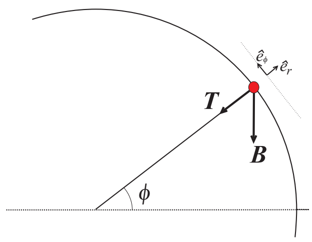
9. Σωμάτιο κινείται στην εσωτερική επιφάνεια κώνου γωνίας 2α χωρίς τριβές. Ο κώνος είναι ανεστραμένος με τον άξονά του κάθετα στο οριζόντιο επίπεδο. Να βρεθούν οι περιορισμοί στις αρχικές συνθήκες ώστε το σώμα να διαγράφει κυκλική τοχιά σε απόσταση ℓ από την κορυφή του κώνου μετρούμενη επί της επιφανείας του. ($v_0 = \sqrt{g\ell \cos\alpha}$.)

10. Αποδείξτε την ταυτότητα

$$\frac{d\hat{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}(\sin\theta\hat{e}_r + \cos\theta\hat{e}_\theta)$$

Στη συνέχεια, να γίνουν αναλυτικά οι πράξεις για την εύρεση των συνιστωσών της επιτάχυνσης στις σφαιρικές συντεταγμένες. *Σημειώστε ότι για την απόδειξη της ταυτότητας ισως φανεί χρήσιμη η αντικατάσταση* $\sin\theta(\cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}) = \hat{e}_r - \cos\theta\hat{k}$.

11. Σφαιρίδιο με μάζα m αναρτάται στην άκρη νήματος μήκους R και περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά με κέντρο την άλλη άκρη του νήματος, σε επίπεδο κάθετο στην επιφάνεια της Γής. Να βρεθεί συνθήκη που εξασφαλίζει πλήρη κυκλική τροχιά.



Σχήμα 1.6: *Η κυκλική κίνηση του σφαιριδίου*

12. Κάνη πυροβόλου όπλου εκτοξεύει βλήματα με σταθερή ταχύτητα v_0 τέτοια ώστε $v_0^2/g = 1m$ ενώ δύναται να περιστρέφεται σε κάθε γωνία επί του επιπέδου (x, y) (y η κατακόρυφη). Θεωρήστε ότι η κάνη είναι τοποθετημένη στην αρχή των αξόνων (x, y) και δείξτε ότι μπορεί να βάλει επί οιουδήποτε στόχου εντός επιφανείας που δίδεται από εξίσωση της μορφής

$$y = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \frac{g^2}{v_0^4}x^2\right) \to y = \frac{1}{2}(1 - x^2)$$

13. Μικρό βλήμα μάζας m εκτοξεύεται με ταχύτητα μέτρου v_0 υπό γωνία από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου C που σχηματίζει γωνία $0 < \phi_0 < \frac{\pi}{2}$ με τον ορίζοντα. Να βρεθεί η γωνία εκτόξευσης ϕ ως συνάρτηση της ϕ_0 ώστε να επιτευχθεί η μέγιστη δυνατή απόσταση μετρούμενη επί του επιπέδου C.

14. Σφαιρικό σωματίδιο διαμέτρου $D = 1$cm κινείται οριζόντια εντός υγρού και δέχεται αντίσταση που δίδεται από την $f(v) = -bv - cv^2$ όπου v η στιγμιαία ταχύτητα και b, c σταθερές

$$\begin{aligned} b &= \beta\, D, \qquad \beta = 1.6 \times 10^{-4} Ns/m^2 \\ c &= \gamma\, D^2, \qquad \gamma = 0.25 Ns/m^4 \end{aligned}$$

Αν η αρχική ταχύτητα για $t = 0$ είναι $v_0 = 0.625\, m/s$ και η μάζα του $M = b\tau_0$ όπου $\tau_0 = 1\, s$ να βρεθεί ο μαθηματικός τύπος της ταχύτητας ως συνάρτηση του χρόνου t. Να βρεθεί η χρονική στιγμή που η ταχύτητα είναι $v_0/2$. Να υπολογιστεί το διάστημα που διανύει στο χρόνο αυτό.

15. Στα άκρα αβαρούς ράβδου AB ευρίσκονται δύο μάζες m που δύνανται να κινούνται μόνο επί των κάθετων μεταξύ τους αξόνων (βλ. σχήμα). Βρείτε μια εξίσωση για την κίνηση της ράβδου ως προς τη γωνία ϕ στο πεδίο βαρύτητας. (OA κατακόρυφη)

16. Δίδεται η δύναμη $F = -kx$ με k σταθερά που δρά σε σωμάτιο, κινούμενο οριζόντια στον άξονα x. Να μελετηθεί η κίνηση και να γραφεί η δυναμική και η κινητική ενέργεια. Να δείξτε ότι το άθροισμα διατηρείται.

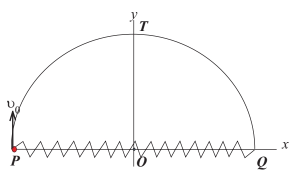
17. Σώμα μάζας m διαγράφει επίπεδη τροχιά που περιγράφεται από τις εξισώσεις

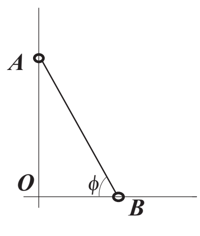
$$x = a\cos(\omega_1 t),\; y = b\sin(\omega_2 t)$$

i) πότε η κίνηση είναι περιοδική;

ii) υπό ποιές συνθήκες η δύναμη που είναι υπεύθυνη για την κίνηση είναι κεντρική;

iii) Για τη περίπτωση του δευτέρου ερωτήματος, υπολογίστε τη δυναμική





και κινητική ενέργεια ως συνάρτηση των x, y.
iv) Υπολογίστε τη συνολική ενέργεια και δείξτε ότι διατηρείται.

18. Βλήμα μάζας m και οριζόντια ταχύτητα v κτυπά ελατήριο ενσωματωμένο σε σώμα μάζας M που βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο με αρχική ταχύτητα μηδέν (βλ. σχήμα). Μετά την κρούση το σύστημα κινείται χωρίς τριβές. Να βρεθεί το μέγιστο μήκος συσπείρωσης του ελατηρίου.

Λύσεις, Υποδείξεις

Ακολουθούν υποδείξεις λύσεων σε ορισμένες από τις προταθείσες ασκήσεις.

- Για το σφαιρίδιο στην κυκλική κίνηση $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ και με σταθερή ταχύτητα $\ddot{\phi} = 0$, επομένως

$$f_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -r\dot{\phi}^2 \rightarrow T = -R\dot{\phi}^2$$

και

$$\dot{\phi} = \omega = v/R$$

άρα

$$T = -mRv^2/R^2 = -mv^2/R$$

- Εργαζόμαστε στις πολικές συντεταγμένες. Η ακτινική συνιστώσα της επιτάχυνσης είναι

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = (-\omega)^2 r_0 e^{-\omega t} - r\omega^2 = 0$$

και η γωνιακή

$$a_\phi = r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = -2r\omega^2$$

-

$$F = (Nm)a \rightarrow a = \frac{F}{Nm}$$

Το τελευταίο βαγόνι κινείται επίσης με επιτάχυνση a ενώ η μόνη δύναμη που ασκείται είναι η τάση T_1, άρα

$$T_1 = ma = m\frac{F}{Nm} = \frac{F}{N}$$

Σχήμα 1.7: Το σχήμα της άσκησης.

Το επόμενο υφίσταται τάσεις T_2 και T_1,

$$T_2 - T_1 = ma \to T_2 = T_1 + ma = \frac{2F}{N}$$

Αναγωγικά, το n στη σειρά από το τέλος

$$T_n = \frac{nF}{N}$$

- Στο m_2 κατά την κατακόρυφη ασκούνται το βάρος του και η τάση του νήματος, άρα για να ισορροπεί

$$T = M_2 = m_2 g$$

Η τάση του νήματος ασκέιται οριζόντια στο m_1, άρα

$$T = m_1 a$$

όπου a η επιτάχυνση.

$$a = \frac{m_2}{m_1} g$$

Για να μένει σταθερό ώς προς το M πρέπει όλο το σύστημα να κινείται με την ιδια επιτάχυνση, άρα

$$F = (M + m_1 + m_2)a = (M + m_1 + m_2)\frac{m_2}{m_1} g$$

- Εργαζόμαστε στις σφαιρικές συντεταγμένες. Λαμβάνοντας υπ'όψη ότι η γωνία $\theta = a$ δηλαδή είναι σταθερά, καθώς και το μέτρο του διανύσματος θέσης $r = \ell$ επίσης σταθερό, η συνιστώσα F_r της δύναμης γράφεται

$$F_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta\right)_{\theta=a, r=\ell} = -m\ell\dot{\phi}^2 \sin^2\alpha$$

η οποία πρέπει να ισούται με την προβολή (συνιστώσα) του βάρους στην κατεύθυνση του r, $-mg\sin\alpha$. Εξισώνοντας

$$\dot{\phi}\sin\alpha = \sqrt{\frac{g}{\ell}\cos\alpha}$$

Η ταχύτητα στην κυκλική κίνηση $v = \omega R$, με $\omega = \dot{\phi}, R = \ell\sin\alpha$, άρα

$$v = \sqrt{g\ell\cos\alpha}$$

- Εργαζόμαστε στις πολικές συντεταγμένες. Από το σχήμα, συνάγουμε τις ακόλουθες εξισώσεις

$$\begin{aligned} F_r &= -(T + B \sin\phi) \\ F_\phi &= -B\cos\phi \end{aligned} \tag{1.34}$$

Στις πολικές συντεταγμένες είναι

$$\begin{aligned} F_r &= m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \\ F_\phi &= m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) \end{aligned} \tag{1.35}$$

Επειδή η κίνηση είναι κυκλική, $r = R$ σταθερή ακτίνα, επομένως $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Τότε

$$\begin{aligned} mR\dot{\phi}^2 &= T + mg\sin\phi \\ R\ddot{\phi} &= -g\cos\phi \end{aligned} \tag{1.36}$$

Σε όλη την κυκλική τροχιά πρέπει να ισχύει $T \geq 0$ η οποία συνεπάγεται

$$v \geq \sqrt{gR}$$

Η δεύτερη εξίσωση για τη γωνιακή συνιστώσα της δύναμης γράφεται

$$R\ddot{\phi} + g\cos\phi = 0$$

και λαμβάνοντας υπ' όψη ότι

$$\ddot{\phi} = \dot{\phi}\frac{d}{d\phi}\dot{\phi}$$

μετατρέπεται στη

$$\frac{d}{d\phi}\left(\dot{\phi}^2 + \frac{2g}{R}\sin\phi\right) = 0$$

από την οποία συνάγουμε ότι η ποσότητα στις αγγύλες είναι σταθερά

$$\dot{\phi}^2 + \frac{2g}{R}\sin\phi = C \tag{1.37}$$

Η σταθερά προσδιορίζεται από αρχικές συνθήκες. Διαχωρίζουμε μεταβλητές και παίρνουμε την τετραγωνική ρίζα οπότε έχουμε

$$\frac{d\phi}{\sqrt{C' - 2\sin\phi}} = \sqrt{\frac{g}{R}}\,dt$$

όπου ορίστικε η C' μια νέα σταθερά. Η ολοκλήρωση οδηγεί σε ελλειπτικές συναρτήσεις οι οποίες θα μελετηθούν σε επόμενα μαθήματα.

Έστω ότι στη θέση $\phi = \pi/2$ η $v_1 = \sqrt{gR}$. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση 1.37 και υπολογίζουμε $C = 3g/R$. Τότε

$$\frac{d\phi}{\sqrt{3 - 2\sin\phi}} = \sqrt{\frac{g}{R}}\,dt$$

η οποία δίδει

$$\mathcal{E}(\frac{\pi - 2\phi}{4}, -4) = -\sqrt{\frac{g}{R}}t$$

- Για βολή σε τυχαία γωνία ϕ ισχύει

$$\begin{aligned} x &= v_0 t\ \cos\phi \\ y &= v_0 t\ \sin\phi - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \tag{1.38}$$

Απαλοίφοντας το χρόνο, λαμβάνουμε

$$y = x\tan\phi - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}\frac{x^2}{\cos^2\phi}$$

Στην ειδική περίπτωση $\phi = 0$, αν το πυροβόλο βρίσκεται σε οριζόντιο έδαφος, $y = 0$ και η κίνηση είναι ευθύγραμμη $x = v_0 t$.

Για $\phi \neq 0$ δοθέντος x,

$$\frac{dy}{d\phi} = \frac{x}{\cos^2\phi}\left(1 - \frac{gx}{v_0^2}\tan\phi\right) = 0$$

από την οποία προκύπτει

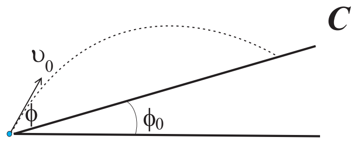
$$\tan\phi = \frac{v_0^2}{gx}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση και έχουμε

$$y = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \frac{g^2}{v_0^4}x^2\right) \to y = \frac{1}{2}(1 - x^2)$$

- Από τη γνωστή ανάλυση της κίνησης

$$\begin{aligned} y &= v_0 t\sin\phi - \frac{1}{2}gt^2 \\ x &= v_0 t\cos\phi \end{aligned} \tag{1.39}$$



Σχήμα 1.8: Βολή και κεκλιμένο επίπεδο γωνίας ϕ_0 ως προς τον ορίζοντα

Στο σημείο επαφής με το κεκλιμένο επίπεδο ο λόγος τους πρέπει να συμπίπτει με την εφαπτομένη της γωνίας του κεκλιμένου επιπέδου ϕ_0. Εξισώνουμε και επιλύουμε ως προς τον τελικό χρόνο επαφής του βλήματος με το C:

$$\frac{y}{x} = \tan\phi_0 \to t_{\tau\epsilon\lambda.} = \cdots = \frac{2v_0}{g}\frac{\sin(\phi-\phi_0)}{\cos\phi_0}$$

Το διάστημα ℓ επί του κεκλιμένου επιπέδου δίδεται από

$$\ell = \frac{x}{\cos\phi_0} = \frac{v_0 t_{\tau\epsilon\lambda.}\cos\phi}{\cos\phi_0} = \frac{2v_0^2\cos\phi\sin(\phi-\phi_0)}{\cos^2\phi_0}$$

Το διάστημα λαμβάνει ακρότατη τιμή εκεί που η παράγωγος μηδενίζεται $\frac{d\ell}{d\phi} = 0$. Αυτό συμβαίνει για $\phi = \frac{\phi_0}{2} + \frac{\pi}{4}$. Αντικαθιστούμε και λαμβάνουμε το ζητούμενο αποτέλεμσα

$$\ell = \frac{v_0^2}{g(1+\sin\phi_0)}$$

1.7 Κίνηση σε μέσο

Στα πραγματικά προβλήματα τα σώματα κινούνται εντός μέσου που δημιουργεί αντίσταση στην κίνησή τους. Σε κίνηση στο σύνηθες περιβάλλον έχουμε την αντίσταση των αερίων της ατμόσφαιρας που μας περιβάλλει. Ανάλογη αντίσταση έχουμε στην κίνηση σωμάτων εντός υγρών. Η αντίσταση στην κίνηση εντός μέσου αυξάνει καθώς η ταχύτητα αυξάνει, σε αντίθεση με την τριβή η οποία παραμένει σταθερή και εν γένει είναι ανεξάρτητη της ταχύτητας.

Ανάλογα με το σχήμα των σωμάτων και τις ιδιομορφίες του περιβάλλοντος, η δύναμη αντίστασης $\vec{f}(\vec{v})$ που ασκείται μπορεί να έχει πολύπλοκη μορφή και κατεύθυνση. Στην απλούστερη περίπτωση μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχει κατεύθυνση αντίθετη της ταχύτητας, ενώ μπορεί να προσεγγιστεί με δυνάμεις αυτής, δηλαδή

$$\vec{f}(\vec{v}) \approx -b\vec{v} - c|\vec{v}|\vec{v} + \cdots = -bv\hat{e}_v - cv^2\hat{e}_v + \cdots \tag{1.40}$$

όπου $\hat{e}_v$ ορίζει το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση της ταχύτητας.

Μεγαλύτερες δυνάμεις της $\vec{v}$ μπορούν να συνυπολογιστούν, αλλά οι δύο πρώτες περιγράφουν με αρκετή ακρίβεια τους διάφορους παράγοντες που συμβάλουν στην αντίσταση.

Ο γραμμικός όρος σχετίζεται με το ιξώδες του μέσου. Επίσης εξαρτάται συνήθως γραμμικά από το μέγεθος του σώματος.

Ο τετραγωνικός όρος σχετίζεται με την αντίσταση που δέχεται καθώς το σώμα μετατοπίζει το μέσο από το οποίο διέρχεται και επομένως πρέπει να εξαρτάται από την πυκνότητά του μέσου και την ενεργό επιφάνεια πρόσκρουσης. Λαμβάνοντας αυτά υπ' όψη, για ένα σφαιρικό σώμα μπορούμε να γράψουμε

$$b \sim \beta\, d,\ c = \gamma\, d^2$$

d είναι η διάμετρος του σώματος και α, β πειραματικά μετρήσιμοι συντελεστές.

Για την περίπτωση κίνησης στην ατμόσφαιρα, ο λόγος είναι περίπου $\gamma/\beta \approx 1.6 \times 10^3 s/m^2$. Λαμβάνοντας το λόγο του τετραγωνικού προς τον γραμμικό όρο

$$\frac{f_2}{f_1} \approx 1.6 \times 10^3 (sec/m^2)\, d\, v \tag{1.41}$$

Για μπαλάκι με ταχύτητα $v = 10m/s$ και διάμετρο $d = 5cm$ είναι $f_2/f_1 \sim 800$, συνεπώς επικρατεί ο τετραγωνικός όρος. Για μια σταγόνα λαδιού σε πείραμα τύπου Millikan, $v \sim 5 \times 10^{-5} m/s$, $d \sim 10^{-6} m$ και $f_2/f_1 \sim 10^{-7}$ άρα επικρατεί ο γραμμικός όρος. Ανάλογα με την περίπτωση μπορούμε να απαλοίψουμε τον λιγότερο σημαντικό όρο και να απλοποιήσουμε την ανάλυση. Σε άλλες περιπτώσεις οι όροι είναι ισοδύναμοι καοι πρέπει να ληφθούν υπ' όψη ταυτόχρονα.

Σημειώνουμε ότι ο λόγος f_2/f_1 ειναι σχεδόν ο ίδιος με τον αριθμό Raynolds

$$\mathcal{R} = \frac{\rho}{\eta} d\, v$$

που είναι ο λόγος των αδρανειακών δυνάμεων ως προς δυνάμεις που ωφείλονται στο ιξώδες. Συνεπώς όταν ο $\mathcal{R}$ είναι μεγάλος, επικτατεί ο τετραγωνικός όρος, όταν ο $\mathcal{R}$ είναι μικρός, έχουμε γραμμική εξάρτηση.

1.7.1 Οριζόντια κίνηση με αντίσταση

Θα μελετήσουμε πρώτα την περίπτωση της οριζόντιας κίνησης σώματος με αντίσταση που εξαρτάται γραμμικά από την ταχύτητα, δηλαδή που υφίσταται δύναμη της μορφής

$$f = -b\, v, \; b > 0$$

όπου το αρνητικό πρόσημο υπονοεί δύναμη που επενεργεί αντίθετα προς τη φορά κίνησης. Η b λαμβάνεται σταθερά και έχει διαστάσεις Kg/s. Θεωρούμε ότι τριβές δεν υπάρχουν. Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Newton

$$m\dot{v} = -bv$$

και αναδιατάσσουμε

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{m}{b} v$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι το κλάσμα $\frac{m}{b}$ έχει διαστάσεις χρόνου ορίζουμε μια *νέα* σταθερά

$$\tau = \frac{m}{b}, \; b \neq 0 \tag{1.42}$$

και γράφουμε την εξίσωση ως εξής

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dt}{\tau}, \; \tau \neq 0$$

Θεωρούμε ότι τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα έχει αρκική ταχύτητα v_0, και υποθέτοντας $b \neq 0$ ολοκληρώνουμε

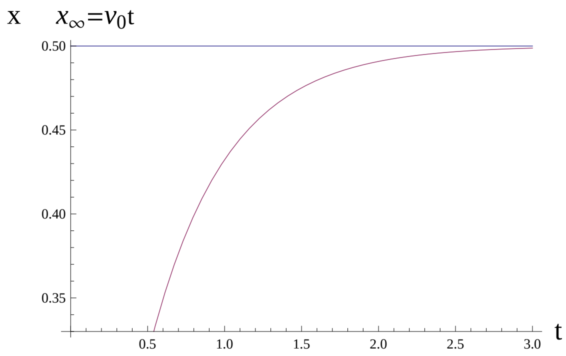
$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{t}{\tau} \tag{1.43}$$

άρα

$$v = v_0\, e^{-t/\tau} \tag{1.44}$$

Για τον υπολογισμό του διαστήματος ολοκληρώνουμε ακόμη μια φορά και υποθέτουμε ότι τη στιγμή $t_0 = 0$ ευρίσκεται στο $x_0 = 0$

$$x(t) = v_0 \tau\, (1 - e^{-t/\tau}) \tag{1.45}$$



Σχήμα 1.9: Το διάστημα $x(t)$ στη περίπτωση γραμμικής εξάρτησης της αντίστασης από την ταχύτητα

Ας εξετάσουμε οριακές περιπτώσεις. Για $t = 0$ είναι $x(0) = 0$ όπως προφανώς αναμενεται. Για $t \to \infty$, είναι

$$x(t \to \infty) = v_0\tau(1 - 0) = v_0\tau$$

δηλαδή το σώμα προσεγγίζει ασυμπτωτικά το σημείο

$$x_\infty = v_0\tau \tag{1.46}$$

Ο χρόνος τ αντιστοιχεί στο χρόνο που το κινητό θα διένυε το ίδιο διάστημα με σταθερή ταχύτητα v_0.

1.7.2 Κατακόρυφη πτώση με αντίσταση

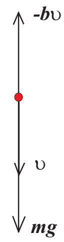
Θεωρούμε σώμα m σε πεδίο βαρύτητας g το οποίο ρίπτεται κάθετα προς την επιφάνεια της Γης από ύψος y_0 με αρχική ταχύτητα v_0. Θεωρούμε ότι υφίσταται αντίσταση από τον αέρα με γραμμική εξάρτηση από την ταχύτητα, δηλαδή $f(v) = -bv$.

Για την επίλυση του προβλήματος, θεωρούμε για ευκολία ως θετική κατεύθυνση προς τα κάτω, (βλ. σχήμα) και γράφουμε το 2ο νόμο ως εξής

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv \tag{1.47}$$

όπου $v > 0$ με αρχική τιμή $v_0 > 0$ για $t_0 = 0$. Όπως, πριν, είναι βολικό να ορίσουμε την παράμετρο $\tau = m/b$ με διαστάσεις χρόνου αφού υποθέσουμε ότι $b \neq 0$. Η εξίσωση γράφεται

$$\tau\frac{dv}{dt} = g\tau - v$$



Σχήμα 1.10: *Διάγραμμα δυνάμεων για ρίψη σώματος σε πεδίο βαρύτητας με γραμμική αντίσταση* $-bv$.

με όλες τις παράμετρες θετικές. Ας θεωρήσουμε πρώτα ότι η αρχική ταχύτητα είναι τέτοια ώστε $v_0 < g\tau$. Κατά την κατακόρυφη πτώση η ταχύτητα αυξάνει και θα υπάρξει μια οριακή τιμή για την οποία

$$v_{o\rho} = g\tau$$

Μετά από αυτή τη χρονική στιγμή το σώμα συνεχίζει με σταθερή ταχύτητα $v_{o\rho}$. Γράφουμε τότε την εξίσωση

$$\frac{dv}{v_{o\rho} - v} = -\frac{d(v_{o\rho} - v)}{v_{o\rho} - v} = \frac{dt}{\tau}$$

και ολοκληρώνουμε

$$\ln \frac{v_{o\rho} - v}{v_{o\rho} - v_0} = -\frac{t}{\tau}$$

ενώ λαμβάνοντας τον εκθέτη καταλήγουμε στην έκφραση

$$v = v_{o\rho} + (v_0 - v_{o\rho})\, e^{-t/\tau} \tag{1.48}$$

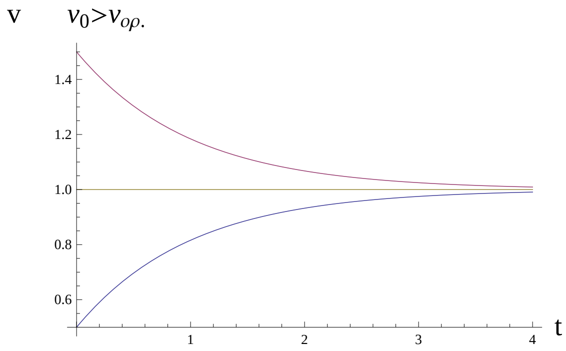
Στην ίδια έκφραση καταλήγουμε εάν επαναλάβουμε τη διαδικασία για αρχική ταχύτητα $v_0 > v_{o\rho}$. Είναι προφανές ότι για $v_0 = v_{o\rho}$ το σώμα θα παραμείνει με σταθερή ταχύτητα καθ' όλη τη διάρκεια της πτώσης. Οι τρεις περιπτώσεις σχεδιάζονται στο σχήμα

Για την εύρεση του διαστήματος ολοκληρώνουμε ακόμη μιά φορά

$$y(t) = y_0 + v_{o\rho}\, t + (v_0 - v_{o\rho})\, \tau\, (1 - e^{-t/\tau}) \tag{1.49}$$

1.7.3 Κατακόρυφη βολή προς τα πάνω με αντίσταση

Θεωρούμε στη συνέχεια κατακόρυφη βολή προς τα πάνω με αντίσταση. Λαμβάνουμε ως θετική φορά τη θετική φορά του κατακόρυφου άξονα y. Και οι



Σχήμα 1.11: ...περίπτωση γραμμικής εξάρτησης της αντίστασης από την ταχύτητα

δύο δυνάμεις που ενεργούν στο σώμα, mg και $f(u)$, έχουν φορά προς τα κάτω και επομένως η εξίσωση γράφεται

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - bv$$

Υποθέτοντας $\tau \neq 0, \tau \neq \infty$, ενώ ακολουθώντας ίδια διαδικασία λαμβάνουμε

$$v = -v_{o\rho} + (v_0 + v_{o\rho})\, e^{-t/\tau} \tag{1.50}$$

Για τον υπολογισμό του διαστήματος ολοκληρώνουμε την τελευταία

$$y(t) = y_0 - v_{o\rho}\, t + (v_0 + v_{o\rho})\, \tau(1 - e^{-t/\tau}) \tag{1.51}$$

1.7.4 Πλάγια βολή προς τα πάνω με αντίσταση

Όπως ήδη είδαμε, η μελέτη της πλάγιας βολής χωρίς αντίσταση του αέρα, γίνεται με το διαχωρισμό της κίνησης σε οριζόντια και κάθετη. Με τον ίδιο τρόπο μελετάμε και την πλάγια βολή παρουσία δυνάμεων αντίστασης. Υποθέτουμε πάλι, αντίσταση με γραμμική εξάρτηση από την ταχύτητα, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τους τύπους που παρήχθησαν στην ανωτέρω μελέτη. Ας θεωρήσουμε αρχική ταχύτητα

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$$

θα θεωρήσουμε επίσης ότι το σώμα για $t_0 = 0$ ευρίσκεται στην αρχή των αξόνων $x_0 = y_0 = 0$, οπότε οι εξισώσεις για την κίνηση στους δύο άξονες x, y γράφονται

$$\begin{aligned} x(t) &= v_{0x}\tau(1 - e^{-t/\tau}) \\ y(t) &= -v_{o\rho}\, t + (v_{0y} + v_{o\rho})\, \tau(1 - e^{-t/\tau}) \end{aligned} \tag{1.52}$$

Για να βρούμε μια εξίσωση $y = y(x)$ απαλοίφουμε το χρόνο από τις παραπάνω εξισώσεις. Από την εξίσωση για τη $x(t)$ έχουμε

$$\begin{aligned} 1 - e^{-t/\tau} &= \frac{x}{v_{0x}\tau} \\ -t &= \tau \ln(1 - \frac{x}{v_{0x}\tau}) \end{aligned} \tag{1.53}$$

Αντικαθιστούμε τις δύο τελευταίες εκφράσεις στους κατάλληλους όρους της έκφρασης για την $y(t)$ και λαμβάνουμε

$$y(x) = \frac{v_{0y} + v_{o\rho}}{v_{0x}} x + v_{o\rho}\tau \ln(1 - \frac{x}{v_{0x}\tau}) \tag{1.54}$$

1.7.5 Βεληνεκές

Στην πράξη υπάρχει ενδιαφέρον για τη μέγιστη απόσταση που θα διανύσει το βλήμα κατά τον οριζόντιο άξονα x. Στο σημείο αυτό έχουμε $y = 0$.

Είναι βολικό για τη συνέχεια να γράψουμε τη μορφή της τελευταίας εξίσωσης ως εξής

$$y = \kappa x + \lambda \ln(1 - \frac{x}{\mu})$$

όπου

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{v_{0y} + v_{o\rho}}{v_{0x}} \\ \lambda &= v_{o\rho}\tau \\ \mu &= v_{0x}\tau \end{aligned} \tag{1.55}$$

Για να βρούμε την μέγιστη αποσταση x_{max} πρέπει να επιλύσουμε την $y = 0$ ως προς x είναι

$$\kappa x + \lambda \ln(1 - \frac{x}{\mu}) = 0 \tag{1.56}$$

Η τελευταία είναι μια υπερβατική εξίσωση και δεν επιλύεται με τις γνωστές μεθόδους. Για τις περισσότερες όμως περιπτώσεις μπορούμε να προσεγγίσουμε το λογάριθμο με τους πρώτους όρους της ανάπτυξης σε σειρά

$$\ln(1 - \frac{x}{\mu}) \approx -\frac{x}{\mu} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{\mu^2} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{\mu^3} - \dots$$

Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι ο πρώτος μόνο όρος δεν είναι αρκετός, επομένως ας προσπαθήσουμε να βρούμε μια προσεγγιστική λύση με τους δύο πρώτους όρους

$$\ln(1 - \frac{x}{\mu}) \approx -\frac{x}{\mu} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{\mu^2}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (1.56) και λαμβάνουμε

$$x = 2\mu(\frac{\kappa\mu}{\lambda} - 1)$$

Εισάγουμε τα κ, μ, λ και λαμβάνουμε τη λύση

$$x = 2\frac{v_{0x}v_{0y}}{g} \tag{1.57}$$

Διαπιστώνουμε ότι η ποσότητα αυτή αντιστοιχεί ακριβώς στο βεληνεκές της βολής χωρίς αντίσταση αέρα. Άρα, για να δούμε την πρώτη προσέγγιση στην τροχιά με την επίδραση και της αντίστασης, πρέπει να συμπεριλάβουμε και τον επόμενο όρο της ανάπτυξης του λογαρίθμου σε σειρά. Τότε, η εξίσωση προς επίλυση είναι

$$\kappa x = \lambda\left(\frac{x}{\mu} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{\mu^3}\right)$$

Απαλλοίφουμε το x, πολλαπλασιάζουμε με 2μ και παίρνουμε την εξίσωση

$$x = 2\mu\left(\frac{\kappa\mu}{\lambda} - 1\right) - \frac{2}{3}\frac{x^2}{\mu}$$

Αντικαθιστούμε με τις παλαιές σταθερές

$$\frac{2}{3}\frac{g}{v_{0x}v_{o\rho}}x^2 + x - 2\frac{v_{0x}v_{0y}}{g} = 0$$

Η τελευταία είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x της οποίας η αποδεκτή λύση είναι

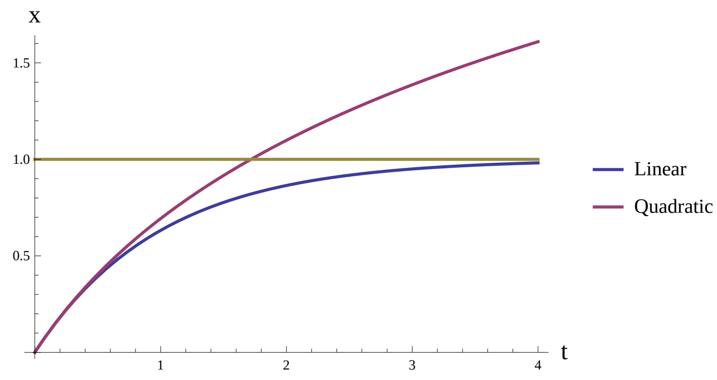
$$x_{max} = \frac{3}{4}\frac{v_{0x}v_{o\rho}}{g}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{16}{3}\frac{v_{0y}}{v_{o\rho}}}\right)$$

Αναπτύσσοντας τη ρίζα σε σειρά, $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2$ λαμβάνουμε

$$x_{max} = 2\frac{v_{0x}v_{0y}}{g}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{v_{0y}}{v_{o\rho}}\right) \tag{1.58}$$

1.7.6 Οριζόντια κίνηση με αντίσταση $\propto -v^2$

Για μεγάλα αντικείμενα που κινούνται σε μέσο (π.χ. μέσα σε αέρα ή υγρό) η αντίσταση που υφίστανται λόγω της κίνησής τους είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας. Ας θεωρήσουμε πρώτα την οριζόντια κίνηση ενός σώματος χωρίς τριβές. Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0$ με αρχική ταχύτητα $v_0 > 0$. Στη περίπτωση αυτή η μόνη δύναμη που αντιτίθεται



Σχήμα 1.12: Το διάστημα $x(t)$ στις περιπτώσεις γραμμικής και τετραγωνικής εξάρτησης της αντίστασης από την ταχύτητα

στην κίνησή του είναι η αντίσταση $f(v) = -cv^2$. Επομένως ο νόμος του Newton γράφεται

$$m\frac{dv}{dt} = -cv^2$$

Είναι χρήσιμο να ορίσουμε τη νέα παράμετρο

$$\tau = \frac{m}{cv_0}$$

η οποία έχει διαστάσεις χρόνου. Η ολοκλήρωση της εξίσωσης είναι απλή και δίδει

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{t}{\tau}}$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία παίρνουμε τον τύπο για το διάστημα που διανύει σε χρόνο t

$$x(t) = v_0 \tau \ln(1 + t/\tau) \tag{1.59}$$

Είναι χρήσιμο να συγκρίνουμε το αποτέλεσμα αυτό με την περίπτωση της γραμμικής εξάρτησης από την ταχύτητα. Παρατηρούμε ότι στη γραμμική περίπτωση υπάρχει μιά πεπερασμένη απόσταση $x_\infty = v_0 \tau$ στην οποία το κινητό σταματά. Αντίθετα, στην περίπτωση της τετραγωνικής εξάρτησης το κινητό συνεχίζει να κινείται έως το άπειρο έστω και με συνεχώς μειούμενη ταχύτητα. Το παράδοξο αυτό μας δείχνει ότι η τετραγωνική εξάρτηση αποκλειστικά από μόνη της είναι μή ρεαλιστική. Ενώ αποτελεί καλή προσέγγιση για την περίπτωση μεγάλων αντικειμένων, όταν η ταχύτητά τους μειώνεται σημαντικά η γραμμική εξάρτηση ως προς την ταχύτητα δεν μπορεί να αγνοηθεί εντελώς.

1.7.7 Κατακόρυφη κίνηση με αντίσταση $\propto -v^2$

Θεωρούμε σώμα σε πεδίο βαρύτητας που αφήνεται ελέυθερο από ύψος, ενώ η αντίσταση του αέρα είναι της μορφής $-cv^2$.

Η εξίσωση κίνησης είναι

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv^2$$

Το σώμα αποκτά οριακή ταχύτητα όταν οι δύο δυνάμεις εξισορροπηθούν $mg = cv^2$ οπότε

$$v_{o\rho} = \sqrt{\frac{mg}{c}} \tag{1.60}$$

Κάνοντας χρήση του ορισμού, η εξίσωση γράφεται

$$\frac{dv}{1-\frac{v^2}{v_{o\rho}^2}} = gdt \tag{1.61}$$

Χωρίζουμε το πρώτο μέλος ως εξής

$$\frac{dv}{1-\frac{v}{v_{o\rho}}} + \frac{dv}{1+\frac{v}{v_{o\rho}}} = 2gdt$$

Ολοκληρώνουμε λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $v_0 = 0$

$$\ln\frac{v_{o\rho}-v}{v_{o\rho}+v} = 2\frac{gt}{v_{o\rho}} \tag{1.62}$$

Στη συνέχεια λαμβάνουμε τον εκθέτη και αναδιατάσσουμε τους όρους έτσι ώστε τελικά έχουμε

$$v = v_{o\rho}\tanh\frac{gt}{v_{o\rho}} \tag{1.63}$$

Για μικρούς χρόνους, κάνοντας χρήση της ανάπτυξης $\tanh z \approx z - z^3/3$ μπορούμε να προσεγγίσουμε

$$v(t) \approx gt\left(1-\frac{1}{3}\left(\frac{gt}{v_{o\rho}}\right)^2\right)$$

$$y(t) = \frac{v_{o\rho^2}}{g}\ln(\cosh\frac{gt}{v_{o\rho}}) \tag{1.64}$$

Κάνοντας χρήση της $\ln(\cosh z) \approx z^2/2 - z^4/12$, μπορούμε να γράψουμε ένα προσεγγιστικό τύπο για το διάστημα

$$y(t) \approx \frac{1}{2}gt^2\left(1-\frac{1}{6}\left(\frac{gt}{v_{o\rho}}\right)^2\right) \tag{1.65}$$

1.7.8 Ασκήσεις

1. Σφαιρική σταγόνα πυκνοτητας ρ φορτίου Q πέφτει εντός υγρού πυκνότητας ρ_a με οριακή ταχύτητα v_τ προς τα κάτω. Εφαρμόζουμε ηλεκτρικό πεδίο E και η σταγόνα αποκτά οριακή ταχύτητα v'_τ προς τα πάνω. Θεωρούμε δύναμη αντίστασης γραμμική ως προς τις ταχύτητες. Δείξτε ότι το φορτίο ευρίσκεται από τον τύπο
$$Q = \frac{(\rho - \rho_a)Vg}{E}(1 + \frac{v_\tau}{v_{\tau'}}) \tag{1.66}$$

2. Σφαιρικό σωματίδιο διαμέτρου $D = 1$cm κινείται οριζόντια εντός υγρού και δέχεται αντίσταση που δίδεται από την $f(v) = -bv - cv^2$ όπου v η στιγμιαία ταχύτητα και b, c σταθερές
$$\begin{aligned} b &= \beta\, D, \qquad \beta = 1.6 \times 10^{-4} Ns/m^2 \\ c &= \gamma\, D^2, \qquad \gamma = 0.25 Ns/m^4 \end{aligned}$$
Αν η αρχική ταχύτητα για $t = 0$ είναι $v_0 = 0.625\, m/s$ και η μάζα του $M = b\tau_0$ όπου $\tau_0 = 1\, s$ να βρεθεί ο μαθηματικός τύπος της ταχύτητας ως συνάρτηση του χρόνου t. Να βρεθεί η χρονική στιγμή που η ταχύτητα είναι $v_0/2$. Να υπολογιστεί το διάστημα που διανύει στο χρόνο αυτό.

3. i) Σφαιρικό αντικείμενο μάζας m εκτελεί ελεύθερη πτώση από μεγάλο ύψος και δέχεται αντίσταση αέρα μέτρου $bv{+}cv^2$. Υπολογίστε την οριακή ταχύτητα δοθέντος ότι στη συγκεκριμμένη περίπτωση οι σταθερές συνδέονται με τη σχέση $c = 2b^2/(mg)$ και $m/b = \tau$.

   Απ. Από το νόμο του Newton
$$m\dot{v} = mg - bv - cv^2$$
   Για την οριακή ταχύτητα ισχύει $\dot{v} = 0$, άρα
$$mg = bv_t + cv_t^2 \;\rightarrow\; v_t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4mgc}}{c}$$
   Αντικαθιστούμε και ευρίσκουμε αποδεκτή λύση την $v_t = \frac{1}{2}g\tau$.

4. Κινούμενη λέμβος m δέχεται υδάτινη αντίσταση ανάλογη της n-οστής δύναμης της ταχύτητας, $F_{res} = -kv^n$. και συνεπώς από τον νόμο του $Newton$
$$m\frac{dv}{dt} + kv^n \;\; = \;\; 0 \tag{1.67}$$

Να λυθεί η εξίσωση κίνησης και να γίνει διερεύνηση ως προς τις διάφορες ακέραιες τιμές του εκθέτη n. Για κάθε περίπτωση να γραφούν η ταχύτητα και η θέση ως συναρτήσεις του χρόνου t με αρχικές συνθήκες $v(0) = v_0, x(0) = 0$.

5. Σφαίρα R πυκνότητας ρ πεφτει σε υγρό ρ_m που ασκεί δύναμη $f = \frac{\pi}{5}\rho_m R^2 v^2$. Να βρθεί ο χρόνος για πτώση ύψους h.

6. Δείξτε ότι για δύναμη αντίστασης $-\lambda v^3/2$ σε οριζόντια κίνηση χωρίς τριβές το διάστημα δίδεται προσεγγιστικά από

$$x \approx v_0 t(1 - \frac{1}{4}\frac{t}{\tau})$$

7. Θεωρείστε κατακόρυφη βολή μικρής σφαίρας με αρχική ταχύτητα v_0 και αντίσταση από τον αέρα της μορφής $f = -cv^2$. Δείξετε ότι η εξίσωση κίνησης μπορεί να γραφεί

$$\frac{dv}{dt} = -g(1 + v^2/v_\rho^2)$$

Στη συνέχεια, δείξτε ότι το μέγιστο ύψος που ανέρχεται είναι

$$h = \frac{v_\rho^2}{2g}\left(1 + \frac{v^2}{v_\rho^2}\right) \tag{1.68}$$

Υπόδειξη. Κάνετε χρήση της ιδιότητας

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dy}{dt}\frac{dv}{dy} = v\frac{dv}{dy} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dy}$$