Γεωργίου Κ. Λεοντάρη
Καθηγητή Θεωρητικής Φυσικής

Παραδόσεις Κλασικής Μηχανικής

Τμήμα Φυσικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Ιωάννινα 2014

Κεφάλαιο 2

Ορμή

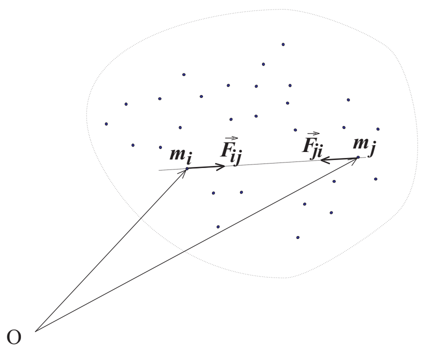
2.1 N σωμάτια

Θεωρούμε σύστημα από N σωμάτια με μάζες m_i, $i = 1, \ldots, N$ σε διαφορετικά σημεία του χώρου. Υποθέτουμε ότι στο m_i ασκείται εξωτερική δύναμη F_i^x, ενώ από τα υπόλοιπα $N-1$ σώματα του συστήματος, βάσει του τρίτου νόμου του Newton, ασκούνται επ' αυτού οι εσωτερικές δυνάμεις

$$F_{ij}, j = 1, 2, \ldots i-1, i+1, \ldots, N$$

Συνεπώς η συνολική ασκούμενη δύναμη επί του m_i είναι

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^x \tag{2.1}$$



Σχήμα 2.1: ...

Εκ του δευτέρου νόμου του Newton, η ορμή είναι

$$\dot{\vec{P}}_i = \vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^x, \ \forall i = 1, \ldots, N \tag{2.2}$$

Η συνολική ορμή είναι το άθροισμα

$$\dot{\vec{P}} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i^N \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} + \sum_i^N \vec{F}_i^x, \ \forall i = 1, \ldots, N \tag{2.3}$$

Το άθροισμα ως προς j συμπεριλαμβάνει κάθε όρο $\vec{F}_{ij}$ με δείκτη $j \neq i$. Λαμβάνοντας υπ' όψη και την άθροιση ως προς i στο διπλό άθροισμα διαπιστώνουμε ότι για κάθε F_{ij} υπάρχει πάντα ένα F_{ji}. Τότε, ισοδύναμα αντί αυτού μπορούμε να γράψουμε και $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}$ θεωρώντας μόνο τους δείκτες $j > i$. Τότε το εν λόγω άθροισμα γράφεται και ως εξής

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = \sum_i \sum_{j > i} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}$$

Από τον τρίτο Νόμο του Newton γνρίζουμε ότι για δοθέντα σώματα m_i, m_j οι δύο δυνάμεις $\vec{F}_{ij}, \vec{F}_{ji}$ είναι αντίθετες, συνεπώς όλα τα ζεύγη

$$\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$$

Ως αποτέλεσμα, η (2.3) γράφεται

$$\dot{\vec{P}} = \sum_i \vec{F}_i^x \equiv F_{o\lambda.}^x \tag{2.4}$$

Η σχέση αυτή είναι η γενίκευση για N σωμάτια της σχέσης που βρήκαμε για δύο σώματα στο πρώτο κεφάλαιο. Από αυτή απορρέει η γενική αρχή διατήρησης της ορμής σύμφωνα με την οποία
Όταν το σύνολο των εξωτερικών δυνάμεων σε σύστημα N σωματίων είναι μηδέν, τότε η συνολική ορμή του συστήματος διατηρείται.

$$F_{o\lambda.}^x = 0 \to \dot{\vec{P}} = 0 \to \vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i = constant$$

2.1.1 Κέντρο Μάζας

Το κέντρο μάζας συστήματος N σωματιδίων ορίζεται από τη σχέση

$$\vec{r}_{c.m.} \ = \ \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \tag{2.5}$$

όπου

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{2.6}$$

η συνολική μάζα των N σωματιδίων. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j} + z_{cm}\hat{k}$$

όπου

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\, x_i,\ y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\, y_i,\ z_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\, z_i$$

Εξειδικεύοντας για δύο σώματα

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M}$$

και κάνοντας χρήση της $M = m_1 + m_2$

$$\begin{aligned} \vec{r}_{cm} &= \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\ &= \vec{r}_2 + \frac{m_1}{M}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \end{aligned} \tag{2.7}$$

δηλαδή, το κέντρο μάζας ευρίσκεται στην ευθεία που ενώνει τα δύο κέντρα.

2.1.2 Συνεχής κατανομή μάζας

Για συνεχή κατανομή μάζας έχουμε την ακόλουθη γενίκευση του τύπου

$$x_{c.m.} = \frac{\int x\rho(x)d\,x}{\int \rho(x)d\,x} \tag{2.8}$$

Για μια διδιάστατη κατανομή $\rho(x, y)$ η γενίκευση του τύπου αυτού είναι

$$\vec{r}_{c.m.} = \frac{\int_S \vec{r}\rho(x, y)dxdy}{\int_S \rho(x, y)dxdy} \tag{2.9}$$

ή, για κάθε συνιστώσα ξεχωριστά

$$\begin{aligned} x_{c.m.} &= \frac{\int_S x\rho(x, y)dxdy}{\int_S \rho(x, y)dxdy}, \\ y_{c.m.} &= \frac{\int_S y\rho(x, y)dxdy}{\int_S \rho(x, y)dxdy} \end{aligned}$$

2.1.3 Παράδειγμα υπολογισμού κέντρου μάζας

Ο κώνος του σχήματος έχει την κορυφή του στο κέντρο συντεταγμένων, τον άξονά του κατά τον z. Έχει σταθερή πυκνότητα ρ, ύψος h και μέγιστη ακτίνα κύκλου R. Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας.

Λύση. Εργαζόμαστε στις καρτεσιανές. Λόγω της συμμετρίας $x_{cm} = y_{cm} = 0$.

Στον άξονα z

$$z_{cm} = \frac{1}{M}\int z\rho dV$$

όπου

$$M = \int dm$$

Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων θεωρούμε δακτύλιο του κώνου ακτίνας $r < R$ σε ύψος $z < h$ με πάχος dz.

Για τον υπολογισμό της συνολικής μάζας, έχουμε $dm = \rho dV$ όπου dV είναι ο στοιχειώδης όγκος του εν λόγω δακτυλίου

$$dV = \pi r^2 dr$$

Από τα όμοια τρίγωνα έχουμε

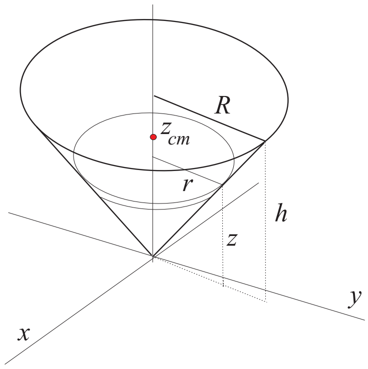
$$r = \frac{R}{h}z$$

Τότε

$$M = \pi\rho\frac{R^2}{h^2}\int_0^R z^2 dz = \frac{\pi\rho}{3}R^2 h$$

Ανάλογα, το πρώτο ολοκλήρωμα είναι

$$\int z dm = \pi\rho\frac{R^2}{h^2}\int_0^R z^3 dz = \frac{\pi\rho}{4}R^2 h^2$$



Σχήμα 2.2: Κ.Μ. κώνου

Άρα

$$z_{cm} = \frac{3}{4}h$$

2.1.4 Συστήματα μεταβλητής μάζας

2.1.5 Κίνηση πυραύλου

Θα μελετήσουμε πρώτα την κίνηση πυραύλου απουσία πεδίου βαρύτητας καθώς ο πύραυλος εκπέμπει αέρια καύσιμα με ρυθμό dm/dt. Θεωρούμε ότι δεδομένη χρονική στιγμή t ο πύραυλος έχει $\vec{v}$, μάζα M και επιπρόσθετα μικρή ποσότητα αερίου καυσίμου δm προς εκπομπή, έτσι ώστε η συνολική μάζα την t είναι $M + \delta m$. Η ορμή του συστήματος είναι

$$\vec{P}(t) = (M + \delta m)\vec{v}$$

Μεταξύ των χρονικών στιγμών t και $t+\delta t$ η μάζα δm του καυσίμου εκπέμπεται με ταχύτητα $\vec{v}_\kappa$ ως προς τον πύραυλο. Ως αποτέλεσμα η ταχύτητα του πυραύλου μεταβάλλεται από $\vec{v}$ σε $\vec{v} + \delta\vec{v}$.

Μετρώντας την ταχύτητα ως προς το ίδιο σύστημα αναφοράς με εκείνη του πυραύλου, τη στιγμή $t + \delta t$ η ταχύτητα των αερίων είναι

$$\vec{v}_\kappa + \vec{v} + \delta\vec{v}$$

Έτσι, η συνολική ορμή τη χρονική στιγμή $t + \delta t$ είναι

$$\vec{P}(t + \delta t) = M(\vec{v} + \delta\vec{v}) + \delta m\,(\vec{v}_\kappa + \vec{v} + \delta\vec{v})$$

Η διαφορά των ορμών μεταξύ των δύο διαδοχικών χρονικών στιγμών είναι

$$\delta\vec{P} = \vec{P}(t + \delta t) - \vec{P}(t) = M\delta\vec{v} + \delta m\,\vec{v}_\kappa + \delta m\delta\vec{v}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{P}}{dt} &= \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\vec{P}}{\delta t} \\
&= \lim_{\delta t\to 0}\left(M\frac{\delta\vec{v}}{\delta t} + \vec{v}_\kappa\frac{\delta\,m}{\delta t} + \frac{\delta\,m\delta\vec{v}}{\delta t}\right) \\
&= \lim_{\delta t\to 0}\left(M\frac{\delta\vec{v}}{\delta t} + \vec{v}_\kappa\frac{\delta\,m}{\delta t} + \frac{\delta\,m}{\delta t}\frac{\delta\vec{v}}{\delta t}\delta t\right) \\
&= M\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}_\kappa\frac{dm}{dt}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Στη συνέχεια λαμβάνουμε υπ' όψη ότι ο ρυθμός μεταβολής (αύξησης) της μάζας του καυσίμου προφανώς προέρχεται από τη συνολική αρχική μάζα του συστήματος πυραύλου-αερίων και επομένως είναι αντίθετος του ρυθμού μείωσης του M, άρα

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{dM}{dt}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση και λαμβάνουμε υπ'όψη ότι η μεταβολή της ορμής ισούται με την εξωτερική δύναμη που τυχόν εφαρμόζεται στο σύστημα

$$\vec{F}^x \equiv \frac{d\vec{P}}{dt}$$

οπότε

$$\vec{F}^x = M\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_\kappa\frac{dM}{dt} \tag{2.11}$$

Εάν δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις, $\vec{F}^x = 0$, τότε λαμβάνουμε την εξίσωση

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}_\kappa\frac{dM}{dt} \tag{2.12}$$

Εφόσον τώρα η ταχύτητα εκτόξευσης του καυσίμου είναι σταθερή, $\vec{v}_\kappa = \vec{c}$, μπορούμε να ολοκληρώσουμε ως εξής

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}_\kappa\int_{t_0}^{t}\frac{1}{M}\frac{dM}{dt}dt$$

από την οποία λαμβάνουμε

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 - \vec{v}_\kappa \ln\frac{M_0}{M(t)} \tag{2.13}$$

Ας θεωρήσουμε ότι η συνολική μάζα του συστήματος απαρτίζεται από τη μάζα του κενού (χωρίς αέριο) πυραύλου M_R και των αερίων M_A

$$M_0 = m_R + m_A$$

Έστω επίσης ότι το σύστημα ευρίσκεται επί άξονα x και επομένως οι ταχύτητες είναι

$$\vec{v} = v\hat{i},\ \vec{v}_0 = v_0\hat{i},\ \vec{v}_\kappa = v_\kappa(-\hat{i}) = -v_\kappa\hat{i}$$

Μετά την καύση όλου του αερίου έχουμε την τελική ταχύτητα η οποία

$$v_\tau = v_0 + \ln(1 + \frac{m_A}{m_R}) \tag{2.14}$$

Παρατηρούμε ότι η τελική ταχύτητα του πυραύλου είναι ανεξάρτητη του τρόπου που εκπέμπεται το καύσιμο. Είτε η καύση συμβεί απότομα, ή σταδιακά, η τελική ταχύτητα παραμένει η ίδια. Όταν όμως υπεισέρχεται η βαρύτητα, τα πράγματα είναι διαφορετικά όπως θα δούμε σε επόμενο παράδειγμα.

2.1.6 Πύραυλος σε πεδίο βαρύτητας

Στο προηγούμενο παράδειγμα η εξωτερική δύναμη ήταν μηδέν. Στην παρούσα περίπτωση μελετούμε την κίνηση του πυραύλου σε βαρυτικό πεδίο το οποίο έχει το ρόλο της εξωτερικής δύναμης $\vec{F}^x = m\vec{g}$, επομένως η διανυσματική εξίσωση (2.11) λαμβάνει τη μορφή

$$m\vec{g} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_\kappa \frac{dm}{dt}$$

Η εξίσωση γράφεται ως εξής

$$d\vec{v} = \vec{g}dt + \vec{v}_\kappa \frac{dm}{m}$$

η ολοκλήρωση της οποίας δίδει την τελική ταχύτητα

$$\vec{v}_\tau = \vec{v}_0 + \vec{v}_\kappa \ln\frac{m(t_0)}{m(t)} - \vec{g}(t - t_0)$$

Όλες οι διανυσματικές ποσότητες βρίσκονται επί του καθέτου άξονα y, γεγονός το οποίο ευκολύνει να γραψουμε το πρόβλημα χωρίς διανύσματα. Λαμβάνοντας υπ' όψη τη φορά δράσης της δύναμης και των ταχυτήτων, έχουμε

$$\vec{g} = -g\hat{j},\ \vec{v}_0 = v_0\hat{j},\ \vec{v}_\kappa = -v_\kappa\hat{j}$$

Αντικαθιστούμε και λαμβάνουμε

$$v_\tau = v_0 + v_\kappa \ln\frac{m(t_0)}{m(t)} - g(t - t_0) \tag{2.15}$$

Παρατηρούμε ότι το δεξιό μέλος εξαρτάται πλέον ειδικά από το χρόνο μεσω της βαρύτητας. Αυτό σημαίνει ότι ο ρυθμός καύσης αποκτά ρόλο στην τελική ταχύτητα του πυραύλου. Γρήγορη καύση συνεπάγεται μεγάλη τελική ταχύτητα διότι μειώνει την ανασταλτική επίδραση του όρου της βαρύτητας στην τελική ταχύτητα.

2.2 Στροφορμή

Θεωρούμε σημειακό σωμάτιο m σε θέση $\vec{r}$ ως προς σύστημα συντεταγμένων με αρχή το O. Η στροφορμή ορίζεται το γινόμενο

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{2.16}$$

Είδαμε ότι η ορμή είναι η ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα συντεταγμένων. Όμως για τη στροφορμή αυτό δεν ισχύει, επειδή η μέτρηση του διανύσματος θέσης εξαρτάται από την επιλογή του αδρανειακού συστήματος συντεταγμένων.

Η χρονική μεταβολή της στροφορμής

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}}$$

(διότι $\dot{\vec{r}} \times \vec{p} = m\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0$) ορίζεται ως η ροπή

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{2.17}$$

Συνεπώς, μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Η ροπή είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής.

Συγκρίνοντας με την μελέτη για την ορμή, έχουμε τις ακόλουθες αναλογίες

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \rightarrow \quad \vec{F} = \dot{\vec{p}} \tag{2.18}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \rightarrow \quad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{2.19}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη τις παρατηρήσεις παραπάνω, σε πολλές περιπτώσεις προβλημάτων όπου στην πράξη μελετούμε την κίνηση για ένα μόνο σώμα, μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλα την αρχή του συστήματος έτσι ώστε να μηδενίζεται η ροπή. Στο σύστημα Γης Ηλίου για παράδειγμα, η δύναμη που ασκείται στη Γη είναι κεντρική. Αν η αρχή του συστήματος συντεταγμένων είναι ο Ήλιος, η δύναμη κατευθύνεται από τη Γή προς το κέντρο

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{e}_r$$

Τότε, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ και επομένως η στροφορμή διατηρείται

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L} = \vec{c}$$

Επειδή η $\vec{L}$ από την ιδιότητα του εξωτερικού γινομένου είναι κάθετη στα διανύσματα $\vec{r}, \vec{v}$, έπεται ότι το επίπεδο που ορίζουν τα τελευταία παραμένει σταθερό.

Συνεπώς το πρόβλημα επίλυσης της κίνησης των πλανητών ανάγεται στις δύο διαστάσεις.

Στη Νευτώνια Μηχανική ο 2ος νόμος του Kepler που αφορά την κίνηση των πλανητών γύρω από τον Ήλιο είναι απόρροια της διατήρησης της στροφορμής. Πράγματι, ας θεωρήσουμε δύο διαδοχικές θέσεις του πλανήτη στα σημεία P, P' με ακτίνες $\vec{r}, \vec{r}\,'$, ενώ $\vec{P}P' = \Delta\vec{r} = \vec{v}\,\Delta t$. Το εμβαδό του τριγώνου OPP' είναι

$$\Delta\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \Delta\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}\,\Delta t$$

Στο όριο $\Delta t \to dt$ ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t} = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}$$

και από την $\vec{p} = m\vec{v}$ έχουμε

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2m}\vec{r} \times \vec{p} = \frac{1}{2m}\vec{L} \tag{2.20}$$

Επειδή όπως είδαμε για την κίνηση των πλανητών η στροφορμή διατηρείται σταθερή έπεται ότι και ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού που σαρρώνει η ακτίνα της τροχιάς είναι σταθερός.

2.2.1 Η στροφορμή στις Πολικές Συντεταγμένες

Όπως είδαμε το διάνυσμα και η ταχύτητα στις πολικές συντεταγμένες γράφονται

$$\vec{r} = r\hat{e}_r, \;\; \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\phi}\hat{e}_\phi$$

Επομένως η στροφορμή είναι

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = mr^2\dot{\phi}\,\hat{e}_r \times \hat{e}_\phi = mr^2\dot{\phi}\,\hat{e}_z$$

και ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi} = \frac{1}{2}r^2\omega$$

2.2.2 Η στροφορμή πολλών σωμάτων

Θεωρούμε σύστημα με N σωμάτια. Το σωμάτιο $(m_i, \vec{r}_i, \vec{v}_i)$ έχει στροφορμή $\vec{L}_i = m\vec{r}_i \times \vec{v}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$. Η συνολική στροφορμή του συστήματος είναι

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Παραγωγίζοντας τον τελευταίο τύπο της συνολικής στροφορμής έχουμε

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Η συνολική δύναμη επί σωματίου του συστήματος γράφεται

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^x$$

όπου $\vec{F}_{ij}$ η δύναμη που ασκείται στο σώμα i από το σώμα j.

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^x \tag{2.21}$$

Ο πρώτος όρος ξαναγράφεται

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \sum_i \sum_{j > i} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji})$$

Από τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

Αντικαθιστούμε

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \sum_i \sum_{j > i} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}$$

Επειδή οι θέσεις των δύο σωματίων είναι $\vec{r}_i$ και $\vec{r}_j$, το διάνυσμα $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ είναι κατά μήκος της ευθείας που ενώνει τα δύο σώματα.

Η συγκεκριμμένη ποσότητα αποτελεί τη συνεισφορά των εσωτερικών δυνάμεων στο ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος. Στην περίπτωση του ρυθμού μεταβολής της ορμής, είδαμε ότι η αντίστοιχη συνεισφορά από τις εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος σωματιδίων ήταν μηδενική από την ιδιότητα των εσωτερικών δυνάμεων $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$. Στην παρούσα περίπτωση κανένα από τα δύο διανύσματα $\Delta\vec{r}_{ij} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ και $\vec{F}_{ij}$ δεν είναι μηδενικό. Επομένως στη γενική περίπτωση εν απουσία εξωτερικών δυνάμεων, εξακολουθεί να υπάρχει συνεισφορά στο ρυθμό μεταβολής της στροφορμής.

Οταν βέβαια οι δυνάμεις είναι κεντρικές, η $\vec{F}_{ij}$ βρίσκεται και αυτή επί της ίδιας ευθείας με το $\Delta\vec{r}_{ij}$, άρα το εξωτερικό γινόμενό τους μηδενίζεται

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$$

Επομένως

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^x \qquad (2.22)$$

δηλαδή, ο ρυθμός μεταβολής της συνολικής ορμής ισούται με το άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων που ενδεχομένως δρουν στο σύστημα των N σωματιδίων.

$$\vec{\tau}_{ex} = \dot{\vec{L}}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι σε συστήματα σωματιδίων όπου υφίστανται κεντρικές δυνάμεις, εάν δεν υπάρχει εξωτερική ροπή, δηλαδή αν $\vec{\tau}_{ex} = 0$, η συνολική ορμή του συστήματος διατηρείται:

$$\vec{\tau}_{ex} = 0 \rightarrow \vec{L} = \vec{c}$$

2.2.3 Περιστροφική Κίνηση

Μια από τις σημαντικώτερες εφαρμογές της στροφορμής είναι στην ανάλυση της κίνησης του στερεού σώματος. Η γενική κίνησή του είναι περίπλοκη και θα αναλυθεί στο Β′ εξάμηνο. Ένα μέρος της αφορά περιστροφική κίνηση και στο εδάφιο αυτό θα εισαγάγουμε τις βασικές έννοιες αυτής.

Σύμφωνα με θεώρημα του Euler, η περιστροφική κίνηση σώματος ως προς σταθερό σημείο O είναι περιστροφή γύρω από άξονα που διέρχεται από το O. Η περιστροφή περιγράφεται με το ρυθμό $\dot{\phi}$ μεταβολής της γωνίας ϕ που διαγράφεται κάθετα στον άξονα από σημείο του σώματος. Αν $\hat{k}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τον άξονα περιστροφής, ορίζουμε το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας

$$\vec{\omega} = \omega\,\hat{k},\ \omega(t) = \dot{\phi}$$

Εν γένει, η $\omega(t)$ εξαρτάται από το χρόνο και καλείται στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα.

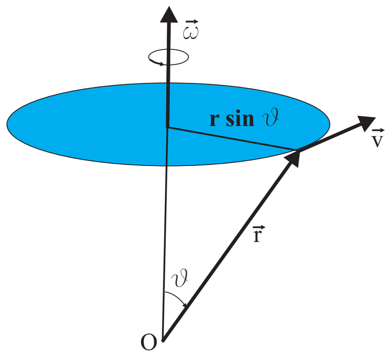
Ας θεωρήσουμε τον άξονα περιστροφής του σχήματος.

Σε χρόνο dt το υλικό σημείο διαγράφει γωνία $d\phi$ και διάστημα $ds = \rho\, d\phi$ έτσι η ταχύτητα

$$v = \frac{ds}{dt} = \omega\rho$$

όπου $\rho = r \sin\theta$. Η διανυσματική συνάρτηση της ταχύτητας γράφεται τότε

$$\vec{v} = \omega \times \vec{r}$$



Σχήμα 2.3: *Υλικό σημείο σε απόσταση $\rho = r\sin\theta$ από τον άξονα z, του τρισορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων. Η ταχύτητα $\vec{v} = \omega \times \vec{r}$*

2.2.4 Ροπές Αδράνειας

Θεωρούμε πρώτα ένα σωμάτιο μάζας m ταχύτητας $\vec{v}$. Η στροφορμή του δίνεται από τον τύπο

$$\vec{L} \;=\; m\vec{r}\times\vec{v} \;=\; m\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \tag{2.23}$$

Η συνιστώσα L_i της στροφορμής είναι τότε

$$\begin{aligned} L_i &= m\epsilon_{ijk}x_j v_k = m\epsilon_{ijk}x_j(\vec{\omega}\times\vec{r})_k \\ &= m\epsilon_{ijk}x_j\epsilon_{kln}\omega_l x_n = m(\delta_{il}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jl})\omega_l x_n x_j \\ &= m(\omega_i x_j x_j - \omega_j x_i x_j) = m\omega_j(\delta_{ij}r^2 - x_i x_j) \end{aligned} \tag{2.24}$$

δηλαδή

$$L_i \;=\; I_{ij}\omega_j \tag{2.25}$$

όπου

$$I_{ij} \;=\; m(\delta_{ij}r^2 - x_i x_j) \tag{2.26}$$

Για τη συνιστώσα L_1, από την (2.25) έχουμε

$$\begin{aligned} L_1 &= m(\omega_1 r^2 - \omega_1 x_1^2 - \omega_2 x_2 x_1 - \omega_3 x_3 x_1) \\ &= I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 \end{aligned} \tag{2.27}$$

όπου σύμφωνα με την εξίσωση (2.25)

$$I_{11} = m(r^2 - x_1^2) = m(x_2^2 + x_3^2),\; I_{12} = -mx_1x_2,\; I_{13} = -mx_1x_3 \tag{2.28}$$

Ανάλογα εκφράζονται και άλλες συνιστώσες L_2 και L_3. Μέσω της εξίσωσης (2.25) ορίζουμε συνολικά εννέα ποσότητες $I_{ij}, (i, j = 1, 2, 3)$ οι οποίες συνδέουν τα δύο διανύσματα $\vec{L}$ και $\vec{\omega}$. Μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (2.23) με τη χρήση των ποσοτήτων αυτών ως εξής

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

Από την (2.29) βλέπουμε ότι η κάθε συνιστώσα στροφορμής εν γένει είναι γραμμική συνάρτηση όλων των συνιστωσών της γωνιακής ταχύτητας, δηλαδή το διάνυσμα της στροφορμής συνδέεται με εκείνο της γωνιακής ταχύτητας με ένα γραμμικό μετασχηματισμό. Οι παραπάνω σχέσεις γενικεύονται και για N σωμάτια: Γράφουμε τότε

$$I_{ij}(n) = m(n)[r^2(n)\delta_{ij} - x_i(n)x_j(n)] \tag{2.30}$$

όπου $x_i(n)$ είναι η i-συνιστώσα του διανύσματος θέσης του σωματίου n. Αν όλα τα σωμάτια βρίσκονται πολύ κοντά το ένα με το άλλο ώστε να θεωρούνται ένα σώμα, τότε η (2.30) γράφεται

$$I_{ij} = \delta_{ij} \int_V \rho(\vec{r}) r^2 dV - \int_V \rho(\vec{r}) x_i x_j dV \tag{2.31}$$

όπου $\rho(\vec{r})$ η πυκνότητα μάζας του σώματος.

Ας σταθούμε λίγο περισσότερο στις εννέα ποσότητες I_{ij}. 'Οπως είδαμε σχηματίζουν ένα πίνακα 3×3. Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα αυτού, I_{11}, I_{22}, I_{33} καλούνται *συντελεστές ροπών αδράνειας*. Τα μη διαγώνια στοιχεία $I_{ij} (i \neq j)$ καλούνται *γινόμενα αδράνειας*. Προφανώς τα στοιχεία αυτά συνιστούν μια μαθηματική οντότητα διαφορετική από το διάνυσμα. Παρατηρούμε ότι στον ορισμό τους εισάγονται δύο δείκτες, σε αντιδιαστολή με το διάνυσμα όπου το περιγράφουμε με τρείς συνιστώσες που έχουν μόνο ένα δείκτη. Επιπλέον, διαπιστώνουμε ότι ο τρόπος μετασχηματισμού του I_{ij} συμπίπτει με εκείνο του τανυστή δεύτερης τάξης

2.2.5 Ροπή περιστρεφόμενου σώματος ως προς σταθερό άξονα

Θεωρούμε ότι ο άξονας περιστροφής ταυτίζεται με τον z. Η στροφορμή γράφεται

$$L_z = I\omega$$

Η ροπή

$$\tau = \frac{dL_z}{dt}$$

Παραγωγίζοντας την πρώτη έχουμε

$$\tau = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

Ονομάζουμε την $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ γωνιακή επιτάχυνση. Η σχέση γράφεται

$$\tau = I\alpha$$

και είναι το ανάλογο του 2ου νόμου του Nevton

$$F = m\,a$$

Η κινητική ενέργεια από καθαρά περιστροφική κίνηση είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} I\,\omega^2 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Στη συνέχεια ας εξετάσουμε μερικές ειδικές περιπτώσεις.

Παράδειγμα

1. Θεωρούμε δίσκο στο επίπεδο xy που περιστρέφεται ως προς τον άξονα z που διέρχεται από το κέντρο του. Ας θεωρήσουμε το δίσκο ως σύστημα σωματιδίων πολύ κοντά μεταξύ τους. Το σωματίδιο n έχει μάζα m_n και ροπή I_n. Συνολικά

   $$I = \sum_n m_n \rho_n^2$$

   Για συνεχή κατανομή, θεωρούμε δακύλιο ακτίνας ρ πάχους $d\rho$ Αν σ η πυκνότητα, για το δακτύλιο έχουμε

   $$dI(\rho) = \rho^2 dm = \sigma 2\pi \rho^2\, d\rho$$

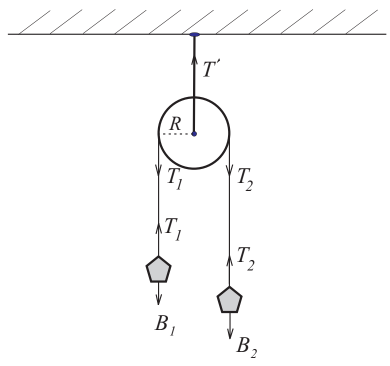
   Για όλο το δίσκο ολοκληρώνουμε στο διάστημα $[0, R]$, οπότε

   $$I = \int_0^R \sigma 2\pi \rho^2\, d\rho = \frac{1}{2}\sigma\pi R^4$$

   Η μάζα του δακτυλίου είναι $m = \int dm = \sigma\pi R^2$, επομένως η ροπή αδράνειας μπορεί να γραφεί

   $$I = \frac{1}{2} m R^2 \tag{2.33}$$

2. Θα επαναλάβουμε την άσκηση του πρώτου κεφαλαίου με τη μηχανή Addwood αναιρώντας την απλοϊκή υπόθεση ότι η τροχαλία έχει μηδενική μάζα. Θα υποθέσουμε ότι η μάζα της M είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη η δε ακτίνας της είναι R. Σύμφωνα με το προηγούμενο αποτέλεσμα, η ροπή αδράνειας αυτής δίδεται από τον τύπο (2.33).



Υποθέτουμε ότι $B_1 > B_2$ και ότι τριβές δεν υπάρχουν. Συνεπώς το σύστημα των βαρών θα κινηθεί προς τα κάτω από την πλευρά του B_1 έστω με επιτάχυνση a. Σε αντίθεση με την απλή περίπτωση που εξετάσαμε, εδώ λόγω της ύπαρξης αδρανειακής μάζας υπάρχει ροπή αδράνειας και οι τάσεις του νήματος είναι διαφορετικές στις δύο πλευρές της τροχαλίας. Αν T_1, T_2 οι τάσεις, εξετάζοντας τις εξισώσεις κίνησης έχουμε

$$\begin{aligned} B_1 - T_1 &= m_1 a \\ T_2 - B_2 &= m_2 a \end{aligned} \tag{2.34}$$

από τις οποίες προκύπτει

$$(m_1 + m_2)a + T_1 - T_2 = B_1 - B_2$$

Στη συνέχεια υπολογίσουμε τις τάσεις από τις εξισώσεις για τη ροπή. Λαμβάνοντας υπ'όψη ότι στο σημείο εφαρμογής τους οι τάσεις είναι κάθετες προς την ακτίνα R, (β. σχήμα) η συνολική ροπή ισούται με

$$\tau = (T_1 - T_2)\, R \tag{2.35}$$

Όμως η ροπή είναι ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής

$$\tau = \frac{d}{dt}L = I\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}MR^2\frac{d\omega}{dt} \tag{2.36}$$

και επομένως

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2} M R \frac{d\omega}{dt}$$

Από την κυκλική κίνηση έχουμε

$$v = \omega R \to a = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}$$

Αντικαθιστούμε το $\frac{d\omega}{dt}$ στην προηγούμενη και λαμβάνουμε

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2} g \tag{2.37}$$

Συγκρίνοντας με την απλή περίπτωση, διαπιστώνουμε ότι η ύπαρξη μάζας M στην τροχαλία αυξάνει την αδρανειακή μάζα του συστήματος κατά $M/2$, δηλαδή συνεισφέρει μόνο κατά το ήμισυ σε σχέση με τις m_1, m_2.

2.2.6 Θεώρημα των παραλλήλων αξόνων

θεωρούμε στερεό σώμα μάζας M και άξονα z που απέχει απόσταση d από παράλληλο άξονα διερχόμενο από το κέντρο μάζας. Τότε, η ροπή αδράνειας I σώματος μάζας M ως προς άξονα z ισούται με

$$I = I_{cm} + M\, d^2 \tag{2.38}$$

όπου I_{cm} η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον παράλληλο άξονα διερχόμενο από το κέντρο μάζας του.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας ορίζουμε για διευκόλυνση το σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε ο άξονας ως προς τον οποίο ζητείται η ροπή αδράνειας να συμπίπτει με τον z. Το κέντρο μάζας έχει συντεταγμένες

$$\vec{R} = x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j} + z_{cm}\hat{k}$$

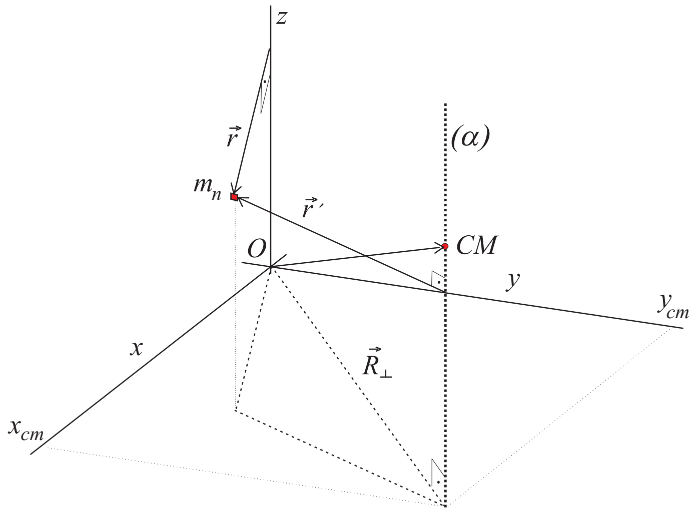
Τότε το

$$\vec{R}_\perp = x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j}$$

είναι το κάθετο διάνυσμα της θέσης του κέντρου μάζας του σώματος από τον άξονα z.

Θεωρούμε στοιχειώδη μάζα m_n του σώματος σε θέση $\vec{r}_n$. Το κάθετο διάνυσμα από τον άξονα z προς τη μάζα m_n συμβολίζουμε

$$\vec{r}_n = x_n\hat{i} + y_n\hat{j}$$



Σχήμα 2.4: *Άξονας δια του Κ.Μ. παράλληλα με τον άξονα z, του τρισορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων.*

Το κάθετο διάνυσμα επί του άξονα διερχομένου από το κέντρο μάζας έως την m_n

$$\vec{\rho}_n = x_n'\hat{i} + y_n'\hat{j}$$

Ισχύει

$$\vec{r}_n = \vec{\rho}_n + \vec{R}_\perp$$

Η ροπή αδράνειας ως προς z γράφεται

$$\begin{aligned} I &= \sum_n m_n r^2 \\ &= \sum_n m_n(\vec{\rho}_n + \vec{R}_\perp)\cdot(\vec{\rho}_n + \vec{R}_\perp) \\ &= \sum_n m_n\vec{\rho}_n^2 + \sum_n m_n\vec{R}_\perp\cdot\vec{\rho}_n + \sum_n m_n\vec{R}_\perp^2 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Όμως ο δεύτερος όρος

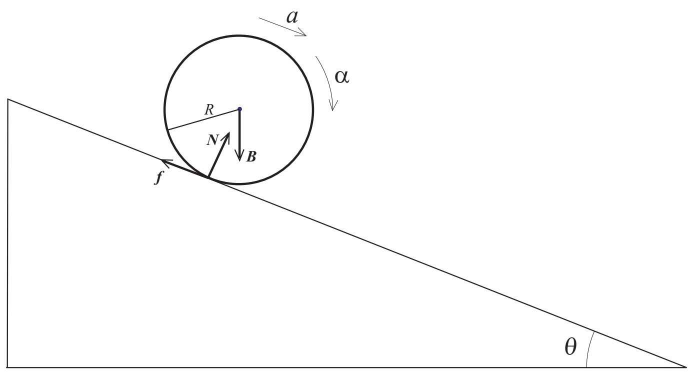
$$\sum_n m_n\vec{\rho}_n = \sum_n m_n(\vec{r}_n - \vec{R}_\perp) = \sum_n m_n\vec{r}_n - M\vec{R}_\perp$$

και επειδή $\sum_n m_n\vec{r}_n = M\vec{R}_\perp$, η παράσταση είναι μηδέν. Άρα, (λαμβάνονας υπ' όψη ότι $\vec{R}_\perp^2 = d^2$)

$$\begin{aligned} I &= \sum_n m_n \vec{\rho}_n^2 + \sum_n m_n \vec{R}_\perp^2 \\ &= I_{cm} + Md^2 \end{aligned} \tag{2.40}$$

2.2.7 Ασκήσεις

1. Κύλιση δίσκου M, R σε κεκλυμένο επίπεδο.



Σχήμα 2.5: *Κύλιση δίσκου σε κεκλυμένο επίπεδο.*

Η ροπή δίσκου ως προς το κέντρο του είναι $I_c = \frac{1}{2}MR^2$ και ως προς το σημείο της περιφέρειας

$$I = I_c + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

Ας υποθέσουμε ότι ο δίσκος κινείται με επιτάχυνση a Η εξίσωση κίνησης γράφεται

$$Ma = B \sin\theta - f \tag{2.41}$$

όπου f η τριβή.

Λαμβάνουμε στη συνέχεια την εξίσωση των ροπών ως προς το κέντρο μάζας. Η κάθετη αντίδραση N διέρχεται από το κέντρο μάζας, συνεπώς η N και το βάρος B δεν συνεισφέρουν. Τότε, λαμβάνοντας υπ' όψη ότι η f είναι κάθετη στην ακτίνα, γράφουμε

$$Rf = I\alpha \tag{2.42}$$

με

$$a = R\alpha$$

Από τις παραπάνω υπολογίζουμε την f

$$f = \frac{I\alpha}{R} = \frac{I}{R}\frac{a}{R} = \frac{I}{R^2}a = \frac{1}{2}Ma$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση κίνησης (2.41)

$$Ma = Mg\sin\theta - \frac{1}{2}Ma$$

από την οποία προκύπτει

$$a = \frac{2}{3}g\sin\theta \tag{2.43}$$

2. Πύραυλος υφίσταται κατά την κίνησή του αντίσταση $\vec{A} = -b\vec{v}$. Αν έχει μηδενική αρχική ταχύτητα και ο ρυθμός καύσης των αερίων του είναι σταθερός $dm/dt = -\lambda$, δείξτε ότι η ταχύτητά του είναι

$$v = \frac{\lambda}{b}v_\kappa\left(1 - (M/M_0)^{b/\lambda}\right)$$

3. Σε τυχαίο σημείο $\vec{r}$ του τρισδιάστατου χώρου, ορίζεται η διανυσματική έκφραση

$$\vec{A}(\vec{r}) \;\; = \;\; \sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{r}_i - \vec{r}) \tag{2.44}$$

η οποία καλείται διάνυσμα αστάθειας μάζας. 1) Δείξτε ότι $\vec{A}(\vec{r}_{c.m.}) = 0$. 2) Θεωρείστε την ειδική περίπτωση τριών σωματιδίων m_1, m_2, m_3. Αν $\vec{A}(\vec{r}_2) = 0$ δείξτε ότι αυτά ευρίσκονται στην ίδια ευθεία.

4. Σε ορισμένες σύγχρονες θεωρίες προβλέπεται η ύπαρξη μαγνητικών μονοπόλων, που αντιστοιχεί σε ένα απομονωμένο πόλο μαγνήτη, χωρίς την εμφάνιση του άλλου πόλου. Βασιζόμενοι σε αυτή την υπόθεση, λύστε την ακόλουθη άσκηση.

   Σημειακό φορτίο φορτίου και μάζας (e, m) ευρίσκεται σε πεδίο μαγνητικού μονοπόλου μάζας $M \gg m$. Θεωρείστε ότι το μονόπολο λόγω της μεγάλης μάζας παραμένει ακίνητο, ενώ η εξίσωση κίνησης του σωμάτιου (e, m) είναι

$$m\ddot{\vec{r}} = -ge\frac{\dot{\vec{r}} \times \vec{r}}{r^3} \tag{2.45}$$

i) Δείξετε ότι η κινητική ενέργεια είναι σταθερά της κίνησης.

ii) Δείξετε ότι η διανυσματική ποσότητα

$$\vec{J} = \vec{L} + eg\frac{\vec{r}}{r}$$

είναι επίσης σταθερά της κίνησης.

Κάνετε χρήση της Διανυσματικής Ταυτότητας

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \;=\; (\vec{A} \cdot \vec{C})\,\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\,\vec{C} \tag{2.46}$$

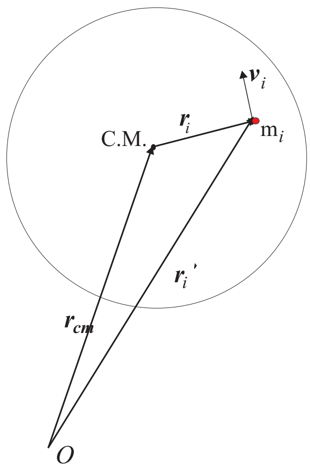
5. Θεωρώντας ότι ο δίσκος του σχήματος απαρτίζεται από μικρές μάζες m_i η ροπή αδράνειας γράφεται $I = \sum_i m_i r_i^2$. Υπολογίστε τη στροφορμή $\mathcal{L}_{(O)}$ ως προς το σημείο O του σχήματος και συγκρίνετε το αποτέλεσμα με εκείνη ως προς το κέντρο μάζας του, $\mathcal{L}_{(C.M.)}$.

   Ως προς το κέντρο μάζας δείξαμε ότι

   $$\mathcal{L}_{(C.M.)} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \cdots = I\omega\,\hat{k}$$

   Ως προς το O έχουμε

   $$\mathcal{L}_{(O)} = \sum_i m_i(\vec{r}_i' \times \vec{v}_i) = \sum_i m_i(\vec{r}_{cm} + \vec{r}_i) \times \vec{v}_i = \vec{r}_{cm} \times \sum_i m_i \vec{v}_i + \mathcal{L}_{(C.M.)}$$



Σχήμα 2.6: Ροπή αδράνειας δίσκου και στροφορμή

Όμως ο όρος

$$\vec{r}_{cm} \times \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{r}_{cm} \times \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{d}{dt} \left(\vec{r}_{cm} \times \sum_i m_i \vec{r}_i \right) = 0$$

και επομένως

$$\mathcal{L}_{(O)} = \mathcal{L}_{(C.M.)}$$

6. Κάνετε χρήση των σφαιρικών συντεταγμένων r, θ, ϕ για να βρείτε το κέντρο μάζας ημισφαιρίου σταθερής πυκνότητας ρ ακτίνας a.

   Στο μάθημα μελετήσαμε τη στροφορμή δίσκου ως προς το κέντρο μάζας του, θεωρώντας ότι ο δίσκος απαρτίζεται από μικρές μάζες m_i (βλ. σχήμα). Στην προσέγγιση αυτή $\mathcal{L}_{(C.M.)} = I\omega$ και η ροπή αδράνειας γράφεται

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

   Υπολογίστε τη στροφορμή $\mathcal{L}_{(O)}$ ως προς το σημείο O του σχήματος και συγκρίνετε το αποτέλεσμα με αυτό για την $\mathcal{L}_{(C.M.)}$.

7. Δείξαμε ότι στο συνεχές όριο ο εν λόγω δίσκος (ακτίνας a) έχει ροπή αδράνειας

$$I = \frac{1}{2} M a^2$$

   Δείξτε ότι στην περίπτωση άξονα περιστροφής κατά μήκος της διαμέτρου του

$$I = \frac{1}{4} M a^2$$

   ενώ για ομογενή σφαιρικό φλοιό ακτίνας a ως προς άξονα διερχόμενο από το κέντρο της

$$I = \frac{2}{3} M a^2$$

8. Για ομογενή συμπαγή σφαίρα

$$I = \frac{2}{5} M a^2$$

9. Τα δύο παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να θεωρηθούν ως τα δύο όρια σφαιρικού φλοιού ομόκεντρων ακτίνων $a > b$

$$I = \frac{2}{5} M \frac{a^5 - b^5}{a^3 - b^3}$$

2.2.8 Ασκήσεις επανάλειψης

1. Θεωρήστε σύστημα N σωμάτων σ_i (όπου $i = 1, ..., N$), με μάζα και ορμή $m_i, \vec{p}_i$, ενώ το κάθε ένα από αυτά ασκεί δύναμη στο άλλο $\vec{F}_{ij}$. Ταυτόχρονα to κάθε σ_i υπόκειται σε εξωτερική δύναμη $\vec{F}_i^x$. Επαναλάβετε προσεκτικά τις πράξεις του μαθήματος και δείξτε ότι

$$\dot{\vec{p}} = \sum_i \vec{F}_i^x$$

2. Δείξτε ότι για την περίπτωση κεντρικών δυνάμεων και απουσίας εξωτερικών δυνάμεων η συνολική στροφορμή

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

διατηρείται.

3. Δείξτε ότι στις κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, ϕ, z) ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα (σε συνιστώσες) έχει τη μορφή

$$F_\rho = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2),\ F_\phi = m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}),\ F_z = m\ddot{z}$$

4. Αν διανυσματική συνάρτηση (π.χ. ταχύτητα) εξαρτάται από το χρόνο $\vec{v}(t)$ άλλα έχει σταθερό μέτρο, δείξτε ότι η παράγωγός της $\dot{\vec{v}}(t)$ είναι κάθετη ως προς αυτή.

5. Μικρή σφαίρα δέχεται ώθηση που της προξενεί αρχική ταχύτητα v_0 επί κεκλιμένου επιπέδου γωνίας ϕ_0 με τον ορίζοντα. Το σφαιρίδιο ανέρχεται επί του επιπέδου χωρίς τριβές. Βρείτε το διάνυσμα θέσης του ανά πάσα χρονική στιγμή. Υπολογίστε το μέγιστο διάστημα s_{max} που θα διανύσει επί του κεκλιμένου επιπέδου και σε πόσο χρόνο θα επιστρέψει στην αρχή. Μελετήστε την κίνηση στην περίπτωση που το μήκος του κεκλιμένου επιπέδου είναι $\ell = s_{max}/2$.

6. Κινούμενη λέμβος m δέχεται υδάτινη αντίσταση ανάλογη της n-οστής δύναμης της ταχύτητας, $F_{res} = -kv^n$, συνεπώς από τον νόμο του Newton

$$m\frac{dv}{dt} + kv^n \quad = \quad 0 \tag{2.47}$$

Να λυθεί η εξίσωση κίνησης και να γίνει διερεύνηση ως προς τις διάφορες ακέραιες τιμές του εκθέτη n. Για κάθε περίπτωση να γραφούν η ταχύτητα και η θέση ως συναρτήσεις του χρόνου t με αρχικές συνθήκες $v(0) = v_0, x(0) = 0$.

7. Τα δύο βλήματα A, B του σχήματος ευρίσκονται σε απόσταση ℓ και εκτοξεύονται ταυτόχρονα. Δοθείσης της ταχύτητας υ_b του , βρείτε την $\vec{\upsilon}_a$ ώστε να συγκρουστούν στο μέγιστο ύψος.

8. Από όπλο μάζας M ρίχνουμε σφαίρα μάζας m με ταχύτητα υ. Βρείτε την ταχύτητα ανάκρουσης του όπλου ως προς το έδαφος και ώς προς τη υ.

9. Δύο βαγόνια κινούνται οριζόντια επί ευθείας γραμμής σε τροχιά σύγρουσης με ταχύτητες υ_1, υ_2 και μάζες m_1, m_2. Αν υ_1' η ταχύτητα του πρώτου μετά τη σύγρουση να βρείτε την ταχύτητα του δευτέρου.

10. Δύο φοιτητές με μάζες m_1, m_2 βρίσκονται σε απόσταση ℓ μεταξύ τους σε δάπεδο χωρίς τριβές και κρατούν τις δύο άκρες ενός σχοινιού. Δεδομένη χρονική στιγμή αρχίζουν να τραβούν το σχοινί και συναντώνται σε απόσταση $4\ell/9$ από τον πρώτο. Να βρεθεί ο λόγος των βαρών τους.

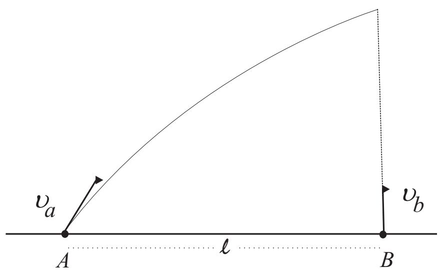
11. Θεωρούμε ημικυκλικό λεπτό δίσκο ακτίνας a σταθερής πυκνότητας τοποθετημένο με το κέντρο του νοητού κύκλου στο κέντρο του συστήματος συντεταγμένων έτσι ώστε η επιφάνειά του να καταλαμβάνει το πάνω μέρος $y > 0$ του του επιπέδου (x, y). Να βρεθεί το κέντρο μάζας.

    Να γίνει το ίδιο για την περίπτωση ημιελλειπτικού δίσκου ημιαξόνων (a, b).

12. Επαναλάβατε πρώτα την ακόλουθη γνωστή άσκηση: μελέτη της κίνησης κατά τη βολή σώματος μάζας m από το έδαφος με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon} = \upsilon_x \hat{\imath} + \upsilon_y \hat{\jmath}$. Εύρεση της γωνίας βολής για να έχουμε το μέγιστο βεληνεκές.

    Στη συνέχεια, υπολογίστε τη γωνία βολής έτσι ώστε το εμβαδό μεταξύ της καμπύλης τροχιάς και του οριζόντιου εδάφους να είναι μέγιστο.

13. Σώμα μάζας m κινείται οριζόντια σε ευθεία γραμμή με σταθερή ταχύτητα υ_0. Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ ευρίσκεται στην αρχή συστήματος συντεταγμένων $x_0 = 0$ ενώ δρά επ' αυτού δύναμη ανάλογη της απόστασης



$F = \pm kx$ me $k > 0$. Να μελετηθεί η κίνηση και να σχεδιαστεί το διάστημα ως συνάρτηση του χρόνου.

14. Στο μάθημα υπολογίσαμε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dQ}{1-Q^2} = \text{arctan}(Q)$$

Επαναλάβατε τον υπολογισμό με το ακόλουθο τέχνασμα. Γράψτε πρώτα τον παρονομαστή

$$\frac{1}{1-Q^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-Q} + \frac{1}{1+Q}\right)$$

και στη συνέχεια υπολογίστε τα δύο ολοκληρώματα. Συσχετίστε τα αποτελέσματά σας και δείξτε ότι ταυτίζονται.

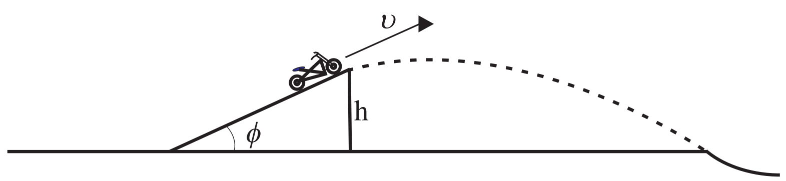
Υπολογίστε τους δύο πρώτους όρους της ανάπτυξης σε σειρά $Taylor$ των συναρτήσεων που είδαμε στις ασκήσεις του μαθήματος

$$\text{tanh}(x), \ \text{ln}(\text{cosh}(x))$$

15. Αναβάτης σε μηχανή επιχειρεί επικίνδυνο άλμα από εξέδρα ύψους h. Αν η μέγιστη ταχύτητά του είναι $\vec{v}$, να βρεθεί η γωνία ϕ ώστε να πετύχει το μέγιστο άλμα. Να βρεθεί η γωνία του σκάματος ως προς την οριζόντια στο σημείο προσγείωσης ώστε να έχει την κατά το δυνατό ομαλέστερη επαφή με το έδαφος. Υπολογίστε την απόσταση του σημείου προσγείωσης από την εξέρδα. Κάνετε εφαρμογή για $h = 10/3\,m$, $v = 36\,Km/h$ και $g \approx 10m/s^2$.

16. Κινούμενη λέμβος m δέχεται υδάτινη αντίσταση ανάλογη της n-οστής δύναμης της ταχύτητας, $F_{res} = -kv^n$. και συνεπώς από τον νόμο του $Newton$

$$m\frac{dv}{dt} + kv^n \;=\; 0 \qquad (2.48)$$



Σχήμα 2.7: Το άλμα του αναβάτη

Να λυθεί η εξίσωση κίνησης και να γίνει διερεύνηση ως προς τις διάφορες ακέραιες τιμές του εκθέτη n. Για κάθε περίπτωση να γραφούν η ταχύτητα και η θέση ως συναρτήσεις του χρόνου t με αρχικές συνθήκες $v(0) = v_0, x(0) = 0$.

17. Στο μάθημα ορίσαμε τις τρείς γωνίες $Euler$. Να βρείτε τον μετασχηματισμό των τελικών συντεταγμένων μετά από τις ακόλουθες διαδοχικές στροφές.

$$\alpha = \frac{\pi}{2},\ \beta = \frac{\pi}{2},\ \gamma = \frac{\pi}{4}$$

Συμπίπτει κάποιος από τους άξονες με αντίστοιχο του αρχικού συστήματος;

18. Δίδεται διανυσματική συνάρτηση μιας μεταβλητής $\vec{F}(t)$, παραγωγίσιμη και συνεχής. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{|\vec{F}(t)|}$$

Να γραφεί τύπος για τη γωνία που σχηματίζουν η $\vec{T}(t)$ και η παράγωγός της. Είναι δυνατός ο υπολογισμός της;

19. Η τροχιά κινητού ως συνάρτηση του χρόνου δίδεται από τη διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{r}(t) \quad = \quad (t - \sin\, t)\,\hat{i} + (1 - \cos\, t)\,\hat{j} + \frac{\sin t}{\sqrt{2}}\,\hat{k} \qquad (2.49)$$

Να σχεδιάσετε προσεγγιστικά την καμπύλη για το χρονικό διάστημα $t = [0, 4\pi]$. Να υπολογιστούν η καμπυλότητα και στρέψη. Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης για $t = [0, 2\pi]$.

20. 1. Η τροχιά κινητού ως συνάρτηση του χρόνου δίδεται από τη διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{r}(t) \quad = \quad (t - \sin\, t)\,\hat{i} + (1 - \cos\, t)\,\hat{j} + \frac{\sin t}{\sqrt{2}}\,\hat{k} \qquad (2.50)$$

Να σχεδιάσετε προσεγγιστικά την καμπύλη για το χρονικό διάστημα $t = [0, 4\pi]$. Να υπολογιστούν η καμπυλότητα και στρέψη. Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης για $t = [0, 2\pi]$.

$$|\dot{\vec{r}}|^2 = \frac{1}{2}(\cos(t) - 2)^2$$

$$s = \int_0^{2\pi} |\dot{\vec{r}}| dt = 2\sqrt{2}\pi$$

21. α) Αυτοκίνητο εκτελεί κυκλική στροφή ακτίνας R σε επίπεδο δρόμο με συντελεστή τριβής μ. Να βρεθεί η μέγιστη επιτρεπτή ταχύτητα $\vec{v}$ ώστε να μην ολισθαίνει.

    β) Να θρεθεί η γωνία κλίσης που θα έπρεπε να έχει η ανωτέρω στροφή του δρόμου ως προς το οριζόντιο έδαφος ώστε να μην απαιτείται καθόλου τριβή για την ομαλή κυκλική κίνηση του αυτοκινήτου.

22. *Προαιρετική.* Για τους ορισμούς βλ Διανυσματικός Λογισμός κεφ. 2
    Ένα ιδιαίτερα χρήσιμο σύστημα συντεταγμένων θεωρείται αυτό που είναι "προσδεμένο" στο κινητό και καθορίζεται ως το τρισορθογώνιο σύστημα που σχηματίζουν τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ ($\vec{T}$ εφαπτόμενο της καμπύλης τροχιάς, $\vec{N}$ κατά τη διεθυνση της ακτίνας του εφαπτόμενου κύκλου στη τροχιά και $\vec{B}$ κάθετο στο επίπεδο αυτής των $\vec{T}, \vec{N}$.)
    Η ταχύτητα και επιτάχυνση στο ανωτέρω σύστημα δίδονται από

    $$\vec{v} = \dot{s}\,\vec{T},\ \dot{\vec{v}} = a_t\vec{T} + a_n\vec{N}$$

    όπου οι συνιστώσες a_n, a_t δίδονται στο κεφ. 2 του ιδίου βιβλίου.

    Επαναλάβετε το δεύτερο μέρος της άσκησης 1 για την περίπτωση που η καμπυλότητα της στροφής καθορίζεται από την επίπεδη καμπύλη $y = x^2$. (*Αρ.* $\tan\phi = 2v^2/(g(1+4x^2)^{3/2})$.

23. Βρίσκεστε καθισμέν-ος (-η) σε κάθισμα τροχού ακτίνας R του λούνα-παρκ που περιστρέφεται με σταθερού μέτρου ταχύτητα v. Που αισθάνεσθε τη μεγαλύτερη (μικρότερη) πίεση από το κάθισμα και γιατί; Σε ποιό σημείο και για ποιά v αυτή μηδενίζεται;

24. Πλοίο A προσεγγίζει κάθετα στον λιμένα με σταθερή ταχύτητα ενώ ένα δεύτερο B απομακρύνεται απο τον λιμένα κατά γωνία ϕ με ταχύτητα που έχει σταθερό λόγο r ώς προς αυτή του πρώτου. Δείξτε ότι τη χρονική στιγμή που έχουν την ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους ο λόγος των αποστάσεών τους από το λιμένα είναι

    $$\frac{s_A}{s_B} = \frac{r + \cos\phi}{1 + r\cos\phi}$$

25. Σημειακή μάζα m υπόκειται σε περίεργη δύναμη που προξενεί ταχύτητα της οποίας οι συνιστώσες σε πολικές συντεταγμένες γράφονται

    $$v_r = 2ab\phi,\ \ v_\phi = a\,r$$

    a, b σταθερές. Να γραφεί η δύναμη σε πολικές συντεταγμένες. Να προσδιοριστεί η εξίσωση της τροχιάς του σώματος.

26. Μικρό βλήμα μάζας m v_0 εκτοξεύεται υπό γωνία από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου C που σχηματίζει γωνία $0 < \phi_0 < \frac{\pi}{2}$ με τον ορίζοντα. Να δειχθεί ότι η μέγιστη δυνατή απόσταση μετρούμενη επί του C που μπορεί να επιτευχθεί είναι

$$\ell = \frac{v_0^2}{g(1 + \sin \phi_0)}$$

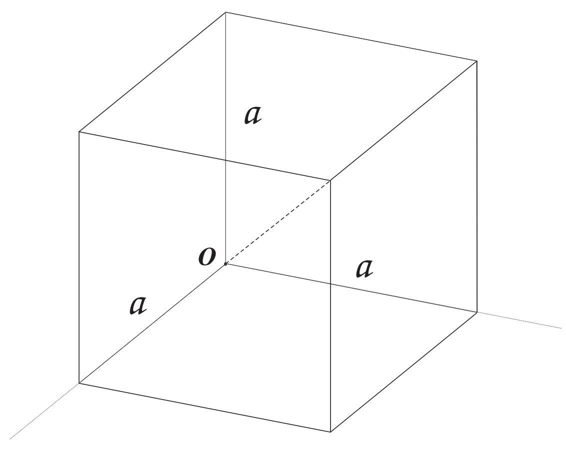
Να βρεθεί η γωνία εκτόξευσης ϕ ως συνάρτηση της ϕ_0.

2.3 Κεντρομόλος και επιτρόχια επιτάχυνση

Στα προηγούμενα μελετήσαμε διάφορες μορφές κίνησης και ανάλογα με τις συμμετρίες κάναμε χρήση ανάλογων συστημάτων συντεταγμένων. Για παράδειγμα, στην μελέτη των πλανητών είδαμε ότι η κίνηση είναι διδιάστατη και η ανάλυση διευκολύνεται σημαντικά στις πολικές. Στις περίπλοκες περιπτώσεις η επιτάχυνση και η δύναμη έχουν τρεις συντεταγμένες είτε κάνουμε χρήση των καρτεσιανών ή των καμπυλογράμων συντεταγμένων όπως οι σφαιρικές και κυλινδικές. Στο παρόν εδάφιο θα μελετήσουμε μια ξεχωριστή περίπτωση συστήματος όπου ακόμη και προβλήματα κίνησης τριων διαστάσεων μελετώνται σχετικά απλά, ως διδιάστατα.

Ας θεωρήσουμε τροχιά σωματιδίου στον τρισδιάστατο χώρο με διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)$ και ταχύτητα $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Το διάστημα που διανύει σε χρόνο t

$$s(t) = \int_0^t |\vec{v}(t')|\, dt' \; = \; \int_0^t \left| \frac{d\vec{r}}{dt'} \right| dt' \tag{2.51}$$



ενώ παραγωγίζοντας λαμβάνουμε

$$\dot{s} = \frac{ds(t)}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt'}\right| \equiv v(t) \tag{2.52}$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση της ταχύτητας ευρίσκεται διαιρώντας την με το μέτρο αυτής, ήτοι

$$\hat{e}_t = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt'}\right|} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\frac{ds(t)}{dt}} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

και

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{s}\hat{e}_t$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \hat{e}_t &= \frac{d\vec{r}}{ds} \\ \vec{v} &= \dot{s}\hat{e}_t \end{aligned} \tag{2.53}$$

Επειδή το $\hat{e}_t$ έχει σταθερό (μοναδιαίο) μέτρο, ισχύει $\hat{e}_t \cdot \frac{d\hat{e}_t}{ds}$ δηλαδή η παράγωγός του είναι κάθετη σ' αυτό. Ορίζουμε την κάθετη αυτή κατεύθυνση με ένα νέο μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{e}_n$ και γράφουμε

$$\frac{d\hat{e}_t}{ds} = k\,\hat{e}_n \tag{2.54}$$

όπου η θετική σταθερά k ονομάζεται καμπυλότητα. Αν θεωρήσουμε τον εφαπτόμενο κύκλο στο εκάστοτε σημείο της καμπύλης, εύκολα δείχνεται ότι η ακτίνατου ρ δίδεται από

$$k = \frac{1}{\rho}$$

Με την παραπάνω διαδικασία έχουμε ορίσει δύο κάθετα μεταξύ τους μοναδιαία διανύσματα που συνοδεύουν το κινητό σε κάθε σημείο της καμπύλης. Λαμβάνοντας το εξωτερικό τους γινόμενο, ορίζουμε ένα τρίτο

$$\hat{e}_b = \hat{e}_t \times \hat{e}_n$$

όπου $\hat{e}_b$ είναι κάθετο στα δυο και συνεπώς τα τρία αυτά μοναδιαία διανύσματα ορίζουν ένα τρισορθογώνιο σύστημα προσαρτημένο στο σωμάτιο για κάθε σημείο της τροχιάς του.

Κατά τα γνωστά, ισχύει $\hat{e}_b \cdot \frac{d\hat{e}_b}{ds}$ και επομένως η παράγωγός του είναι κάθετη σε αυτό.

$$\frac{d\hat{e}_b}{ds} \perp \hat{e}_b$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση ορισμού του

$$\frac{d\hat{e}_b}{ds} = \frac{d}{ds}(\hat{e}_t \times \hat{e}_n) = \hat{e}_t \times \frac{d\hat{e}_n}{ds}$$

Από αυτή προκύπτει ότι το $\frac{d\hat{e}_b}{ds}$ είναι κάθετο στο $\hat{e}_t$, ενώ ήδοι γνωρίζουμε ότι είναι επίσης κάθετο στο $\hat{e}_b$. Επομένως είναι παράλληλο στο εξωτερικό γινόμενό τους $\hat{e}_t \times \hat{e}_b$ ή το $\hat{e}_n$. Γράφουμε τότε

$$\frac{d\hat{e}_b}{ds} = -\tau\,\hat{e}_n \tag{2.55}$$

όπου η σταθερά αναλογίας τ καλείται στρέψη της καμπύλης. Σημειώνουμε ότι αναλόγως προκύπτει και μιά ακόμη σημαντική σχέση

$$\frac{d\hat{e}_n}{ds} \;=\; -k\,\hat{e}_t + \tau\,\hat{e}_b \tag{2.56}$$

Οι (2.54,2.55,2.56) καλούνται τύποι του Frenet.

2.3.1 Επιτάχυνση

Από φυσική σκοπιά, στο ανωτέρω σύστημα συντεταγμένων ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν οι μαθηματικές εκφράσεις της δύναμης και της επιτάχυνσης. Από την παραγώγιση της ταχύτητας έχουμε

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\,\hat{e}_t)\\ &= \ddot{s}\,\hat{e}_t + \dot{s}\frac{d}{dt}\hat{e}_t\\ &= \ddot{s}\,\hat{e}_t + \dot{s}\frac{ds}{dt}\frac{d}{ds}\hat{e}_t\\ &= \ddot{s}\,\hat{e}_t + \dot{s}^2\,k\hat{e}_n\\ &= \ddot{s}\,\hat{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{e}_n\end{aligned} \tag{2.57}$$

δηλαδή, στο εν λόγω σύστημα η επιτάχυνση αναλύεται σε δύο συνιστώσες, την εκάστοτε εφαπτομένη στην καμπύλη της κίνησης και την κάθετη σε αυτή

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= a_t\hat{e}_t + a_n\hat{e}_n \\ a_t &= \ddot{s} \\ a_n &= \frac{\dot{s}^2}{\rho}\end{aligned} \tag{2.58}$$

Η εφαπτομένη a_t στην καμπύλη αποτελεί την *επιτρόχια* συνιστώσα και η κάθετη a_n την *κεντρομόλο*. Συμπερασματικά

Στο προσαρτημένο στο σωμάτιο τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων που ορίζεται από τα τρία διανύσματα $(\hat{e}_t, \hat{e}_n, \hat{e}_b)$ η επιτάχυνση έχει μόνο δύο συνιστώσες και το διάνυσμα αυτής ευρίσκεται στο επίπεδο που ορίζουν τα μοναδιαία διανύσματα $(\hat{e}_t, \hat{e}_n)$.

Ο κύκλος ακτίνας ρ είναι ο εφαπτόμενος επί της καμπύλης για το εκάστοτε σημείο που μελετάμε την κίνηση, Αν για δεδομένη περίπτωση συμβαίνει $a_t = \ddot{s} = 0$ τότε υπάρχει μόνο η κάθετη συνιστώσα

$$a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho}$$

δηλαδή η κίνηση είναι κυκλική και περιγράφεται με τις απλές εξισώσεις του προηγουμένου εδαφίου.

Στη συνέχεια, μελετάμε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις που καταδεικνύουν τη σημασία των ορισμών.

1. Υποθέτουμε τροχιά με μηδενική καμπυλότητα, $k = 0$. Τότε,

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = 0 \to \hat{e}_t = \vec{c} \to \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{c} \to \vec{r} = \vec{c}s + \vec{d}$$

όπου $\vec{c}, \vec{d}$ σταθερές της ολοκλήρωσης. Συνεπως η τροχιά περιγράφεται από τη διανυσματική εξίσωση της ευθείας. Η $k = 0$ συνεπάγεται $\rho \to \infty$ δηλαδή τροχιά άπειρης καμπυλότητας.

2. $\tau = 0$.

$$\frac{d\hat{e}_b}{ds} = 0 \to \hat{e}_b = \vec{c}$$

όπου $\vec{c}$ σταθερό διάνυσμα. Η κίνηση λαμβάνει χώρα στο επίπεδο $(\hat{e}_t, \hat{e}_n)$ και επειδή το κάθετο σε αυτή διάνυσμα $\hat{e}_b$ είναι σταθερό, έπεται ότι το επίπεδο της κίνησης είναι επίσης σταθερό, δηλαδή η κίνηση είναι επίπεδη.

Μπορεί να δειχθεί (βλ. ασκήσεις) ότι η καμπυλότητα και η στρέψη δίδονται από

$$\begin{aligned} k &= \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} \\ \tau &= \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} \cdot \dddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2} \end{aligned} \tag{2.59}$$

Ας θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση επίπεδης τροχιάς

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

ή απαλοίφοντας τον χρόνο $y = y(x)$. Τότε, οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται

$$\begin{aligned} k &= \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{|\dot{x}^2 + \dot{y}^2|^{3/2}} = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}} \\ \tau &= 0 \end{aligned} \tag{2.60}$$

όπου $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dx}$ κ.ο.κ.

Στις πολικές συντεταγμένες

$$k = \frac{|r^2 + 2\dot{r}^2 - 2r\ddot{r}|}{(r^2 + \dot{r}^2)^{3/2}}$$

3. *Άσκηση.* Θα αποδειχθεί η (2.60). Στις δύο διαστάσεις το διάνυσμα θέσης γράφεται

$$\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο λαμβάνουμε

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} = \dot{x}(\hat{i} + \frac{dy}{dx}\hat{j})$$

Θέτοντας $y' = \frac{dy}{dx}$ έχουμε

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}(\hat{i} + y'\hat{j})$$

Αναλόγως εργαζόμαστε για τη δεύτερη παράγωγο του διανύσματος θέσης ως προς το χρόνο και λαμβάνουμε

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{i} + (y' + \dot{x}^2 y'')\hat{j}$$

Υπολογίζουμε στη συνέχεια το εξωτερικό γινόμενο

$$|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}| = |\dot{x}^3 y''|$$

ενώ

$$|\dot{\vec{r}}|^3 = |\dot{x}|^3 (1 + (y')^2)^{3/2}$$

Αντικαθιστούμε στον γενικό τύπο της καμπυλότητας και προκύπτει η (2.60).

4. Αυτοκινητόδρομος έχει εξίσωση τροχιάς $y = x^2$. Να βρεθεί η απαιτούμενη κλίση του ώστε κινητό που κινείται με σταθερή ταχύτητα v_0 να δέχεται μόνο κάθετη αντίδραση από το έδαφος.

   Στο σχήμα δείχνεται η καμπύλη τροχιά και οι δυνάμεις που αρκούνται στο κινητό. Σύμφωνα με την άσκηση, η αντίδραση $\vec{N}$ του εδάφους παραμένει κάθετη στο όχημα καθ' όλη την κίνησή του με σταθερή ταχύτητα. Επομέμως η εκάστοτε προβολή της στην κατακόρυφη πρέπει να εξουδετερώνει το βάρος του οχήματος, ενώ η παράλληλη συνιστώσα στο έδαφος είναι η κεντρομόλος.

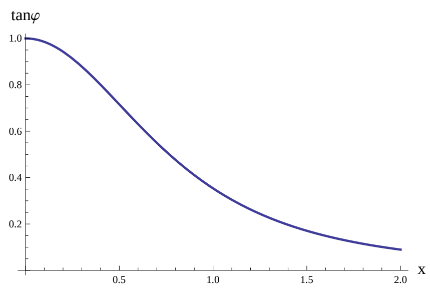
$$N_\perp = N \cos\phi = mg \tag{2.61}$$
$$N_{||} = N \sin\phi \tag{2.62}$$

   Η επιτάχυνση του συστήματος στο σύστημα συντεταγμένων που εισαγάγαμε είναι

$$\vec{a} = a_t \hat{e}_t + a_n \hat{e}_n \tag{2.63}$$

   όπου $\hat{e}_t$ ορίζει την κατεύθυνση κατά μήκος της εφαπτομένης (επιτρόχια επιτάχυνση) και $\hat{e}_n$ της κεντρομόλου. Άρα

$$F_n = m a_n = m \frac{v_0^2}{\rho} = m k v_0^2$$



Σχήμα 2.8: Η καμπύλη δείχνει τη μεταβολή της εφαπτομένης της γωνίας για την απαιτούμενη κλίση του δρόμου $y = x^2$ ως συνάρτηση της απόστασης x.

όπου k η καμπυλότητα που για τη δεδομένη κίνηση δίδεται

$$k = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$$

Από το σχήμα συνάγουμε ότι η εφαπτομένη της γωνίας είναι ο λόγος $\tan\phi = F_n/B$ άρα

$$\tan\phi = \frac{2v_0^2}{g(1+4x^2)^{3/2}}$$

Στο σχήμα δείχνεται η μεταβολή της γωνίας ως προς την απόσταση x.