Γεωργίου Κ. Λεοντάρη
Καθηγητή Θεωρητικής Φυσικής

Παραδόσεις Κλασικής Μηχανικής

Τμήμα Φυσικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Ιωάννινα 2014

Κεφάλαιο 3

Έργο Ενέργεια

Θα εισαγάγουμε ένα διαφορετικό τρόπο πρόβλεψης της κίνησης μηχανικού συστήματος στο οποίο επιδρούν γνωστές δυνάμεις. Η μελέτη αυτή θα οδηγήσει στις θεμελιώδεις έννοιες του Έργου και Ενέργειας και την αρχή διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας.

Κατ' αρχάς θα ήταν λογικό να θεωρήσουμε ότι οι νόμοι του Newton επαρκούν να περιγράψουν τα φαινόμενα σε πεδία δυνάμεων όπως η βαρύτητα κλπ. Αρκεί να λυθεί η εξίσωση $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ εφόσον η δύναμη είναι γνωστή ως συνάρτηση του χρόνου. Όμως στις περισσότερες περιπτώσεις η δύναμη είναι συνάρτηση της θέσης ή και της ταχύτητας $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$, $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{v})$ ή και άλλων παραμέτρων. Επιπλέον, από φυσική σκοπιά είναι πολλές φορές χρήσιμο να γνωρίζουμε ιδιότητες του φυσικού μας συστήματος που σχετίζονται με υπάρχουσες συμμετρίες και οι οποίες οδηγούν σε νόμους διατήρησης. Θα αρχίσουμε τη μελέτη με την εξάρτηση της δύναμης από τη θέση.

3.1 Κίνηση σε μιά διάσταση

Θα αρχίσουμε με την απλή περίπτωση μιας διάστασης. Ας υποθέσουμε κίνηση κατά τον άξονα x υπό την επίδραση δύναμης που εξαρτάται από τη θέση του κινητού

$$F = F(x) \tag{3.1}$$

Η εξίσωση κίνησης

$$m\frac{dv}{dt} = F(x)$$

ενώ κάνοντας χρήση της $\frac{d}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = v\frac{dv}{dx}$ γράφεται

$$vdv = F(x)dx$$

Ολοκληρώνουμε

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{x_0}^{x} F(x')dx'$$

Συμβολίζουμε την κινητική ενέργεια

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

ενώ το ολοκλήρωμα της δύναμης

$$W_{x_0 \to x} = \int_{x_0}^{x} F(x)dx$$

καλούμε έργο της ασκούμενης δύναμης. Επομένως η σχέση γράφεται

$$K - K_0 = W_{x_0 \to x}$$

Γενικά, μεταξύ δύο θέσεων x_1, x_2 επί του x

$$K_2 - K_1 = W_{x_1 \to x_2} \tag{3.2}$$

η ασκούμενη δύναμη μεταβάλλει την κινητική κατάσταση του συστήματος.

Στη μονοδιάστατη κίνηση επί του άξονα x υπάρχει μόνο ένας τρόπος να πάμε από το σημείο αναφοράς x_0 σε κάποιο σημείο x. Εκ του ολοκληρώματος της δύναμης (3.1) ορίζουμε τότε τη συνάρτηση

$$V(x) = -\int_{0}^{x} F(x')dx' \tag{3.3}$$

Μπορούμε τότε να γράψουμε το ολοκλήρωμα μεταξύ δύο θέσεων x_1, x_2 επί του x

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} F(x)dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x)dx = V(x_1) - V(x_2)$$

Τότε η (3.2) γράφεται

$$K_2 - K_1 = V_1 - V_2$$

ή

$$K_1 + V_1 = K_2 + V_2 \tag{3.4}$$

Η τελευταία εκφράζει την αρχή διατήρησης της ενέργειας η οποία είναι το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας του σώματος. Στη μονοδιάστατη κίνηση μπορούμε πάντα να γράψουμε μια συνάρτηση για τη δυναμική ενέργεια και η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας παίρνει τη μορφή

$$E = K + V(x) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

Εφαρμογή.

Ως απλή εφαρμογή των ανωτέρω, θεωρούμε κατακόρυφη βολή σώματος που υφίσταται μόνο τη δύναμη της βαρύτητας. Θεωρούμε κατακόρυφο άξονα z ενώ η βαρύτητα σε σώμα m ασκεί $\vec{F} = -mg\hat{k}$. Μεταξύ δύο θέσεων $z_0 < z_1$ η μεταβολή της κινητικής του ενέργειας δίδεται από

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\int_{z_0}^{z_1} mgdz = mg(z_0 - z_1)$$

Το σώμα ανέρχεται στο μέγιστο ύψος $z_1 - z_0 = h$ όταν $v_1 = 0$, δηλαδή

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

3.2 3 διαστάσεις

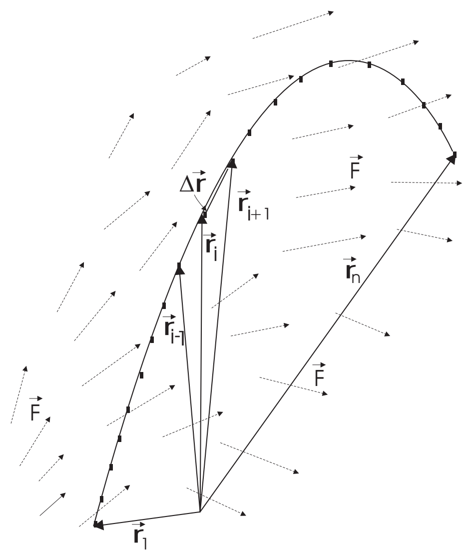
Στα ρεαλιστικά προβλήματα μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός του έργου μεταβλητής δύναμης που ενεργεί σε σωμάτιο κινούμενο σε καμπύλη τρισδιάστατη τροχιά. Έστω λοιπόν ότι η $\vec{F}(\vec{r})$ παριστά δύναμη σε χώρο όπου κινείται σώμα σε καμπύλη τροχιά $\vec{c} = \vec{r}(t)$. Διαιρούμε την καμπύλη σε n μικρά τμήματα όπως φαίνεται στο σχήμα (3.1). Τα άκρα του πρώτου τμήματος καθορίζονται από τα διανύσματα θέσης $\vec{r}_{(1)}$, $\vec{r}_{(2)}$ κ.ο.κ.

Για αρκετά μεγάλο αριθμό n κάθε μικρό τμήμα της καμπύλης μπορεί να προσεγγιστεί με έναν αντίστοιχο μικρό ευθύγραμμο τμήμα. Για παράδειγμα, το τμήμα $\Delta s_{i,i+1}$της καμπύλης ανάμεσα στα $\vec{r}_{(i)}$ και $\vec{r}_{(i+1)}$ προσεγγίζουμε με το $\Delta\vec{r}_{(i)} = \vec{r}_{(i+1)} - \vec{r}_{(i)}$. Για το τμήμα $\Delta\vec{r}_{(i)}$ το έργο είναι $\vec{F}(\vec{r}_{(i)}) \cdot \Delta\vec{r}_{(i)}$, άρα για όλη την καμπύλη θα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &\approx \vec{F}(\vec{r}_{(1)}) \cdot \Delta\vec{r}_{(1)} + \vec{F}(\vec{r}_{(2)}) \cdot \Delta\vec{r}_{(2)} + \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \vec{F}(\vec{r}_{(i)}) \cdot \Delta\vec{r}_{(i)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Στο όριο $n \to \infty$, ορίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \vec{F}(\vec{r}_{(i)}) \cdot \Delta\vec{r}_{(i)} \equiv \int_c \vec{F} \cdot d\,\vec{r} \tag{3.6}$$



Σχήμα 3.1: *Σχηματική αναπαράσταση του διανυσματικού πεδίου* $\vec{F}$ *και της καμπύλης* $\vec{c} = \vec{r}(t)$.

Επομένως, στο φυσικό παράδειγμα που επιλέξαμε, διαπιστώνουμε ότι το έργο αντιστοιχεί στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\mathcal{W} \;=\; \int_c \vec{F} \cdot d\,\vec{r}. \tag{3.7}$$

Εάν η εξίσωση καμπύλης εκφράζεται ως προς παράμετρο t, δηλαδή $\vec{c} = \vec{r}(t)$, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_c \vec{F} \cdot d\,\vec{r} \;=\; \int_{t_1}^{t_n} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\,\vec{r}}{dt}\,d\,t = \int_{t_1}^{t_n} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{v}\,dt \tag{3.8}$$

όπου t_1 και t_n είναι οι τιμές της παραμέτρου για το αρχικό και το τελικό σημείο του τμήματος της καμπύλης που υπολογίζεται το ολοκλήρωμα. Σημειώνουμε ότι το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης αλλάζει πρόσημο όταν αντιστρέψουμε την φορά ολοκλήρωσης, άρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (3.6) απαιτεί την γνώση του προσανατολισμού της καμπύλης $\vec{c}$.

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια την εξίσωση κίνησης

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(\vec{r})$$

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με $d\vec{r}$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r}=\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

ενώ αντικαθιστώντας στο πρώτο μέλος το $d\vec{r}=\vec{v}dt$ λαμβάνουμε

$$m\,d\vec{v}\cdot\vec{v}=\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

Ολοκληρώνουμε μεταξύ δύο σημείων της τροχιάς P_1, P_2 και λαμβάνουμε

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}_2|^2-\frac{1}{2}m|\vec{v}_1|^2=\int_{P_1}^{P_2}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \tag{3.9}$$

Το ολοκλήρωμα στο δεύτερο μέλος είναι το έργο της δύναμης από τη θέση P_1 στη P_2

$$W_{1\to 2}=\int_{P_1}^{P_2}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \tag{3.10}$$

Συμβολίζουμε την κινητική ενέργεια

$$K=\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$$

Τότε,

$$K_2-K_1=\int_1^2\vec{F}\cdot d\vec{r}=W_{1\to 2} \tag{3.11}$$

δηλαδή η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ισούται με το έργο της $\vec{F}$ που ασκείται στο σύστημα.

3.2.1 Παραδείγματα

1. *Άσκηση.* Σφαιρίδιο μάζας m είναι αναρτημένο στο άκρο αβαρούς ράβδου μήκους ℓ η οποία δύναται να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από το άλλο άκρο της. Το σύστημα αφήνεται ελεύθερο από γωνία ϕ_0 (βλ. σχήμα). Να μελετηθεί η κίνηση.

   Σε τυχαία γωνία ασκούνται η δύναμη του βάρους $\vec{B}=m\vec{g}$ και η αντίδραση $\vec{N}$ κατά μήκος της ράβδου. Η κίνηση είναι κυκλική καθότι υφίσταται περιορισμό από τη ράβδο. Για τη δοθείσα διάταξη τις πολικές συντεταγμένες $r=\ell$ και άρα $dr=0$, επομένως

   $$d\vec{r}=\hat{e}_r dr+\hat{e}_\phi r d\phi=\hat{e}\phi\ell d\phi$$

Η $\vec{N}$ είναι κάθετη στην κίνηση, $\vec{N}\cdot d\vec{r}=0$ και επομένως δεν παράγει έργο. Άρα

$$W=\int\vec{B}\cdot d\vec{r}$$

Από το σχήμα $\vec{g}\cdot d\vec{r}=\vec{g}\cdot\hat{e}_\phi\ell\,d\phi=g\ell\cos(\phi-\frac{\pi}{2})$ Αντικαθισμτούμε

$$W=mg\ell\int_{\phi_0}^{\phi}\sin\phi d\phi=mg\ell(\cos\phi_0-\cos\phi)$$

Από το θεώρημα ενέργειας-έργου και την αρχική συνθήκη $v_0=0$ έχουμε

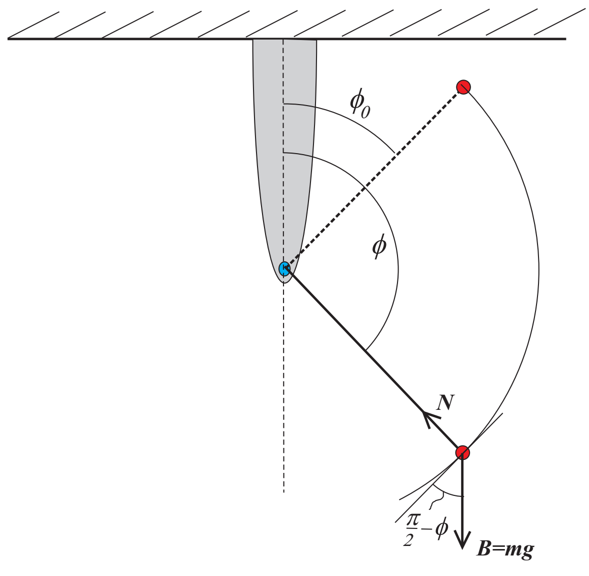
$$\frac{1}{2}mv^2=mg\ell(\cos\phi_0-\cos\phi)$$

άρα

$$v=\sqrt{2mg\ell(\cos\phi_0-\cos\phi)}$$

2. Θα υπολογιστεί το μέγιστο ύψος βλήματος για πλάγια βολή σε μεγάλα ύψη υπό την επίδραση του βαρυτικού πεδίου. Αγνοούνται άλλες δυνάμεις, αντίστασης αέρα κλπ.

   Για μικρά ύψη, έχουμε μελετήσει την πλάγια βολή θεωρώντας την επιτάχυνση της βαρύτητας σταθερή. Στην παρούσα περίπτωση η επιτάχυνση



Σχήμα 3.2: ....

της βαρύτητας δεν μπορεί πλέον να θεωρηθεί σταθερή. Είναι χρήσιμο να εργαστούμε στις πολικές συντεταγμένες θεωρώτας ότι το μοναδιαίο $\hat{e}_r$ έχει την κατεύθυνση της ακτίνας της Γης. Στο σύστημα αυτό οι συνιστώσες της αρχικής ταχύτητας συμβολίζονται

$$\vec{v}_0 = v_{0r}\hat{e}_r + v_{0\phi}\hat{e}_\phi$$

ενώ σε τυχαίο σημείο της τροχιάς γράφουμε $\vec{v} = v_r\hat{e}_r + v_\phi\hat{e}_\phi$.

Στο μέγιστο ύψος η ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας μηδενίζεται, ενώ δεν συμβαίνει το ίδιο για την εφαπτομενική κατά την $\hat{e}_\phi$. Συνεπώς αν $\vec{v}_x$ το διάνυσμα της ταχύτητας στο μέγιστο ύψος, τότε

$$\vec{v}_x = 0\hat{e}_r + v_{\phi_x}\hat{e}_\phi = v_{\phi_x}\hat{e}_\phi$$

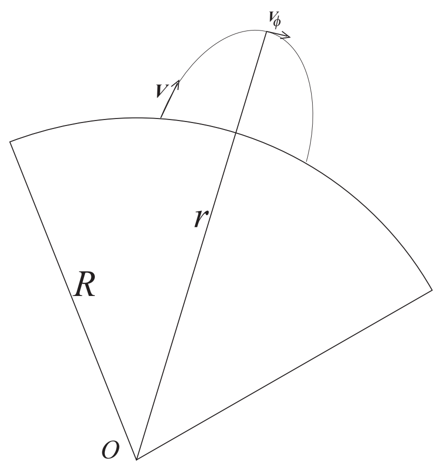
Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της Ενέργειας. Αν K_x είναι η κινητική στο μέγιστο ύψος

$$K_x - K_0 = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

όπου ώς συνήθως $K = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$.

Η μόνη δύναμη που ασκείται είναι η βαρυτική

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{e}_r$$



Σχήμα 3.3: Η τροχιά πλάγιας βολής

ενώ όπως πάντα $d\vec{r} = \hat{e}_r dr + \hat{e}_\phi r d\phi$. Επομένως σχηματίζοντας το εσωτερικό γινόμενο και ολοκληρώνοντας από την επιφάνεια της Γης με ακτίνα R έως τη θέση r

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -GMm \int_R^r \frac{1}{r^2} dr = GMm \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$$

Αντικαθιστούμε στον τύπο διατήρησης της ενέργειας

$$\frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_0|^2 = GMm \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$$

ή απαλοίφοντας τη μάζα του βλήματος και αναδιοργανώνοντας όρους στο δεύτερο μέλος

$$|\vec{v}|^2 - |\vec{v}_0|^2 = 2\frac{GM}{R^2} R \left(\frac{R}{r} - 1 \right) \equiv 2gR \left(\frac{R}{r} - 1 \right)$$

$|\vec{v}_0|^2 = v_{0r}^2 + v_{0\phi}^2$ ενώ στο μέγιστο ύψος $|\vec{v}_x|^2 = v_{\phi_x}^2$, άρα

$$v_{\phi_x}^2 - (v_{0r}^2 + v_{0\phi}^2) = 2gR \left(\frac{R}{r_x} - 1 \right) \tag{3.12}$$

Στην τελευταία εξίσωση υπάρχουν δύο άγνωστοι, το μέγιστο ζητούμενο ύψος r_x και η εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας v_{ϕ_x} στο r_x. Η δύναμη όμως της βαρύτητας είναι κεντρική και η στροφορμή ως προς το κέντρο της Γης διατηρείται. Επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη διατήρηση αυτής για να συνδέσουμε τις ταχύτητες στο αρχικό και τελικό σημείο. Στις πολικές συντεταγμένες η $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m r v_\phi \hat{k}$ όπου $\hat{k}$ το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στα $\hat{e}_r, \hat{e}_\phi$. Στην αρχική θέση έχουμε $r = R$ και στην τελική $r = r_x$ επομένως γράφεται

$$|\vec{L}| = mRv_{0\phi} = m r_x v_\phi$$

από την οποία υπολογίζουμε την v_ϕ

$$v_\phi = \frac{R}{r_x} v_{0\phi} \tag{3.13}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση ενέργειας και έχουμε

$$\frac{R^2}{r_x^2} v_{0\phi}^2 - (v_{0r}^2 + v_{0\phi}^2) = 2gR \left(\frac{R}{r_x} - 1 \right) \tag{3.14}$$

Η τελευταία είναι μαι δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς από το λόγο $\frac{R}{r_x}$ την επίλυση της οποίας προκύπτει το r_x ως συνάρτηση της αρχικής ταχύτητας και των g, R.

Θα δώσουμε την προσεγγιστική λύση για μικρά ύψη h από την επιφάνεια της Γής. Γράφουμε

$$r_x = R + h$$

και

$$\frac{R}{r_x} = \frac{R}{R+h} \approx 1 - \frac{h}{R}, \frac{R^2}{(R+h)^2} \approx 1 - 2\frac{h}{R}$$

Αντικαθιστούμε και λαμβάνουμε

$$h = \frac{v_{0r}^2}{2g} \frac{1}{1 - \frac{v_{0\phi}^2}{gR}}$$

Για κατακόρυφη βολή $v_{0\phi} = 0$ επομένως

$$h = \frac{v_{0r}^2}{2g}$$

που είναι ο γνωστός τύπος.

3.3 Διατηρητικές Δυνάμεις

Ας θεωρήσουμε τη δύναμη

$$\vec{F} = y\hat{\imath} + ax\hat{\jmath}$$

Ζητούμε τον υπολογισμό του έργου από το σημείο $(0,0)$ στο σημείο $(1,1)$ για δύο διαφορετικές διαδρομές.
Η πρώτη κατά τη διαγώνιο του θετικού τεταρτημόριου (xy)
η δεύτερη στην κατά τμήματα ευθεία πρώτα κατά τον άξονα $x : (0,0) \to (1,0)$ και παράλληλα στον $y : (1,0) \to (1,1)$.

Λύση

Κατά τη διαγώνιο, είναι $x = y$ και επομένως

$$x = y \to dx = dy,\ d\vec{r} = \hat{\imath}dx + \hat{\jmath}dy = (\hat{\imath} + \hat{\jmath})dx$$

ενώ η δύναμη γράφεται

$$\vec{F} = x(\hat{\imath} + a\hat{\jmath})$$

Το έργο είναι

$$W_{O\to A}(C_1) = \int_0^1 x(\hat{\imath} + a\hat{\jmath}) \cdot (\hat{\imath} + \hat{\jmath})dx = \frac{1+a}{2}$$

Στη δεύτερη διαδρομή, κατά μήκος του πρώτου τμήματος είναι

$$y = 0, dy = 0 \to F \cdot d\vec{r} = 0$$

άρα το έργο σε αυτό το τμήμα είναι μηδέν. Στο δεύτερο τμήμα είναι

$$x = 1 \to dx = 0,\ \vec{dr} = \hat{\jmath}dy$$

$$\vec{F} = y\hat{\imath} + a\hat{\jmath} \to W_{O\to A}(C_2) = a\int_0^1 dy = a$$

δηλαδή το έργο είναι διαφορετικό στις δύο διαδρομές

$$W_{O\to A}(C_1) \neq W_{O\to A}(C_2)$$

εκτός και άν η σταθερά λάβει την ειδική τιμή $a = 1$.

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι για κίνηση σε περισσότερες από μία διαστάσεις, υπάρχουν πολλοί τρόποι να πάμε από το αρχικό σημείο στο τελικό και το έργο της δύναμης για κάθε επιλογή διαδρομής είναι εν γένει διαφορετικό.

Υπάρχουν κάποιες προϋποθέσεις που το έργο θα ήταν ανεξάρτητο από τον τρόπο που μεταβαίνουμε από το αρχικό στο τελικό σημείο; Στο τελευταίο παράδειγμα είδαμε ότι για κατάλληλη επιλογή της σταθεράς a το έργο είναι ανεξάρτητο από το ποιό από τα δύο μονοπάτια ακολουθούμε. Αν υπολογίσουμε το έργο σε κάθε άλλη διαδρομή με κοινό αρχικό και τελικό σημείο, θα διαπιστώσουμε ότι για την $\vec{F} = y\hat{i} + x\hat{j}$ το έργο είναι πάντα το ίδιο. Από τα παραπάνω, καταλλήγουμε στον ακόλουθο ορισμό

Αν το έργο ασκούμενης δύναμης $\vec{F}$ σε σωμάτιο είναι ανεξάρτητο της διαδρομής και εξαρτάται μόνο από το αρχικό και τελικό σημείο, τότε η δύναμη καλείται διατηρητική.

$\vec{F}$ **διατηρητική** $\rightarrow W$ **ανεξάρτητο της διαδρομής**

Εφόσον η δύναμη είναι διατηρητική, το έργο είναι ανεξάρτητο της διαδρομής, συμπεραίνουμε ότι -όπως και στη μιά διάσταση- μπορούμε να ορίσουμε μια βαθμωτή συνάρτηση της οποίας η διαφορά σε δύο δεδομένα σημεία μας δίδει το έργο της δύναμης ανεξάρτητα από τη διαδρομή που ακολούθησε το σωμάτιο. Ορίζουμε ως συνάρτηση δυναμικού

$$U(r) \quad = \quad -\int_{r_0}^{r} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{3.15}$$

όπου r_0 σημείο αναφοράς και r η εκάστοτε θέση του σωματίου επί της τροχιάς. Για δύο σημεία της τροχιάς r_1, r_2 είναι

$$U(r_1) - U(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Συνδυάζοντας με το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας

$$U(r_1) - U(r_2) = K_2 - K_1 \tag{3.16}$$

Αναδιοργανώνοντας τους όρους και γράφοντας $U(r_i) = U_i$ για συντομία, παίρνουμε

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \tag{3.17}$$

Η τελευταία συνεπάγεται ότι για διατηρητική δύναμη ασκούμενη στο σύστημά μας το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας παραμένει σταθερό κατά την κίνηση

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + U \tag{3.18}$$

Ισοδύναμα, έστω ότι εξωτερική δύναμη $\vec{F}_{\epsilon\xi}$ που ασκείται στο σώμα είναι διατηρητική. Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα αυτής συμβολίζει το έργο και είναι ανεξάρτητο του δρόμου. Πράγματι, εφόσον το αποτέλεσμα εξαρτάται μόνο από την αρχή και το τέλος της διαδρομής, εάν το σωμάτιο στη συνέχεια εκτελέσει κίνηση από το σημείο P_2 και καταλήξει πάλι στο αρχικό σημείο P_1 από οποιαδήποτε διαδρομή, τότε το συνολικό έργο της διατηρητικής δύναμης είναι μηδέν. Συμβολικά γράφουμε

$$\oint \vec{F}_{\epsilon\xi} \cdot d\vec{r} \;=\; 0 \tag{3.19}$$

Η απόδειξη της είναι εξαιρετικά απλή: το κλειστό ολοκλήρωμα χωρίζεται σε δύο μέρη, με καμπύλες ολοκλήρωσης c_a και c_b και κατεύθυνση $P_{1\to 2}$ και $P_{2\to 1}$ αντίστοιχα (βλέπε 3.4),

$$\oint \vec{F}_{\epsilon\xi} \cdot d\vec{r} \;=\; \int_{c_a, P_{1\to 2}} \vec{F}_{\epsilon\xi} \cdot d\vec{r} + \int_{c_b, P_{2\to 1}} \vec{F}_{\epsilon\xi} \cdot d\vec{r} \tag{3.20}$$

Στο δεύτερο μέλος, το δεύτερο ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_{c_b P_{2\to 1}} \vec{F}_{\epsilon\xi} \cdot d\vec{r} \;=\; -\int_{c_b, P_{1\to 2}} \vec{F}_{\epsilon\xi} \cdot d\vec{r} \tag{3.21}$$

όμως για διατηρητικά πεδία το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της καμπύλης, επομένως

$$\int_{c_b, P_{1\to 2}} \vec{F}_{\epsilon\xi} \cdot d\vec{r} \;=\; \int_{c_a, P_{1\to 2}} \vec{F}_{\epsilon\xi} \cdot d\vec{r} \tag{3.22}$$

το οποίο αν αντικατασταθεί στην (3.20) αποδεικνύει ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διατηρητικής δύναμης σε κλειστή καμπύλη είναι μηδέν.

Φυσικά, δεν είναι όλες οι δυνάμεις διατηρητικές. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα, τη δύναμη της τριβής $\vec{f}$ σε μετακίνηση αντικειμένου m πάνω σε οριζόντια επιφάνεια. Η δύναμη αυτή είναι σταθερή και αντίθετη στην κίνηση $\vec{f} = -\mu m g$ και το έργο της

$$W = -\mu m g \ell$$

όπου ℓ το μήκος της διαδρομής. Συνεπώς το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα αυτής σε κλειστή διαδρομή είναι μη-μηδενικό. Στο συγκεκριμένο σύστημα που μελετήσαμε δεν συμπεριλάβαμε τέτοιες δυνάμεις.

3.3.1 Η Συνάρτηση Δυναμικής Ενέργειας

Στις διατηρητικές δυνάμεις, είδαμε ότι μπορούμε να ορίσουμε συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(\vec{r})$ επιλέγοντας ένα σημείο $\vec{r}_0$ όπου ορίζεται η $\vec{F}$. Επιλέγουμε

Σχήμα 3.4: *Το έργο της διατηρητικής δύναμης είναι ανεξάρτητο της διαδρομής. Εξαρτάται μόνο από το αρχικό και τελικό σημείο μέσω της βαθμωτής συνάρτησης δυναμικής ενέργειας $\mathcal{U}$. Στο δεύτερο σχήμα δείχνεται μια κλειστή διαδρομή. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της διατηρητικής δύναμης είναι μηδέν σε κάθε κλειστή διαδρομή.*

οποιαδήποτε ομαλή καμπύλη από το δεδομένο σημείο $\vec{r}_0$ έως το τυχαίο σημείο $\vec{r}$ και γράφουμε

$$U(\vec{r}) \;=\; -\int_{r_0}^{r} \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{3.23}$$

Παίρνοντας την παράγωγο της τελευταίας παρατηρούμε ότι

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r}) \tag{3.24}$$

Δηλαδή, η δύναμη είναι η κλίση (gradient) της βαθμωτής συνάρτησης $-U(\vec{r})$. Άρα εάν έχουμε τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας, η δύναμη προκύπτει απλά.

Ας θεωρήσουμε την κλασσική περίπτωση της βαρυτικής δύναμης.

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{e}_r \tag{3.25}$$

Η δύναμη αυτή είναι κεντρική και η ολοκλήρωση αυτής σε καμπύλη τροχιά μεταξύ δύο σημείων όπως έχουμε ήδη δεί σε παράδειγμα, δίδει

$$U(\vec{r}) = \int_0^r \vec{F}\cdot d\vec{r} = GMm\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \tag{3.26}$$

όπου r_0 το σημείο αναφοράς που στην περίπτωση αυτή επιλέγουμε $r_0 = \infty$. Παρατηρούμε επίσης, ότι η U εξαρτάται μόνο από το μέτρο της θέσης $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, επομένως γράφουμε

$$U(r) = -G\frac{Mm}{r} \tag{3.27}$$

Ας σταθούμε λίγο στη βαθμωτή συνάρτηση $U(r)$. Αν ζητήσουμε να λαμβάνει μια σταθερή τιμή έστω $U(r) = -k$, τότε στον τρισδιάστατο χώρο σχηματίζουμε μιά επιφάνεια που στην παρούσα περίπτωση είναι σφαιρική,

$$G\frac{Mm}{r} = k \rightarrow r = \frac{k}{GMm}$$

ή

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2$$

Η επιφάνεια αυτή καλείται ισοδυναμική.

Από τα Μαθηματικά γνωρίζουμε ότι η κλίση $\nabla U(r)$ είναι διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια που ορίζει η συνάρτηση η δε φορά αυτού δείχνει προς το μέγιστο ρυθμό αύξησης της $U(r)$. Συνεπώς, από την $F(\vec{r}) = -\nabla U(r)$ λαμβάνουμε τη μορφή της βαρυτικής δύναμης (3.25) όπως αναμένεται, η οποία έχει αντίθετη φορά, δηλαδή προς τη κατεύθυνση μέγιστης μείωσης της δυναμικής ενέργειας. Αυτό είναι σε συμφωνία με το ότι το σώμα τείνει να κατευθυνθεί προς χαμηλώτερη δυναμική ενέργεια.

Εφαρμογή. Το δυναμικό σε μικρά ύψη από τη Γη.

Για μικρά ύψη $h \ll R$ από τη Γή ως προς την ακτίνα αυτής, R η δυναμική ενέργεια σώματος μετρείται ως προς την επιφάνεια της Γης με το γνωστό τύπο $V = mgh$. Η σχέση προκύπτει από τον γενικό τύπο ως εξής Αν $r = R + h$ η απόσταση του σημείου από το κέντρο της Γης τότε

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R+h} \approx \frac{1}{R}\left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

Τότε, λαμβάνοντας ως σημείο αναφοράς τη Γή

$$V(r) = U(r) - U(R) = -G\frac{Mm}{r} + G\frac{Mm}{R} \approx G\frac{Mm}{R^2}h = mgh$$

3.3.2 Μή διατηρητικές δυνάμεις

Όταν οι δυνάμεις που δρουν σε σωμάτιο δεν είναι όλες διατηρητικές, τότε δεν είναι δυνατό να ορίσουμε συνολικά συνάρτηση δυναμικής ενέργειας. Στην περίπτωση αυτή δεν είναι δυνατή η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας και θα χρειαστεί να τροποποιήσουμε το θεώρημα έργου ενέργειας.

Ας θεωρήσουμε σώμα m στο οποίο δρουν μιά διατηρητική δύναμη $\vec{F}_\delta$ και μιά μή-διατηρητική $\vec{F}_{\mu\delta}$ (π.χ., η τριβή). Συμβολίζουμε το διανυσματικό τους άθροισμα $\vec{F} = \vec{F}_\delta + \vec{F}_{\mu\delta}$ και υπολογίζουμε το έργο μεταξύ δύο σημείων της τροχιάς του σώματος το οποίο ισούται με τη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας, ήτοι

$$\begin{aligned} W_{1\to 2} &= \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_1^2 \vec{F}_\delta \cdot d\vec{r} + \int_1^2 \vec{F}_{\mu\delta} \cdot d\vec{r} \\ &= K_2 - K_1 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Όμως για τη διατηρητική δύναμη υπάρχει συνάρτηση δυναμικού, επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$\int_1^2 \vec{F}_\delta \cdot d\vec{r} = U_1 - U_2$$

Για τη μή διατηρητική δύναμη είναι

$$W_{\mu\delta,1\to 2} = \int_1^2 \vec{F}_{\mu\delta} \cdot d\vec{r}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα

$$\Delta E = K_2 + U_2 - (K_1 + U_1) = W_{\mu\delta,1\to 2} \tag{3.29}$$

το οποίο εκφράζει τη γενίκευση του θεωρήματος έργου-ενέργειας παρουσία μή διατηρητικών δυνάμεων. Δηλαδή, η μεταβολή της Μηχανικής Ενέργειας του σώματος ισούται με το έργο των μή διατηρητικών δυνάμεων.

Άσκηση. Να μελετηθεί η κίνηση σώματος (βλ. σχήμα 3.5) σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσης ϕ με αρχική ταχύτητα v_0 και συντελεστή τριβής μ.

Απάντηση. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι το βάρος, η αντίδραση από το έδαφος και η τριβή. Τα μέτρα αυτών είναι

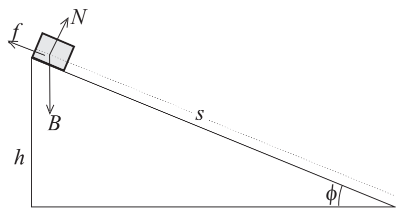
$$\begin{aligned} B &= mg \\ N &= mg\cos\phi \\ f &= \mu N \end{aligned} \tag{3.30}$$

Επειδή η τριβή είναι μη διατηρητική δύναμη θα εφαρμόσουμε το γενικό θεώρημα έργου-ενέργειας $\Delta E = W_{\tau\rho.}$. Στην αρχική θέση, η κινητική και δυναμική ενέργεια είναι

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_0^2,\ U_1 = mgh$$

ενώ στην τελική

$$K_2 = \frac{1}{2}mv^2,\ U_2 = 0$$



Σχήμα 3.5: Η τριβή είναι μη διατηρητική δύναμη

Επομένως

$$\Delta E = \Delta(K+U) = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) - mgh$$

Αν s είναι το διάστημα που διανύει το κινητό επι του κεκλιμένου επιπέδου, τότε

$$W_{\tau\rho.} = \int \vec{f}\cdot d\vec{r} = -fs = -\mu mg \cos\phi\, s$$

Από το σχήμα, $s\cos\phi = \ell = h\cot\phi$. Εξισώνουμε $\Delta E = W_{\tau\rho.}$ και λαμβάνουμε

$$v^2 - v_0^2 = 2gh(1 - \mu\cot\phi) \tag{3.31}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις,
$\mu\cot\phi < 1$. Τότε, το κινητό φτάνει στο άκρο του κεκλιμένου επιπέδου με ταχύτητα

$$v^2 = v_0^2 + 2gh(1 - \mu\cot\phi)$$

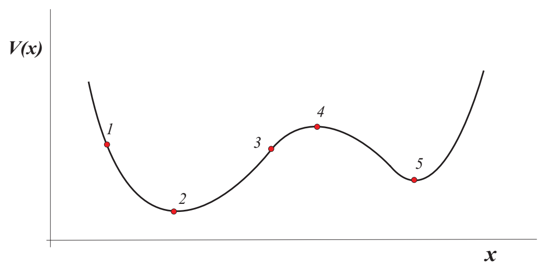
$\mu\cot\phi = 1$. Η ταχύτητα παραμένει σταθερή $v = v_0$.
$\mu\cot\phi > 1$. Η ταχύτητα μειώνεται κατά την ολίσθηση. Υπάρχει μια κρίσιμη τιμή του ύψους για την οποία φτάνει στο άκρο με μηδενική ταχύτητα

$$h_c = \frac{v_0^2}{2g(\mu\cot\phi - 1)}$$

Με τη χρήση αυτής,

$$v^2 = v_0^2\left(1 - \frac{h}{h_c}\right)$$

Για $h < h_c$ εξακολουθεί να έχει μη-μηδενική κινητική ενέγεια στο κάτω άκρο, ενώ για $h > h_c$ θα σταματήσει πριν το άκρο.



Σχήμα 3.6: Σχηματική αναπαράσταση Συνάρτησης Δυναμικής Ενέργειας

3.3.3 Δυναμική Ενέργεια Μονοδιάστατων Συστημάτων

Στην εισαγωγή του κεφαλαίου μελετήσαμε το έργο για τα απλούστερα συστήματα που κινούνται σε ευθεία γραμμή. Διαπιστώσαμε ότι η μόνη συνιστώσα της δύναμης που παράγει έργο είναι κατά μήκος της ευθείας. Αν η ευθεία ταυτιστεί με τον άξονα x

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 F_x dx$$

Είδαμε, ότι η F_x είναι διατηρητική εφόσον 1) εξαρτάται από τη θέση και 2) το έργο είναι ανεξάρτητο της διαδρομής. Όμως, στην περίπτωση του μονοδιάστατου συστήματος, η δεύτερη συνθήκη είναι περιττή, διότι υπάρχει μόνο ένας τρόπος να κινηθεί το σύστημα πάνω σε ευθύγραμμο τμήμα. Τα δύο άκρα του διαστήματος συνδέονται με ένα μοναδικό δρόμο. Αν εξειδικεύσουμε τη σχέση μεταξύ δυναμικής ενέργειας και δύναμης για την περίπτωσή μας έχουμε

$$U(x) = -\int F_x dx \to F_x = -\frac{dU}{dx}$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι χρήσιμο όχι μόνο για τον υπολογισμό της δύναμης, αλλά και για την μελέτη της κίνησης. Για να κάνουμε μια ποιοτική περιγραφή της κίνησης με τη χρήση της $U(x)$ ας υποθέσουμε τη μορφή δυναμικού του σχήματος 3.6. Αν το κινητό ευρίσκεται στα σημεία 1 και 3 θα κινηθεί σε θέσεις χαμηλότερου δυναμικού. Μπορούμε να σκεφτούμε σε αναλογία με σώμα που βρίσκεται στο βαρυτικό πεδίο της Γης. Αν βρίσκεται ψηλά σε ύψος h κεκλιμένης επιφάνειας, ($V = mgh$) θα κινηθεί σε επίπεδα χαμηλότερου δυναμικού.

Στο σημείο 4 έχουμε $U' = 0$ άρα το σύστημα ισορροπεί. Είναι $U' = 0$ και $U'' < 0$ και η ισορροπία είναι ασταθής, καθότι για μικρές μετατοπίσεις από τη θέση αυτή το σώμα δεν επανέρχεται.

Τέλος, στα σημεία 2 και 5, είναι $U' = 0$ και $U'' > 0$ και η ισορροπία σ' αυτά είναι ευσταθής.

Εφόσον το σώμα κινείται, αυτό σημαίνει ότι ευρίσκεται σε περιοχή που η ενέργειά του είναι μεγαλύτερη από τη δυναμική ενέργεια $E > U$. Η κινητική του ενέργεια είναι $K = E - U$. Αν η ενέργεια του σώματος είναι μικρότερη των κορυφών της δυναμικής ενέργειας, τότε το σώμα ευρίσκεται 'παγιδευμένο' και ταλαντώνεται μεταξύ αυτών. Υπάρχουν δυναμικά που επιβάλλουν δέσμια κίνηση και άλλα που απωθούν το σύστημα σε μή πεπερασμένο διάστημα. Η περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή ανήκει στην πρώτη. Καθώς το σώμα απομακρύνεται από το κέντρο, η δύναμη επαναφοράς αυξάνει. Αντίθετα απωστική δύναμη $1/r^2$ έχει δυναμικό $1/r$. Για κάθε ενεργειακή κατάσταση, υπάρχει μια ελάχιστη απόσταση που το σώμα μπορεί να πλησιάσει το κέντρο.

•

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τη δυναμική ενέργεια ενός διατομικού μορίου η οποία περιγράφεται από συνάρτηση της μορφής

$$V(r) = -\frac{a}{r^6} + \frac{b}{r^{12}}$$

όπου r η απόσταση μεταξύ των δύο ατόμων με $0 < r < \infty$. Κάνουμε την παραδοχή ότι το βαρύτερο άτομο παραμένει σταθερό ενώ το ελαφρύτερο ταλαντώνεται. Η μηδενική ενεργειακή κατάσταση του συστήματος επιλέγεται όταν τα δύο άτομα απέχουν άπειρη απόσταση μεταξύ τους. Καθώς $r \to 0$, η συνάρτηση $U \to \infty$, τα άτομα απωθούνται. Το ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας ευρίσκεται θέτοντας την παράγωγο μηδέν και επιλύοντας ως προς r

$$V'(r_0) = 0 \to r_0 = \sqrt[6]{\frac{2a}{b}}$$

με

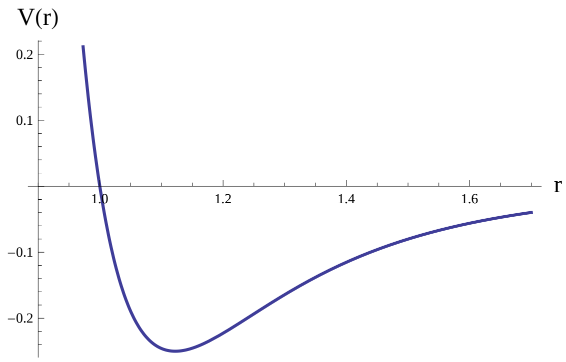
$$V(r_0) = -\frac{a^2}{4b}$$

Στο σχήμα 3.7 αποτυπώνεται η δυναμική ενέργεια του διατομικού μορίου για $a = b = 1$.

Αν η ενέργεια είναι θετική, $E > 0$, τότε το ελαφρύτερο άτομο διαφεύγει στο άπειρο, διότι δεν υπάρχει τιμή του δυναμικού μεγαλύτερη του μηδενός μετά τη r_{min} για την οποία ορίζεται στο $0 < E < U$. Αντίθετα, αν το άτομο προσεγγίζει το βαρύ άτομο από το άπειρο, στο σημείο $E = U$ σταματά και εφόσον δεν υπάρχει απώλεια ενέργειας, επιστρέφει στο άπειρο. Τέλος, αν ισχύει $E < 0$ τότε το άτομο παγιδεύεται μεταξύ δύο ακτίνων r_{min}, r_{max} στις οποίες ιχύει $E = U$. Υπάρχει ένα σημείο ισορροπίας r_0 στο οποίο $U(r_0) = U_{min}$ και είναι το σημείο στο οποίο σχηματίζεται το διατομικό μόριο. Αυτό μπορεί να συμβεί για την περίπτωση που αρχικά άτομο πλησιάσει με $E > 0$, στη συνέχεια υφίσταται απώλεια ενέργειας, π.χ., λόγω εκπομπής φωτονίου, έτσι ώστε $E < 0$.

3.3.4 Καμπύλα "μονοδιάστατα" συστήματα

Επεκτείνοντας την ανάλυση του προηγούμενου εδαφίου, σημειώνουμε ότι υπάρχουν φυσικά συστήματα όπου, παρόλο η κίνηση λαμβάνει χώρα σε περισσότερες από μία διαστάσεις, η μελέτη τους μπορεί να γίνει ακριβώς με τον ίδιο τρόπο των συστημάτων που κινούνται σε ευθεία γραμμή. Η κίνηση αυτών μπορεί να θεωρηθεί μονοδιάστατη καθόσον η θέση τους μπορεί να περιγραφεί από μια και μοναδική παράμετρο. Η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας σε αυτά τα συστήματα είναι ακριβώς όπως στη περίπτωση της ευθύγραμμης κίνησης. Το τρενάκι του λούνα παρκ είναι μια τέτοια περίπτωση. Εξωτερικοί περιορισμοί



Σχήμα 3.7: Συνάρτηση Δυναμικής Ενέργειας του διατομικού μορίου

επιβάλλουν την κίνησή του σε προκαθορισμένη τροχιά. Οι δυνάμεις περιορισμού σε αυτά τα συστήματα δεν παράγουν έργο, αλλά απλά συμβάλλουν στο να είναι η ταχύτητα εφαπτόμενη της τροχιάς.

Στα συστήματα που η κίνησή τους λαμβάνει χώρα πάνω σε συγκεκριμένη τροχιά από δυνάμεις περιορισμού και η κίνηση περιγράφεται μόνο από μιά παράμετρο η οποία συνήθως λαμβάνεται το ίδιο μήκος της τροχιάς s και η κινητική ενέργεια γράφεται $K = \frac{1}{2}m\dot{s}^2$. Η συνολική ασκούμενη δύναμη έχει εν γένει συνιστώσες εφαπτόμενη και κάθετη της τροχιάς $\vec{F} = (F_t, F_n)$. Η κάθετη αποτελεί τη δύναμη περιορισμού ενώ η εφαπτόμενη F_t είναι υπεύθυνη για την κίνηση που προσδίδει στο σώμα. Εφόσον η F_t είναι διατηρητική, τότε ορίζεται συνάρτηση δυναμικού $U = -\int F_t ds$, άρα η συνολοκή μηχανική ενέργεια διατηρείται

$$E = K + U$$

3.3.5 Κεντρικές Δυνάμεις

Μια άλλη μορφή κίνησης η οποία μελετάται με απλό τρόπο σε αναλογία με τα μονοδιάστατα συστήματα οφείλεται στην επίδραση κεντρικών δυνάμεων. Κεντρική δύναμη έχει τη μορφή

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(\vec{r})\,\hat{e}_r \tag{3.32}$$

δηλαδή έχει την κατεύθυνση του διανύσματος θέσης. Ανάλογα με τη μορφή της βαθμωτής συνάρτησης $f(\vec{r})$ η φορά της δύναμης μπορεί να είναι η ίδια ή αντίθετη του $\vec{r}$.

Πολλές θεμελιώδεις δυνάμεις έχουν επιπροσθέτως την ιδιότητα να είναι σφαιρικά συμμετρικές. Στην περίπτωση αυτή η βαθμωτή συνάρτηση $f(\vec{r})$ εξαρτάται μόνο από το μέτρο του διανύσματος θέσης

$$f(\vec{r}) = f(r)$$

Παραδείγματα τέτοιων δυνάμεων είναι η βαρυτική και η δύναμη Coulomb

$$F(\vec{r}) = \frac{A}{r^2}\,\hat{e}_r$$

όπου $A = -Gm_1m_2$ και kq_1q_2 αντίστοιχα.

Κεντρική δύναμη που είναι διατηρητική, είναι και σφαιρικά συμμετρική. Πράγματι, επειδή είναι διατηρητική, υπάρχει δυναμική ενέργεια έτσι ώστε

$$\vec{F} = -\nabla U$$

όπου

$$\nabla U = \hat{e}_r\frac{\partial U}{\partial r} + \hat{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} + \hat{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \phi}$$

Όμως η κεντρική έχει συνιστώσα μόνο κατά την $\hat{e}_r$ επομένως $\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0$. Άρα η U εξαρτάται μόνο από το μέτρο r, δηλαδή $U = U(r)$ και τότε

$$\vec{F} = -\frac{dU(r)}{dr}\hat{e}_r = \vec{F}(r)$$

Αντιστροφα τώρα, αν η δύναμη είναι κεντρική και σφαιρικά συμμετρική, $\vec{F} = f(r)\hat{e}_r$, λαμβάνοντας το στροβιλισμό αυτής ευρίσκουμε ότι είναι και διατηρητική.

3.4 Πεπερασμένες κατανομές μάζας

3.4.1 Δύναμη, Δυναμική Ενέργεια

Έως τώρα ασχοληθήκαμε κυρίως με την εφαρμογή των νόμων της βαρύτητας σε σημειακά σώματα. Όμως αυτό αποτελεί εξιδανίκευση της κατάστασης και ισχύει για την περίπτωση που οι νόμοι εφαρμόζονται για αποστάσεις πολύ μεγαλύτερες από τις διαστάσεις του σώματος. Στο παρόν εδάφιο θα μελετήσουμε τη δύναμη και τη δυναμική ενέργεια που προξενούνται από πεπερασμένα σώματα.

Θεωρούμε σώμα όγκου V μάζας M πυκνότητας $\rho(\vec{r})$. Υποθέτουμε ότι το σώμα αποτελείται από στοιχειώδεις μάζες M_i, $M = \sum_i M_i$ έτσι ώστε για κάθε M_i μπορούμε να εφαρμόσουμε τους νόμους του Νεύτωνα. Αν $\vec{r}_i$ το διάνυσμα θέσης της M_i, η δύναμη που ασκεί σε μικρή μάζα m στη θέση $\vec{R}$ είναι

$$\vec{F}_i = -G\frac{mM_i}{|\vec{R}-\vec{r}_i|^3}(\vec{R}-\vec{r}_i) = G\frac{mM_i}{|\vec{r}_i-\vec{R}|^3}(\vec{r}_i-\vec{R})$$

Η συνολική δύναμη από όλο το σώμα είναι το διανυσματικό άθροισμα

$$\vec{F} = \sum_i G\frac{mM_i}{|\vec{r}_i-\vec{R}|^3}(\vec{r}_i-\vec{R}) \tag{3.33}$$

Στο συνεχές όριο $\sum_i \to \int_V$, $M_i \to dM = \rho dV$, $\vec{r}_i \to \vec{r}$ είναι

$$\vec{F} = Gm\int_V \frac{\vec{r}-\vec{R}}{|\vec{r}-\vec{R}|^3}\rho(\vec{r})dV \tag{3.34}$$

Ορίζουμε ως ένταση του βαρυτικού πεδίου τη δύναμη που ασκείται στη μονάδα μάζας, $\vec{g} = \vec{F}/m$, δηλαδή,

$$\vec{g} = G\int_V \frac{\vec{r}-\vec{R}}{|\vec{r}-\vec{R}|^3}\rho(\vec{r})dV \tag{3.35}$$

Η δυναμική ενέργεια από τη στοιχειώδη μάζα dM δίδεται

$$dU = -G\frac{mdM}{|\vec{r}-\vec{R}|}$$

Ολοκληρώνοντας, λαμβάνουμε τη δυναμική ενέργεια από το σύνολο της μάζας

$$U(\vec{R}) = -Gm\int_V \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{R}|}dV(r) \tag{3.36}$$

Μπορούμε να παράγουμε τη δύναμη από την $U(\vec{R})$ από τη γνωστή σχέση

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{R}) &= -\nabla_R U(\vec{R}) \\ &= Gm \int_V \rho(\vec{r}) \nabla_R \frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}|} dV(r) \\ &= Gm \int_V \rho(\vec{r}) \left(\frac{\vec{r}-\vec{R}}{|\vec{r}-\vec{R}|^3} \right) dV(r)\end{aligned} \tag{3.37}$$

όπου ∇_R υποδηλώνει ότι στην παρούσα περίπτωση οι παραγωγίσεις γίνονται ως προς $\vec{R}$ και όχι $\vec{r}$.

Σε αντιστοιχία με τον ορισμό της έντασης, διαιρούμε τη δυναμική ενέργεια με τη σημειακή μάζα m. Ορίζουμε $u(\vec{R}) = U(\vec{R})/m$ και επομένως

$$u(\vec{R}) = -G \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{R}|} dV(r) \tag{3.38}$$

Η ποσότητα $u(\vec{R})$ καλείται δυναμικό.

Οι ποσότητες της έντασης και του δυναμικού εισάγουν την έννοια του πεδίου γύρω από το χώρο που υπάρχει η κατανομή μάζας. Μπορούμε πλέον να εργαζόμαστε με τη χρήση των πεδίων θεωρώντας τα ως ιδιότητα που επάγει στο χώρο η ύπαρξη της μάζας.

3.4.2 Δυναμικές Γραμμές, Ροή

Οι καμπύλες που εφάπτονται στο πεδίο της δύναμης ονομάζονται δυναμικές γραμμές.

Ας θεωρήσουμε νοητή επιφάνεια S εντός του βαρυτικού πεδίου. Η Ροή του πεδίου της δύναμης $\vec{F}$ δια μέσου της S ορίζεται ως το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\Phi_{\vec{F}} = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \tag{3.39}$$

Ορίζουμε Ισοδυναμική επιφάνεια τη νοητή επιφάνεια που σχηματίζεται εάν θέσουμε τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας ίση με μια σταθερά

$$U(\vec{R}) = c \tag{3.40}$$

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια την ύπαρξη μιας κλειστής ισοδυναμικής επιφάνειας S που περιβάλλει όγκο V εντός του βαρυτικού πεδίου. Πάνω στην S ισχύει η (3.40) και συνεπώς η παραγώγιση της U κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης που κείται στην επιφάνεια δίδει μηδέν. Αν s η παράμετρος κατά μήκος μιας τέτοιας καμπύλης, το διάνυσμα θέσης των σημείων της είναι $\vec{R} = \vec{R}(s)$ και

$$\frac{dU}{ds} = 0 \tag{3.41}$$

Αλλά γενικά ισχύει

$$\frac{dU}{ds} = \nabla U \cdot \hat{e}_t$$

όπου το $\hat{e}_t$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα εφαπτόμενο στην καμπύλη. Συνεπώς

$$\nabla U \cdot \hat{e}_t = 0$$

που σημαίνει ότι η κλίση ∇U είναι κάθετη σε τυχαία καμπύλη επί της επιφάνειας και συνεπώς σε κάθε σημείο της επιφάνειας S.

$$\nabla U \perp \hat{e}_t$$

Αλλά η δύναμη είναι

$$\vec{F}(\vec{R}) = -\nabla U(\vec{R})$$

που σημαίνει ότι η $\vec{F}$ είναι κάθετη στις ισοδυναμικές επιφάνειες. Επειδή όπως είδαμε η $\vec{F}$ είναι εφαπτόμενη στις δυναμικές γραμμές, έπεται τελικά ότι οι δυναμικές γραμμές τέμνουν κάθετα την επιφάνεια S.

3.4.3 Η ροή του βαρυτικού πεδίου

Θεωρούμε μάζα M πυκνότητας $\rho(\vec{r})$ σε όγκο V και κλειστή επιφάνεια που περιλαμβάνει τον όγκο. Δια μέσου της κλειστής επιφάνειας η ροή του πεδίου είναι

$$\Phi = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

και η δύναμη δίδεται από $\vec{F} = -GMm\frac{\vec{r}}{r^3}$, οπότε

$$\Phi = -GMm \oint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S}$$

Αλλά, εξ ορισμού, η στερεά γωνία είναι [1]

$$\Omega = \oint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} = 4\pi$$

[1] βλ. Διανυσματικό Λογισμό κεφ. 7

και επομένως για κλειστή επιφάνεια

$$\Phi = -4\pi GMm$$

Από το θεώρημα της απόκλισης έχουμε επίσης ότι η ροή του πεδίου είναι

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV$$

Εξισώνουμε

$$\int_V \nabla \cdot \vec{F} dV = -4\pi GMm \tag{3.42}$$

Η μάζα M αντιστοιχεί στη μάζα του όγκου που περιβάλλει η κλειστή επιφάνεια, επομένως

$$M = \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

Όμως, $\vec{F} = m\vec{g}(\vec{r})$, την οποία αντικαθιστούμε μαζί με την προηγούμενη στη (3.42)

$$m \int_V \left(\nabla \cdot \vec{g} + 4\pi G\rho(\vec{r})\right) dV = 0 \tag{3.43}$$

Επομένως, η υπό ολοκλήρωση ποσότητα είναι μηδέν

$$\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho(\vec{r}) \tag{3.44}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\nabla u(\vec{r})$$

με αντικατάσταση αυτής στην (3.44) παίρνουμε

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = 4\pi G\rho(\vec{r}), \;\; \vec{r} \in V_0 \tag{3.45}$$

Η οποία είναι η εξίσωση (3.45). Στον κενό χώρο, το δεξιό μέλος είναι μηδέν. Τότε έχουμε

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = 0, \; \vec{r} \notin V_0 \tag{3.46}$$

που είναι η εξίσωση Laplace.

3.4.4 Ασκήσεις επανάληψης. Καμπυλότητα, στρέψη, Έργο

1. Κινητό διαγράφει τροχιά που δίδεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$x = (3 - t^2)at,\ y = 3at^2, z = (3 + t^2)at$$

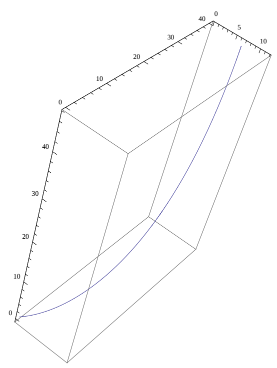
Να υπολογιστεί το μήκος της τροχιάς για χρονικό διάστημα $t = [0, t_0]$. Να βρεθούν η καμπυλότητα και η στρέψη της τροχιάς για κάθε χρονική στιγμή. Δείξετε ότι

$$k = \tau = \frac{1}{3a}\frac{1}{(1 + t^2)^2}$$

2. Δίδεται δύναμη $\vec{F} = 2xy\hat{i} + x^2\hat{j}$ και σώμα μάζας m κινούμενο σε τροχιά $y = x^2$. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης από το σημείο $(0, 0)$ έως το $(1, 1)$. Κάνετε το ίδιο για τη διαδρομή επί της ευθείας $y = x$. Υπολογίστε το στροβιλισμό της δύναμης. Συσχετίστε τα αποτελέσματα.

3. Δίδεται η δύναμη $F = -kx$ με k σταθερά που δρά σε σωμάτιο, κινούμενο οριζόντια στον άξονα x. Να μελετηθεί η κίνηση και να γραφεί η δυναμική και η κινητική ενέργεια. Να δείξτε ότι το άθροισμα διατηρείται.

4. Μικρή χάνδρα κινείται προς τα κάτω υπό την επίδραση της βαρύτητας κατά μήκος σύρματος χωρίς τριβές. Θεωρούμε ότι ξεκινά από την αρχική θέση $(x, y) = (0, 0)$ με κατακόρυφη αρχική ταχύτητα v_0. Να βρεθεί το σχήμα του σύρματος (δηλαδή συνάρτηση $y = y(x)$) ώστε η χάνδρα να κινείται με την ίδια κατακόρυφη ταχύτητα.



Σχήμα 3.8: Η τροχιά της άσκησης 1

5. Σωμάτιο m υπόκειται σε δύο δυνάμεις, μια κεντρική $\vec{F}_1 = f(r)\hat{e}_r$ και δύναμη τριβής που εξαρτάται γραμμικά από την ταχύτητα $\vec{F}_2 = -k\vec{v}$. Την αρχική χρονική στιγμή η στροφορμή του είναι $\vec{L}_0$ Να βρεθεί η στροφορμή του για κάθε στιγμή. Εγραστείτε στις πολικές συντεταγμένες και δείξτε ότι $L = L_0 e^{-kt/m}$.

6. Μελετήστε ξανά το πρόβλημα κίνησης στην απλή μηχανή Adwood του πρώτου κεφαλαίου με τη χρήση της αρχής διατήρησης ενέργειας και δείξτε ότι ισοδυναμεί με πρόβλημα μιας μεταβλητής. Να εξαχθεί η εξίσωση κίνησης

$$\dot{\vec{v}} = \pm \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\,\vec{g}$$

7. Γνωρίζουμε ότι για δύο σημειακές μάζες (και όχι μόνον) στις θέσεις $\vec{r}$, $\vec{r}'$ η δύναμη μεταξύ τους είναι ανάλογη του κλάσματος $\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$ ενώ το δυναμικό είναι ανάλογο του $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$. Υπολογίστε τις ακόλουθες παραστάσεις

$$\nabla_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|},\ \nabla_r \cdot \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3},\ \nabla_r^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

για $\vec{r} \neq \vec{r}'$.

8. Αποδείξαμε ότι το δυναμικό που δημιουργείται από κατανομή μάζας πυκνότητας $\rho(\vec{r})$ δίδεται από τη λύση της εξίσωσης $Poisson$

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = 4\pi\, G\, \rho(\vec{r})$$

Θεωρείστε ότι απομονωμένο σύστημα (π.χ. κάποια αέρια μάζα ή νέφος) μακράν άλλων πεδίων βαρύτητας έχει κατανομή μάζας

$$\rho(\vec{r}) = A\, e^{-r}$$

όπου r πρακτικά εκτείνεται μέχρι το άπειρο. Υπολογίστε τη συνολική μάζα. Δοθείσης πυκνότητας με σφαιρική συμμετρία, γράψτε τον τελεστή $Laplace$ στις σφαιρικές συντεταγμένες και λύστε την εξίσωση $Poisson$ για να βρείτε το δυναμικό. Υπολογίστε την ένταση του πεδίου βαρύτητας που δημιουργείται. Σχεδιάστε το δυναμικό και το μέτρο της έντασης του πεδίου και βρείτε που λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της.

9. *Προαιρετική*

Στο μάθημα της 20.11.2013 δείξαμε ότι η ένταση $\vec{g}(\vec{r}) = \vec{F}/m$ βαρυτικού πεδίου που δημιουργείται από συμπαγή όγκο μάζας πυκνότητας $\rho(\vec{r})$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\nabla_r \cdot \vec{g}(\vec{r}) = -4\pi\, G\, \rho(\vec{r}) \tag{3.47}$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι σε απόσταση $\vec{r}$ από το κέντρο συντεταγμένων η ένταση δίδεται από το ολοκλήρωμα

$$\vec{g}(\vec{r}) = G \int_{V'} \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} \rho(\vec{r}')\, dV'$$

όπου $\vec{r}\,'$ δηλώνει το διάνυσμα θέσης για τον όγκο της κατανομής μάζας M. Άν στη συνέχεια δράσουμε με τον τελεστή ∇_r στην τελευταία, επειδή το ολοκλήρωμα αφορά τα σημεία με $\vec{r}'$, έπεται ότι μετατίθεται με τον ∇_r και συνεπώς έχουμε

$$\nabla_r \cdot \vec{g}(\vec{r}) = G \int_{V'} \nabla_r \cdot \left(\frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} \right) \rho(\vec{r}')\, dV' \tag{3.48}$$

Συγκρίνοντας τώρα τις δύο εξισώσεις (3.47,3.48) και κάνοντας χρήση και αποτέλεσμα της πρώτης άσκησης λαμβάνουμε την ισότητα

$$\int_{V'} \left\{ \nabla_r^2 \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \right\} \rho(\vec{r}')\, dV' = -4\pi \rho(\vec{r}) \tag{3.49}$$

Αν τώρα ορίσουμε μια "συνάρτηση" (την οποία ονομάζουμε συνάρτηση δέλτα) έτσι ώστε

$$\nabla_r^2 \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} = -4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}\,') \tag{3.50}$$

η προηγούμενη εξίσωση γράφεται απλά ως εξής

$$\int_{V'} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}\,') \rho(\vec{r}')\, dV' = \rho(\vec{r}) \tag{3.51}$$

Στο πρώτο θέμα σας ζητήθηκε να υπολογίσετε τη Λαπλασιανή για $\vec{r} \neq \vec{r}\,'$. Τι ιδιότητες προκύπτουν για τη συνάρτηση δέλτα; Μπορείτε να έχετε τώρα μια απάντηση και για το $\vec{r} = \vec{r}\,'$;

10. Να γραφεί μια έκφραση υπό μορφή ολοκληρώματος για το δυναμικό που δημιουργείται από κυκλικό δακτύλιο ακτίνας R ομοιόμορφης κατανομής μάζας ευρισκόμενο επί του επιπέδου xy με κέντρο στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Να υπολογιστεί το δυναμικό για σημείο επί του άξονα z.

11. *Επαναλάβατε πρώτα την άσκηση του μαθήματος:*
Θεωρείστε σφαιρικό φλοιό ακτίνας R αμελητέου πάχους με ομοιόμορφη κατανομή συνολικής μάζας M, (σταθεράς πυκνότητας σ) και σημειακό

σώμα μάζας m σε απόσταση r από το κέντρο του σφαιρικού φλοιού. Δείξτε ότι η δυναμική ενέργεια δίδεται από

$$U(r) = \begin{cases} -G\frac{mM}{r} & r > R \\ -G\frac{mM}{R} & r < R \end{cases} \tag{3.52}$$

Υπολογίστε τη βαρυτική δύναμη επί της m και για τις δύο περιπτώσεις, δηλαδή είτε βρίσκεται εντός ή εκτός του σφαιρικού φλοιού.

Χρησιμοποιήστε τα ανωτέρω αποτελέσματα να βρείτε τη δυναμική ενέργεια για συμπαγή σφαίρα, πυκνότητας $\rho(r)$, (δηλαδή που εξαρτάται μόνο από το μέτρο r). Συγκεκριμμένα δείξτε ότι όταν η σημειακή μάζα m βρίσκεται εκτός της σφαίρας

$$U(r) = -G\frac{mM}{r},\ r > R$$

ενώ για την περίπτωση εντός της σφαιρικής κατανομής

$$U(r) = -G\frac{mM(r)}{r} - Gm4\pi\int_r^R \rho(r')r'dr',\ r < R$$

όπου $M(r)$ η μάζα της συμπαγούς σφαίρας που περικλύεται από την ακτίνα r. Δείξτε ότι σε κάθε περίπτωση στην ανωτέρω συμπαγή σφαίρα η δύμανη δίδεται από

$$F(r) = -G\frac{mM(r)}{r^2}$$

12. Μικρή σφαίρα m βρίσκεται στην κορυφή κυλινδρικού αγωγού ακτίνας R και αρχίζει να κυλά στην επιφάνειά του με μηδενική αρχική ταχύτητα. Σε ποιά γωνία ως προς την κατακόρυφη θα αποχωριστεί η σφαίρα την επιφάνεια του αγωγού;

13. Υπολογίστε τη συνολική δυναμική ενέργεια N σωματιδίων m_i πάνω από την επιφάνεια της γής και δείξτε ότι

$$U = Mgz_{cm}$$

όπου M η συνολική μάζα και z_{cm} το κέντρο μάζας τους.

14. Εφάνταστος φυσικός μελετά τη δυνατότητα μετακίνησης Αθήνα-Ιωάννινα χωρίς δαπάνες μέσω ευθύγραμμης υπόγειας σήραγγας όπως στο σχήμα. Αν η ταχύτητα εκκίνησης είναι $v_0 = 0$ βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα που αναπτύσει το κινητό και το χρόνο που απαιτείται για να διασχίσει τη συγκεκριμένη απόσταση.

15. Δείξτε ότι το δυναμικό επί του άξονα z που διέρχεται απο το κέντρο ομογενούς δίσκου ακτίνας a και επιφανειακής πυκνότητας σ_0 δίδεται από

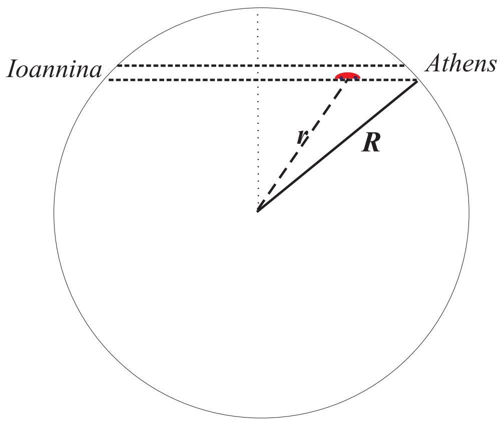
$$U(z) = -2\pi G_N \sigma_0 \left(\sqrt{z^2 + a^2} - |z|\right)$$

16. Ας θεωρήσουμε τη γη με κέντρο στην αρχή του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων και το κέντρο της σελήνης σε απόσταση R επί του άξονα z. Η παλιρροιακή δύναμη που ασκείται από τη σελήνη σε σώμα επί της επιφανείας της γής είναι

$$\vec{F}_\pi \;=\; -G\frac{Mm}{R^3}(x\hat{i} + y\hat{j} - 2\,z\hat{k}) \tag{3.53}$$

Βρείτε το δυναμικό της δύναμης αυτής.

17. $a)$ Να βρεθεί η βαρυτική δύναμη σε σημειακή μάζα από σώμα όγκου V με πυκνότητα $\rho(\vec{r})$. $b)$ Να γίνει εφαρμογή της γενικής έκφρασης για την περίπτωση μάζας σταθερής πυκνότητας μέ σχήμα όγκου που καταλαμβάνει το άνω ημισφαίριο που υπακούει την εξίσωση $x^2 + y^2 + (z-1)^2 < 1$, $(2 \geq z \geq 1)$, και σωμάτιο μάζας m_0 που ευρίσκεται στην αρχή του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. (*Λύση: βλ. Διαν. Λογ. κεφ 6*)



Σχήμα 3.9: Η σήραγγα Αθήνα-Ιωάννινα

3.5 Κρούση, Σκέδαση

Μια από τις σημαντικές εφαρμογές των νόμων διατήρησης είναι στη μελέτη της κρούσης και σκέδασης. Σε πειραματικές διατάξεις δύο σωμάτια γνωστής μάζας, συγκρούονται συνήθως 'με γνωστές αρχικές ταχύτητες. Στη συνέχεια όταν απομακρυνθούν από το σημείο της κρούσης ζητούνται οι τελικές ταχύτητες. Αν και πολλές φορρές δεν είναι πλήρως γνωστή η μορφή της αλληλεπίδρασης, μπορούν να εξαχθούν σημαντικά συμεράσματα για την τελική τους κατάσταση εφορμόζοντας τις αρχές διατήρησης.

Ας θεωρήσουμε δύο σώματα m_1, m_2 με αρχικές ταχύτητες $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ που βρίσκονται σε τροχιά σύγκρουσης. Ζητούνται οι τελικές ταχύτητες $\vec{v}_1{}', \vec{v}_2{}'$. Εν απουσία εξωτερικών δυνάμεων, γνωρίζουμε ότι η ορμή του συστήματος διατηρείται

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1{}' + m_2\vec{v}_2{}' \tag{3.54}$$

Η διανυσματική εξίσωση (3.54) είναι ισοδύναμη με τρεις βαθμωτές εξισώσεις. Οι άγνωστοι είναι οι δύο τελικές ταχύτητες των σωματιδίων που απαρτίζονται από έξι συνιστώσες. Συνεπώς, η αρχή διατήρησης της ορμής δεν επαρκεί για τον προσδιορισμό όλων των αγνώστων συνιστωσών.

Μια τέταρτη εξίσωση που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι η εξίσωση της Ενέργειας. Στη περίπτωση αυτή απαιτείται επιπλέον κάποια γνώση για τη φύση των δυνάμεων αλληλεπίδρασης. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

1. Αν τα σώματα αλληλεπιδρούν μεταξύ τους μόνο με διατηρητικές δυνάμεις, τότε μπορούμε να κάνουμε χρήση της αρχής διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ελαστική κρούση.

2. Αν οι δυνάμεις είναι μη διατηρητικές, η κρούση καλείται μη ελαστική και έχουμε απώλεια Μηχανικής Ενέργειας. Μπορούμε να εφαρμόσουμε ως τέταρτη εξίσωση το θεώρημα έργου-ενέργειας, όμως απαιτείται επιπροσθέτως η γνώση του έργου των μή-διατηρητικών δυνάμεων.

3. Τέλος, σε ειδικές περιπτώσεις είναι δυνατό κατά την κρούση το σύστημα να προσφέρει εσωτερική ενέργεια. Σε αυτή την περίπτωση η τελική κατάσταση του συστήματος διαθέτει περισσότερη μηχανική ενέργεια σε σχέση με την αρχική.

Θα περιορίσουμε τη μελέτη στις δύο πρώτες περιπτώσεις που είναι και οι συνηθέστερες στη φύση.

3.5.1 Ελαστική κρούση

Καθόσον οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης των δύο σωμάτων είναι διατηρητικές μπορεί να ορισθεί δυναμική ενέργεια του συστήματος η οποία στην περίπτωση της βαρύτητας για παράδειγμα εξαρτάται από τη μεταξύ τους απόσταση και δίδεται

$$U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

Εν γένει, η φύση των δυνάμεων που θα υποθέσουμε μεταξύ των αλληλεπιδρώντων σωμάτων είναι τέτοια ώστε καθώς η απόσταση μεταξύ τους αυξάνεται, οι δυνάμεις εξασθενούν και για $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \to \infty$ είναι $\vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \to 0$. Στο όριο αυτό, δηλαδή θεωρώντας τα σώματα αρκετά απομακρυσμένα πριν και μετά την κρούση, μπορούμε να αγνοήσουμε τη δυναμική ενέργεια και η αρχή διατήρησης γράφεται ως η διατήρηση της κινητικής ενέργειας. Για τα δύο σώματα του παραδείγματος, στην ελαστική κρούση είναι λοιπόν

$$K_2 = K_1 \to \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 {v_1'}^2 + \frac{1}{2}m_2 {v_2'}^2$$

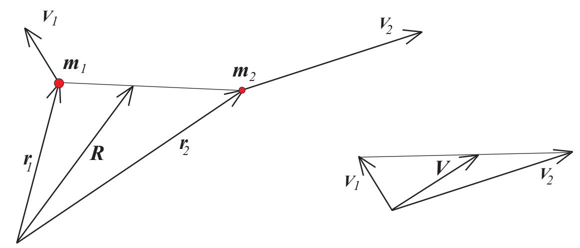
3.5.2 Μή ελαστική κρούση

Στη μή ελαστική κρούση, η μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται. Ένα μέρος της ενέργειας μετατρέπεται σε άλλη μορφή, συνήθως θερμική Q, ενώ υπό τις προϋποθέσεις που αναφέραμε και πριν, η κινητική ενέργεια πριν και μετά την κρούση σχετίζεται μέσω της

$$K_2 = K_1 + Q$$

ή

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 {v_1'}^2 + \frac{1}{2}m_2 {v_2'}^2 + Q$$



Σχήμα 3.10: Τα διανύσματα θέσης των δύο σωμάτων το κέντρο μάζης και οι ταχύτητες αυτών. Στο δεύτερο διάγραμμα σχεδιάζονται οι ταχύτητες των σωματίων και του κέντρου μάζης.

Με βάση τον τελευταίο τύπο, μπορούμε να ταξινομίσουμε όλες τις περιπτώσεις κρούσης ως ακολούθως

1. $Q > 0$: Μή ελαστική κρούση

2. $Q = 0$: Ελαστική κρούση

3. $Q < 0$: Υπερ-ελαστική κρούση

3.5.3 Κρούση σε κίνηση επί μιάς διάστασης

Εάν θέσουμε περιορισμούς στο εργαστηριακό μας σύστημα, είναι δυνατό να έχουμε κίνηση σε μιά διάσταση.

Στην περίπτωση αυτή η διανυσματική εξίσωση διατήρησης της ορμής έχει μια συνιστώσα. Τα δύο σώματα στην τελική κατάσταση κινούνται με ταχύτητες v_1', v_2' σε μιά διάσταση, ενώ οι εξισώσεις προσδιορισμού είναι δύο, η διατήρηση ορμής και η εξίσωση για την ενέργεια. Επομένως οι v_1', v_2' μπορούν να προσδιοριστούν.

Στη περίπτωση αυτή οι δύο εξισώσεις είναι

$$
\begin{aligned}
m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v_1' + m_2 v_2' \\
\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 {v_1'}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_2'}^2 + Q
\end{aligned}
\tag{3.55}
$$

Ας θεωρήσουμε πρώτα την περίπτωση ελαστικής σκέδασης. Τότε $Q = 0$. Αναδιοργανώνουμε τις παραπάνω εξισώσεις ως ακολούθως

$$
\begin{aligned}
m_1(v_1 - v_1') &= m_2(v_2' - v_2) \\
m_1(v_1^2 - {v_1'}^2) &= m_2({v_2'}^2 - v_2^2)
\end{aligned}
\tag{3.56}
$$

Από την τελευταία γραφή παρατηρούμε ότι υπάρχει μιά τετριμμένη λύση για την οποία τα σώματα μετά την κρούση διατηρούν τις αρχικές τους ταχύτητες. Στην αντίθετη περίπτωση, $v_1 - v_1' \neq 0$ και $v_2' - v_2 \neq 0$. Τότε διαιρούμε τις εξισώσεις κατά μέλη και λαμβάνουμε

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2$$

Επιλύουμε ως προς $v_2' = v_1 + v_1' - v_2$ και αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ορμής. Λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \\ v_2' &= \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \end{aligned} \tag{3.57}$$

Στη περίπτωση της μή ελαστικής κρούσης κάνουμε χρήση της εξίσωσης της (3.55)

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + \frac{\sqrt{(m_1 m_2 (v_1 - v_2))^2 - m_1 m_2 (m_1 + m_2) Q}}{m_2(m_1 + m_2)} \\ v_2' &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{\sqrt{(m_1 m_2 (v_1 - v_2))^2 - m_1 m_2 (m_1 + m_2) Q}}{m_1(m_1 + m_2)} \end{aligned} \tag{3.58}$$

3.5.4 Παραδείγματα

1. Ας θεωρήσουμε ότι μετά την πλαστική κρούση τα δύο σώματα ενώνονται σε ένα και κινούνται με την αυτή ταχύτητα. Τότε $v_1' = v_2'$, άρα η ποσότητα του ριζικού είναι μηδέν

   $$(m_1 m_2 (v_1 - v_2))^2 - m_1 m_2 (m_1 + m_2) Q = 0 \rightarrow Q = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{m_1 + m_2}$$

   Η ταχύτητα του 'ενιαίου' σώματος $M = m_1 + m_2$ μετά την κρούση είναι

   $$\vec{v}' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

2. Δύο σφαίρες εν επαφή με $M \gg m$ και $R > r$ πέφτουν από ύψος h. Να υπολογιστεί η ταχύτητα κάθε μιάς αμέσως μετά την επαφή της πρώτης με το οριζόντια επίπεδο.

   Λύση. Βλέπε ασκήσεις μαθήματος...

3. Να μελετηθεί η ελαστική κρούση σε δύο διαστάσεις. $m_1 = m_2$, $v_1 = v_0, v_2 = 0$

   $$m\vec{v}_0 + 0 = m(\vec{v}_1' + \vec{v}_2')$$

   $$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m {v_1'}^2 + \frac{1}{2} m {v_2'}^2$$

$$\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0 = (\vec{v}_1' + \vec{v}_2') \cdot (\vec{v}_1' + \vec{v}_2')$$

$$v_0^2 = {v_1'}^2 + {v_2'}^2 + 2\vec{v}_1' \cdot v_2'$$

Συγκρίνοντας με την εξίσωση ενέργειας

$$\vec{v}_1' \cdot v_2' = 0$$

δηλαδή τα σωμάτια μετά την κρούση κινούνται σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις. Δηλαδή, αν στην εργαστηριακή μέτρηση γνωρίζουμε την ταχύτητα της μιάς, τότε είναι γνωστό το επίπεδο στον οποίο κινείται η άλλη.

3.6 Το σύστημα αναφοράς του Κέντρου Μάζας

Είδαμε σε προηγούμενα κεφάλαια, ότι το κέντρο μάζας δύο σωμάτων ορίζεται από το διάνυσμα

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M}$$

ευρίσκεται δε, στην ευθεία που ενώνει τα δύο κέντρα. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι

$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{M} \tag{3.59}$$

ενώ το $\vec{V}$ ευρίσκεται επί της ευθείας που ενώνει την $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

Οι σχετικές ταχύτητες των δύο σωμάτων ως προς αυτή του κέντρου μάζας είναι

$$\begin{aligned} \vec{v}_{1c} &= \vec{v}_1 - \vec{V} \\ &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \\ \vec{v}_{2c} &= \vec{v}_2 - \vec{V} \\ &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \end{aligned} \tag{3.60}$$

Μια εποπτική περιγραφή των διανυσμάτων ταχυτήτων δίδεται στο σχήμα. Ειδικότερα, τα δύο διανύσματα των σχετικών ταχυτήτων των σωμάτων ευρίσκονται επί της ευθείας $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ και έχουν αντίθετη φορά.

Από τις εκφράσεις αυτών, προκύπτουν αμέσως τα διανύσματα των σχετικών ορμών τους, οι οποίες είναι

$$\begin{aligned}
\vec{p}_{1c} &= m_1\vec{v}_{1c} \\
&= \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(\vec{v}_1-\vec{v}_2) \\
\vec{p}_{2c} &= m_2\vec{v}_{2c} \\
&= -\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Ορίζοντας την ανηγμένη μάζα

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \tag{3.62}$$

οι σχετικές ορμές γράφονται

$$\begin{aligned}
\vec{p}_{1c} &= \mu\,(\vec{v}_1-\vec{v}_2) \\
\vec{p}_{2c} &= -\mu\,(\vec{v}_1-\vec{v}_2)
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Από τις τελευταίες προκύπτει ότι η συνολική ορμή των δύο σωμάτων ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας είναι μηδέν

$$\vec{p} = \vec{p}_{1c} + \vec{p}_{2c} = 0 \tag{3.64}$$

Οδηγούμεθα λοιπόν στο συμπέρασμα

Η συνολική ορμή στο Σύστημα Κέντρου Μάζας των δύο σωμάτων είναι μηδέν.

Η συνολική ορμή στο σύστημα εργαστηρίου είναι

$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{V}$$

και επειδή η ορμή διατηρείται, έπεται ότι η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι σταθερό διάνυσμα

$$\vec{V} = constant \tag{3.65}$$

Στο σχήμα 3.11 δείχνονται τα διανύσματα των ταχυτήτων πριν και μετά την κρούση. Το ζεύγος v_{2c}, v_{1c} ευρίσκεται πάνω σε κοινή ευθεία και το ίδιο ισχύει και για τα v'_{2c}, v'_{1c} Συνεπώς τα διανύσματα ευρίσκονται σε ένα κοινό επίπεδο - το επίπεδο σκέδασης.

3.6.1 Κρούση και διατήρηση ενέργειας στο Σύστημα Κέντρου Μάζας

Είδαμε ότι η συνολική ορμή στο Σύστημα Κέντρου Μάζας (ΣΚΜ) είναι μηδέν. Τα διανύσματα των ταχυτήτων είναι συγγραμικά ανά ζεύγη, συνεπώς αν v_{ic}, v'_{ic} οι ταχύτητες πριν και μετά την κρούση έχουμε

$$
\begin{aligned}
v_{2c} &= \frac{m_1}{m_2} v_{1c} \\
v'_{2c} &= \frac{m_1}{m_2} v'_{1c}
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση για την αρχή διατήρησης της ενέργειας

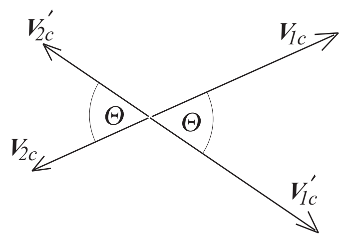
$$\frac{1}{2} m_1 v_{1c}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2c}^2 = \frac{1}{2} m_1 {v'_{1c}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v'_{2c}}^2$$

έχουμε

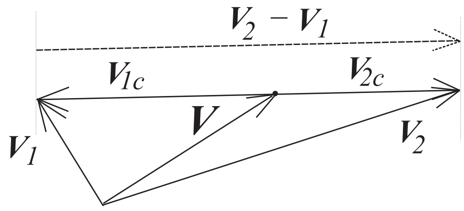
$$\left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right) v_{1c}^2 = \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right) {v'_{1c}}^2$$

Από τη τελευταία προκύπτει ότι το μέτρο της ταχύτητας εκάστου σωμάτιου είναι το ίδιο πριν και μετά την κρούση.

$$v_{1c} = v'_{1c}, \quad v_{2c} = v'_{2c}$$



Σχήμα 3.11: Το επίπεδο σκέδασης.



Σχήμα 3.12: Στο διάγραμμα απεικονίζονται οι σχετικές ταχύτητες ως προς την ταχύτητα του κέντρου μάζας.

Συνεπώς συνάγουμε ότι,
το διάνυσμα της ταχύτητας απλά περιστρέφεται πάνω στο επίπεδο σκέδασης.
Οι αντίστοιχες διανυσματικές εκφράσεις που σχετίζουν τις ταχύτητες πριν και μετά τη σκέδαση γράφονται

$$\vec{v}_{1c} = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}_{2c}, \quad \vec{v}'_{1c} = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}'_{2c}$$

3.6.2 Ακίνητος στόχος

Θα εξειδικεύσουμε τα παραπάνω για την περίπτωση ακίνητου στόχου. Έστω λοιπόν ότι το δεύτερο σωμάτιο είναι ακίνητο, $\vec{v}_{2c} = 0$. Αντικαθιστώντας στους τύπους για τις ταχύτητες ως προς το ΣΚΜ έχουμε

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\vec{v}_1 \\ \vec{v}_{1c} &= \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\vec{v}_1 \\ \vec{v}_{2c} &= -\vec{V} \end{aligned} \tag{3.67}$$

Τα διανύσματα σχεδιαζονται στην εικόνα 3.13.

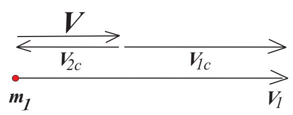
Ας παραστήσουμε στην ίδια εικόνα και τα διανύσματα μετά τη σκέδαση. Το $\vec{v}'_{1c}$ αποτελεί απλή περιστροφή του $\vec{v}_{1c}$, η δε γωνία περιστροφής σημειώνεται με το γράμμα Θ. Δείχνεται επίσης το διάνυσμα $\vec{v}'_1 = \vec{V} + \vec{v}'_{1c}$ και η γωνία θ_1 που σχηματίζει με το $\vec{V}$. Ανάλογη εικόνα παρουσιάζεται και για τα $\vec{v}'_2$, $\vec{v}'_{2c}$ στο παράπλευρο σχήμα.

Στα πειράματα σκέδασης μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι γωνίες σκέδασης κλπ. Από τα τρίγωνα του σχήματος (...) έχουμε την ακόλουθη σχέση μεταξύ των γωνιών.

$$\tan\theta_1 = \frac{v'_{1c}\sin\Theta}{V + v'_{1c}\cos\Theta} = \frac{\sin\Theta}{V/v'_{1c} + \cos\Theta} \tag{3.68}$$

Αλλά απο τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι

$$v'_{1c} = v_{1c} = \frac{m_2}{m_1+m_2}|\vec{v}_1|, \; V = \frac{m_1}{m_1+m_2}|\vec{v}_1|$$



Σχήμα 3.13: Σχετικές ταχύτητες.

και ο λόγος $V/v'_{1c} = m_1/m_2$. Επομένως,

$$\tan\theta_1 = \frac{\sin\Theta}{\frac{m_1}{m_2} + \cos\Theta} \tag{3.69}$$

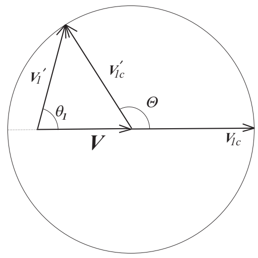
Έχουμε λοιπόν τις ακόλουθες περιπτώσεις

1. $\frac{m_1}{m_2} < 1$. Ο παρονομαστής $\frac{m_1}{m_2} + \cos\Theta$ μπορεί να πάρει όλες τις τιμές γύρω από το μηδέν και επομένως η εφαπτομένη της θ_1 λαμβάνει τιμές στο $(-\infty, \infty)$, άρα η γωνία θ_1 παίρνει οποιαδήποτε τιμή. Η περίπτωση αυτή απεικονίζεται στο σχήμα (...).

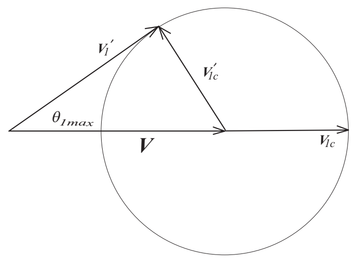
2. $\frac{m_1}{m_2} > 1$. Ο παρονομαστής $\frac{m_1}{m_2} + \cos\Theta$ δεν μπορεί να μηδενιστεί και παραμένει πάντα θετικός. Η θ_1 περιορίζεται και δεν μπορεί να λάβει κάθε τιμή. Η κατάσταση αυτή απεικονίζεται στο σχήμα 3.15. Η οριακή τιμή της $\theta_1 = \theta_{1max}$ συμβαίνει όταν η $\vec{v}'_1$ είναι κάθετη στην $\vec{v}'_{1c}$.

   Τότε

$$\tan\theta_{1max} = \frac{v'_{1c}}{v'_1},\ V^2 = {v'_1}^2 + {v'_{1c}}^2$$



Σχήμα 3.14: Η γωνία θ_1 όταν $\frac{m_1}{m_2} < 1$.



Σχήμα 3.15: Μέγιστη γωνία θ_{1max} όταν $\frac{m_1}{m_2} > 1$.