

Γεωργίου Κ. Λεοντάρη
Καθηγητή Θεωρητικής Φυσικής

Παραδόσεις Κλασικής Μηχανικής

Τμήμα Φυσικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Ιωάννινα 2014

Κεφάλαιο 4

Ταλαντώσεις

Σε προηγούμενα κεφάλαια μελετήσαμε διεξοδικά τη Δυναμική Ενέργεια διατηρητικών συστημάτων. Μεταξύ άλλων, ορίσαμε τις συνθήκες για τα σημεία ασταθούς και ευσταθούς ισορροπίας. Σχεδόν κάθε σύστημα που μετατοπίζεται για μικρό διάστημα από το σημείο ευσταθούς ισορροπίας εκτελεί ταλάντωση γύρω από αυτή. Αν υπάρχουν δυνάμεις τριβής το σύστημα μετά από πάροδο ικανού χρόνου ισορροπεί ξανά.

Στη περίπτωση ύπαρξης μόνο διατηρητικών δυνάμεων, η μικρή μετατόπιση οδηγεί σε αρμονική ταλάντωση και η κίνηση υπακούει στο γνωστό νόμο του Hooke

$$F(x) = -kx$$

όπου x η μετατόπιση και k μια σταθερά όπως ακριβώς στη περίπτωση ενός ελατηρίου. Για κάθε μετατόπιση από το κέντρο ισορροπίας η δύναμη έχει πάντα φορά προς το κέντρο (βλ. σχήμα 4.1). Στη συνέχεια θα αρχίσουμε με τη μελέτη απλών συστημάτων που οδηγούν σε αρμονική κίνηση.

4.1 Αρμονική ταλάντωση

Ξεκινούμε με ένα μονοδιάστατο πρόβλημα και επιλέγουμε δύναμη που εξαρτάται μόνο από τη θέση $F = F(x)$. Επομένως είναι διατηρητική και η δυναμική ενέργεια ορίζεται

$$U(0) - U(x) = \int_0^x F(x') dx'$$

Για την περίπτωση ελατηρίου, $F = -kx$ και

$$U(x) = U(0) + \frac{1}{2}kx^2$$

Παίρνουμε ως αρχή του άξονα x την θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου και $U(0) = 0$, άρα

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Ας υποθέσουμε τώρα αυθαίρετο δυναμικό $U(x)$ διατηρητικού συστήματος, σε μια διάσταση. Δεχόμαστε θέση ισορροπίας $x_0 = 0$. Υποθέτουμε ομαλή συνάρτηση γύρω από το σημείο ισορροπίας επομένως για $x \ll 1$ κρατούμε τους πρώτους όρους την ανάπτυξη Taylor

$$U(x) \approx U(0) + U'(0)x + \frac{1}{2}U''(0)x^2$$

Όμως, στη θέση ισορροπίας είναι $U'(0) = 0$, άρα

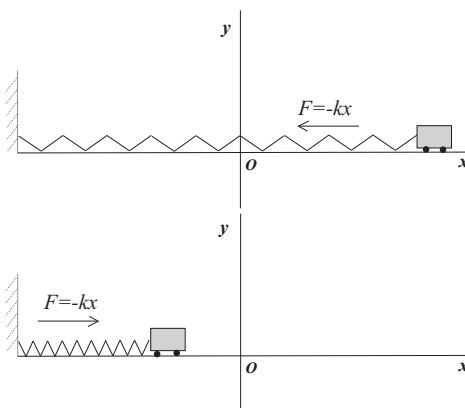
$$U(x) \approx U(0) + \frac{1}{2}U''(0)x^2$$

δηλαδή, η δυναμική ενέργεια για μικρές μετατοπίσεις έχει ακριβώς τη μορφή της δυναμικής συνάρτησης του αρμονικού ταλαντωτή (για ευκολία στη συνέχεια ορίζουμε τη δυναμική ενέργεια και τη δεύτερη παράγωγο αυτής με τις σταθερές $U(0) = a, U''(0) = k$)

$$U(x) = a + \frac{1}{2}kx^2$$

ενώ η δύναμη προκύπτει από την παραγωγή

$$F(x) = -\frac{d}{dx}U(x) = -kx$$



Σχήμα 4.1: Σχηματική αναπαράσταση αρμονικής ταλάντωσης.

Η εξίσωση κίνησης είναι λοιπόν

$$m\ddot{x} = -kx \rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

όπου ορίσαμε $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Οι λύσεις προκύπτουν δοκιμάζοντας συνάρτηση της μορφής $x \sim e^{\lambda t}$. Αντικατάσταση οδηγεί στην εξίσωση $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ οι λύσεις δε είναι $\lambda_{\pm} = \pm i\omega$ και επομένως

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

Συνηθίζουμε να γράφουμε τη λύση με πραγματικές συναρτήσεις και επομένως κάνουμε χρήση του τύπου De-Moivre $e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$ για να γράψουμε τη λύση ως εξής

$$x(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t$$

Ορίζοντας το λόγο των νέων σταθερών ως $\tan \delta = D/C$, έχουμε τελικά

$$x(t) = A \cos(\omega t - \delta)$$

Η ταχύτητα προκύπτει με απλή παραγωγή

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t - \delta)$$

Είναι απλό να δειχθεί ότι η συνολική μηχανική ενέργεια δίδεται από

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2$$

δηλαδή διατηρείται όπως αναμέναμε. (Εκτελέστε τις στοιχειώδεις πράξεις για να την αποδείξετε με απ'ευθείας αντικατάσταση των $x(t), v(t)$).

Παρουσιάζουμε δύο απλές περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών:

1. $x(0) = x_0, v(0) = 0$. Αντικαθιστούμε στους τύπους για το διάστημα και την ταχύτητα

$$x(0) = A \cos \delta = x_0, v(0) = A\omega \sin \delta = 0$$

από τις οποίες προκύπτει $x_0 = A, \delta = 0$ και επομένως

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t), v(t) = -x_0\omega \sin \omega t$$

2. $x(0) = 0, v(0) = v_0$. Τότε έχουμε

$$x(0) = A \cos \delta = 0, v(0) = A\omega \sin \delta = v_0$$

από τις οποίες προκύπτει $\delta = 0, A = v_0/\omega$

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t), v(t) = v_0 \cos(\omega t)$$

4.2 Αποσβενόμενη ταλάντωση

Στην πραγματικότητα, σε κάθε φυσικό σύστημα ταλαντωτή υπάρχουν αντιτιθέμενες δυνάμεις που επιβραδύνουν την κίνηση και εάν δεν υπάρξει εξωτερική επίδραση η ταλάντωση μειώνεται σταδιακά έως ότου τελικά αποσβένεται οριστικά. Μπορούμε να προσεγγίσουμε τη δύναμη απόσβεσης από τη συνάρτηση

$$\vec{f} = -b\vec{v} - cv^2\hat{v}$$

όπου \hat{v} το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση της ταχύτητας ¹. Όπως είδαμε σε προηγούμενα κεφάλαια ο όρος ανάλογος της ταχύτητας σχετίζεται με το ιξώδες και για χαμηλές ταχύτητες επικρατεί. Για κίνηση σε μια διάσταση (έστω τη x), γράφουμε τότε

$$f = -bv = -b\dot{x}$$

Επομένως, η εξίσωση κίνησης γράφεται

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (4.1)$$

Θέτουμε τις σταθερές

$$\frac{b}{m} = 2\alpha, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

έτσι ώστε η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.2)$$

Δοκιμάζουμε κατά τα ειωθώτα τη λύση $x \sim e^{\lambda t}$ και λαμβάνουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$$

της οποίας οι λύσεις είναι

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Συνεπώς η γενική λύση είναι

$$x(t) = e^{-\alpha t} \left(Ae^{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} t} + Be^{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} t} \right)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις.

¹Η κατεύθυνση μπορούσε να είναι και διαφορετική, αλλά εδώ θα μελετήσουμε την απλούστερη περίπτωση.

1. $b = 0 \rightarrow \alpha = 0$. Στη περίπτωση αυτή η λύση γράφεται

$$x(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}$$

και μετά από στοιχειώδεις πράξεις παίρνει τη μορφή

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t - \delta)$$

που είναι η γνωστή λύση χωρίς απόσβεση.

2. Ασθενής απόσβεση. $\alpha < \omega_0$.

$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = i\omega_1$$

όπου ορίσαμε

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

Η λύση είναι

$$x(t) = e^{-\alpha t} (Ae^{i\omega_1 t} + Be^{-i\omega_1 t})$$

Με τη χρήση γνωστών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων γράφεται τελικά

$$x(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t - \delta) \quad (4.3)$$

Η κίνηση έχει λύση παρόμοιας μορφής με εκείνη χωρίς απόσβεση, αλλά το πλάτος αυτής είναι χρονικά εξαρτώμενο και μειώνεται εκθετικά

$$A(t) = Ae^{-\alpha t}$$

με συχνότητα ταλάντωσης $\omega_1 < \omega_0$. Η εξέλιξη της $x(t)$ σχεδιάζεται στο γράφημα 4.2. Οι μηδενισμοί του πλάτους διαχωρίζονται από ίσα μεταξύ τους διαστήματα, αλλά δεν συμβαίνει το ίδιο και με τις κορυφές (υπολογίστε τις θέσεις τους). Η παράμετρος απόσβεσης είναι η σταθερά α το αντίστροφο της οποίας έχει διαστάσεις χρόνου

$$[\alpha^{-1}] = [T]$$

Συγκρίνοντας με προηγούμενα κεφάλαια, ορίζουμε τον χαρακτηριστικό χρόνο απόσβεσης

$$\tau = \frac{m}{b} = \frac{1}{2\alpha}$$

4.2.1 Η Ενέργεια

Λόγω της μή διατηρητικής δύναμης που αντιτίθεται στην κίνηση έχουμε απώλεια μηχανικής ενέργειας που μετατρέπεται σε άλλη μορφή. Αν K_0, U_0 είναι η αρχική κινητική και δυναμική ενέργεια αντίστοιχα, ενώ K, U τα αντίστοιχα μετέπειτα χρονική στιγμή t , από το θεώρημα Έργου-Ενέργειας έχουμε

$$K + U = K_0 + U_0 + W_{\mu\delta}$$

ή

$$E(t) = E_0 + W_{\mu\delta}$$

όπου $W_{\mu\delta}$ το έργο της μή διατηρητικής δύναμης $f = -bv$ άρα

$$W_{\mu\delta} = \int f dr = \int_0^t f v dt = - \int_0^t b v^2 dt < 0$$

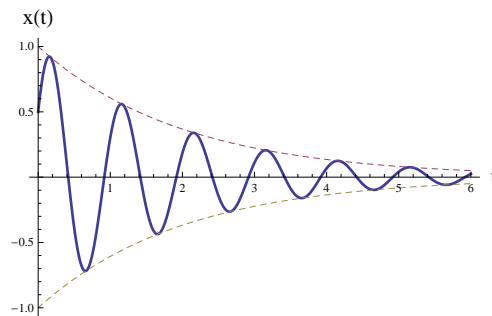
δηλαδή $W_{\mu\delta} < 0$ αρνητικό και συνεπώς η μηχανική ενέργεια $E(t)$ μειώνεται με την πάροδο του χρόνου.

Για να αποκτήσουμε μια αίσθηση του ρυθμού μείωσή της στην περίπτωση μικρής απόσβεσης, $\alpha \ll \omega_1$

$$\begin{aligned} v = \dot{x} &= \frac{d}{dt} (Ae^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t - \delta)) \\ &= -\omega_1 Ae^{-\alpha t} \left(\sin(\omega_1 t - \delta) + \frac{\alpha}{\omega_1} \cos(\omega_1 t - \delta) \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

και λόγω του ότι υποθέσαμε μικρή απόσβεση $\alpha \ll \omega_1$ μπορούμε να παραλείψουμε τον δεύτερο όρο οπότε έχουμε

$$v = -\omega_1 Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t) \quad (4.5)$$



Σχήμα 4.2: Ασθενής απόσβεση

Η κινητική ενέργεια ως συνάρτηση του χρόνου είναι τότε

$$K(t) = \frac{1}{2}m\omega_1^2 A^2 e^{-2\alpha t} \sin^2(\omega_1 t) \quad (4.6)$$

Υπολογίζουμε στη συνέχεια τη δυναμική ενέργεια η οποία προκύπτει να είναι

$$U(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\alpha t} \cos^2(\omega_1 t - \delta)$$

Η συνολική μηχανική ενέργεια είναι λοιπόν

$$E(t) = \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\alpha t} (m\omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t - \delta) + k \cos^2(\omega_1 t - \delta))$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $k = m\omega_0^2$, ενώ $\omega_1 \sim \omega_0$ η τελευταία μπορεί να προσεγγιστεί με

$$E(t) = \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\alpha t} m\omega_0^2 (\sin^2(\omega_0 t - \delta) + \cos^2(\omega_0 t - \delta))$$

δηλαδή

$$E(t) = k \frac{1}{2} A^2 e^{-2\alpha t} = E_0 e^{-2\alpha t} \quad (4.7)$$

Για την ασθενή απόσβεση, καταλήγουμε λοιπόν σε μια απλή φόρμουλα που περιγράφει τη χρονική μείωση της ενέργειας ως συνάρτηση του χρόνου. Λαμβάνοντας δε υπ' όψη τον ορισμό του χαρακτηριστικού χρόνου $\tau = 1/(2\alpha)$ η σχέση γράφεται

$$E(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} E_0 \quad (4.8)$$

Άρα, στο χαρακτηριστικό χρόνο, η ενέργεια μειούται στο $1/e$ της αρχικής.

3. $\alpha > \omega_0$. *Ισχυρή απόσβεση*. Στη περίπτωση αυτή η υπόριζη ποσότητα στον εκθέτη $\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \beta > 0$ είναι πραγματικός αριθμός, επομένως η λύση γράφεται

$$x(t) = e^{-\alpha t} (Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}) \quad (4.9)$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο εκθέτες είναι πραγματικοί αρνητικοί αριθμοί διότι $\beta < \alpha$. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα δεν εκτελεί ταλάντωση, αλλά η κίνηση βαίνει μειούμενη και μετά από χρονικό διάστημα που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες αποσβένυται. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τις συνθήκες

$$x(0) = 0, v(0) = v_0$$

Εφαρμόζουμε τις ανωτέρω στη γενική λύση (4.9) και προσδιορίζουμε τις σταθερές

$$x(t)Ce^{-\alpha t} \sinh(\beta t)$$

και η ταχύτητα

$$v(t) = e^{-\alpha t}(\beta \cosh(\beta t) - \alpha \sinh(\beta t))$$

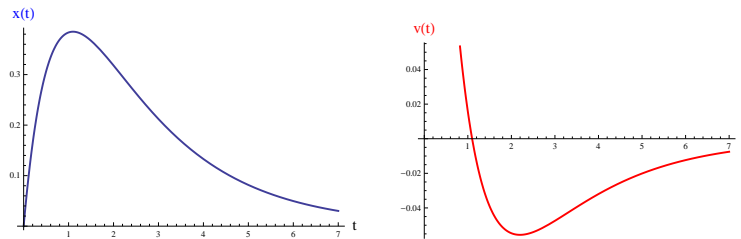
Η λύση σχεδιάζεται στο σχήμα (4.3)

4. $\alpha = \omega_0$. Στην κρίσιμη αυτή τιμή του α οι δύο ιδιοτιμές λ_1, λ_2 ταυτίζονται $\lambda_1 = \lambda_2$ και υπάρχει μόνο μια ανεξάρτητη γραμμικά λύση της Δ.Ε., ενώ η γενική λύση ανάγεται στην $x(t) = Ae^{-\alpha t}$. Τότε, η δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση προκύπτει με γνωστές μεθόδους και είναι $te^{-\alpha t}$, επομένως η γενική λύση παίρνει τη μορφή

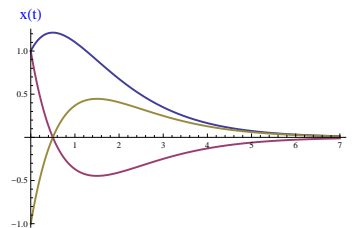
$$x(t) = (A + Bt)e^{-\alpha t}$$

4.3 Εξαναγκασμένη Ταλάντωση

Είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο ότι σε ρεαλιστικά προβλήματα η ταλάντωση φθίνει και με την πάροδο του χρόνου σβήνει εντελώς. Για τη διατήρησή της απαιτείται η επίδραση εξωτερικής δύναμης. Συνήθως περιοδικές ωθήσεις εφαρμόζονται



Σχήμα 4.3: Το διάστημα και η ταχύτητα στην Ισχυρή απόσβεση



Σχήμα 4.4: Το διάστημα στην κρίσιμη απόσβεση

ώστε τα πραγματικά συστήματα να διατηρούνται σε ταλάντωση. Αν $F(t)$ μία τέτοια εξωτερική ώθηση, τότε η εξίσωση κίνησης λαμβάνει τη μορφή

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t) \quad (4.10)$$

Ορίζοντας

$$\frac{b}{m} = 2\alpha, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad f(t) = \frac{F(t)}{m}$$

η εξίσωση (4.10) γράφεται

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (4.11)$$

Συνήθως ορίζουμε τον διαφορικό τελεστή

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{dt^2} + 2\alpha \frac{d}{dt} + \omega_0^2$$

ώστε η Διαφορική Εξίσωση κίνησης γράφεται στη "τελεστική" μορφή

$$\mathcal{L}x(t) = f(t) \quad (4.12)$$

Η εξίσωση κίνησης παρουσία της εξωτερικής επίδρασης $f(t)$ είναι πλέον μη ομογενής Διαφορική Εξίσωση δεύτερης τάξης. Από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων γνωρίζουμε ότι η γενική της λύση είναι γραμμικός συνδυασμός μιας μερικής λύσης αυτής και των δύο λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς. Δηλαδή, αν $x_\mu(t)$ η μερική λύση και $x_1(t), x_2(t)$ οι δύο λύσεις της ομογενούς, τότε

$$x(t) = x_\mu(t) + Ax_1(t) + Bx_2(t) \quad (4.13)$$

Πράγματι, η (4.13) ικανοποιεί την (4.12), διότι, χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα έχουμε

$$\mathcal{L}x(t) = \mathcal{L}x_\mu(t) + A\mathcal{L}x_1(t) + B\mathcal{L}x_2(t) = f(t) + A0 + B0 = f(t)$$

Οι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης αποτέλεσαν το αντικείμενο μελέτης του προηγούμενου εδαφίου. Επομένως, στο το παρόν εδάφιο, αρκεί να βρούμε τη μερική λύση της μη ομογενούς. Από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων μπορούμε να κάνουμε χρήση γνωστών θεωρημάτων και τύπων που δίδουν τη λύση. Όμως στο επόμενο εδάφιο θα εισαγάγουμε μια μέθοδο που εφαρμόζεται σε μια μεγάλη κατηγορία προβλημάτων.

4.3.1 Μιγαδικές Λύσεις

Σε πολλές περιπτώσεις εξαναγκασμένης ταλάντωσης η ασκούμενη εξωτερική δύναμη που εφαρμόζεται στο αποσβενόμενο σύστημα είναι περιοδική. Αλλά και γενικότερα, πολλές μορφές ώθησης αναλύονται μέσω των σειρών Fourier σε σειρά ημιτόνων ή και συνημιτόνων. Συνεπώς, είναι ιδιαίτερα χρήσιμη η μελέτη του ταλαντωτή με εξωτερική ώθηση της μορφής

$$f(t) = f_0 \cos(\omega t) \quad (4.14)$$

Η εξίσωση κίνησης έχει τότε τη μορφή

$$\mathcal{L}x(t) = \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + x = f_0 \cos(\omega t)$$

Θεωρούμε ταυτόχρονα το υποθετικό πρόβλημα εξαναγκασμένης ταλάντωσης $y(t)$, όπου η ώθηση είναι ημιτονοειδούς μορφής αλλά του αυτού πλάτους f_0

$$\mathcal{L}y(t) = \ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + y = f_0 \sin(\omega t)$$

Θα κατασκευάσουμε μια διαφορική εξίσωση για την μιγαδική συνάρτηση

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

Προς τούτο, όπως εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε, αρκεί να σχηματίσουμε το συνδυασμό $\mathcal{L}x(t) + i\mathcal{L}y(t)$. Τότε

$$\ddot{x} + i\ddot{y} + 2\alpha(\dot{x} + i\dot{y}) + x + iy = f_0 \cos(\omega t) + if_0 \sin(\omega t)$$

Είναι όμως $\ddot{x} + i\ddot{y} = \ddot{z}$ κ.ο.κ, ενώ $\cos(\omega t) + i \sin(\omega t) = e^{i\omega t}$ επομένως ως προς τη $z(t)$ η εξίσωση γράφεται

$$\mathcal{L}z(t) = \ddot{z}(t) + 2\alpha\dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = f_0 e^{i\omega t} \quad (4.15)$$

Η εκθετική μορφή του δευτέρου μέλους μας οδηγεί να υποθέσουμε τη μορφή λύσης

$$z(t) = C e^{i\omega t}$$

Αντικαθιστώντας, παίρνουμε την εξίσωση

$$(-\omega^2 + 2\alpha\omega i + \omega_0^2) z(t) = f_0 e^{i\omega t}$$

$$C = \frac{f_0}{\omega_0^2 + 2\alpha\omega i - \omega^2} \quad (4.16)$$

Παρατηρούμε ότι η σταθερά C της λύσης (4.16) είναι μιγαδική διότι f_0 πραγματικό εξ υποθέσεως. Επομένως η C μπορεί να γραφεί ως

$$C = |C|e^{-i\delta} \quad (4.17)$$

όπου δ φάση και $|C|$ το μέτρο αυτής. Για να εκφράσουμε το μέτρο ως πραγματική σταθερά, λαμβάνουμε τη συζυγή της C και έχουμε

$$CC^* = |C|^2 = \frac{f_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}$$

Επίσης, εξισώνοντας τις (4.16), (4.17) έχουμε

$$f_0e^{i\delta} = |C|(\omega_0^2 + 2\alpha\omega i - \omega^2)$$

ή

$$f_0(\cos \delta + i \sin \delta) = |C|(\omega_0^2 + 2\alpha\omega i - \omega^2)$$

Παίρνουμε τον λόγο του φανταστικού ως προς το πραγματικό μέρος και στα δύο μέλη της τελευταίας και εξισώνουμε

$$\tan \delta = \frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (4.18)$$

Η τελευταία μας δίδει τη φάση της σταθεράς C ως προς τα δεδομένα. Η μιγαδική λύση είναι

$$z(t) = Ce^{i\omega t} = |C|e^{i(\omega t - \delta)} \quad (4.19)$$

ή,

$$x(t) + iy(t) = |C|(\cos(\omega t - \delta) + i \sin(\omega t - \delta))$$

Το πραγματικό μέρος της τελευταίας αποτελεί τη ζητούμενη μερική λύση, ήτοι

$$x(t) = |C| \cos(\omega t - \delta) \quad (4.20)$$

Η λύση της ομογενούς εξίσωσης έχει ήδη δοθεί σε προηγούμενο εδάφιο και είναι

$$x_{ομ}(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t}, \quad \lambda_{\pm} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Συνεπώς, η λύση της μή-ομογενούς είναι

$$x(t) = |C| \cos(\omega t - \delta) + Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t} \quad (4.21)$$

4.3.2 Ανάλυση

Είδαμε ότι η γενική λύση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης αποσβενόμενου ταλαντωτή αποτελείται από το άθροισμα τριών όρων. Θα ήταν επιθυμητό να γνωρίζουμε ορισμένα ποιοτικά χαρακτηριστικά της κίνησης. Αρχίζουμε με τη μελέτη των όρων της ομογενούς λύσης. Γνωρίζουμε ότι μετά την πάροδο αρκετού χρόνου οι ταλαντώσεις στον αποσβενόμενο ταλαντωτή χωρίς εξωτερική δύναμη εξασθενούν και τελικά σβήνουν. Άρα,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (Ae^{\lambda+t} + Be^{\lambda-t}) \rightarrow 0$$

Συνεπώς οι όροι αυτοί είναι παροδικοί και για μεγάλα t μπορούν να αγνοηθούν οπότε η λύση γράφεται

$$x(t) = |C| \cos(\omega t - \delta), \quad \text{για } t \gg$$

Οι παροδικοί όροι εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες αλλά συμβάλλουν ουσιαστικά στη διαμόρφωση της κίνησης μόνο για πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Η μακρόχρονη συμπεριφορά του συστήματος καθορίζεται τελικά μόνο από τη μερική λύση.

Για να μελετήσουμε πιά συγκεκριμένα την κίνηση παίρνουμε ως παράδειγμα την ασθενή απόσβεση. Είδαμε ότι αυτή η περίπτωση ορίζεται από τη συνθήκη $\alpha < \omega_0$. Σε αυτή τη περίπτωση γράφουμε

$$\lambda_{\pm} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\omega_1$$

και η λύση της ομογενούς

$$x_{om} = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t - \delta_1)$$

Επομένως, η συνολική λύση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης στην ασθενή απόσβεση είναι

$$x(t) = |C| \cos(\omega t - \delta) + Ae^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t - \delta_1) \quad (4.22)$$

Στο σχήμα (4.5) δείχνεται η ταλάντωση ενός τέτοιου ταλαντωτή για συγκεκριμένες τιμές των διαφόρων σταθερών. Παρατηρούμε ότι οι μεταβατικοί όροι επιδρούν σε αρχικά χρονικά στάδια, όμως με την πάροδο του χρόνου εξασθενούν και το σύστημα ταλαντώνεται με τη συχνότητα της επιβληθείσας δύναμης.

Το πλάτος της ταλάντωσης είδαμε ήδη ότι είναι η τετραγωνική ρίζα της ποσότητας

$$|C|^2 = \frac{f_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}$$

δηλαδή, είναι ανάλογο του πλάτους της εξωτερικής δύναμης $|C| \propto f_0$ όπως αναμένεται. Εξαρτάται από τη φυσική συχνότητα ω_0 , τη συχνότητα ω της επιβαλλόμενης δύναμης και φυσικά την απόσβεση μέσω του α .

Ας διερευνήσουμε τις ιδιότητες του πλάτους για την ενδιαφέρουσα περίπτωση της ασθενούς απόσβεσης, δηλαδή $\alpha \ll \omega_0$. Σε αυτή τη περίπτωση ο δεύτερος όρος $(2\alpha\omega_0)^2$ του παρονομαστή είναι σχετικά μικρός. Σε σχέση με τον πρώτο όρο, διακρίνουμε τις περιπτώσεις

1. το ω είναι πολύ διαφορετικό από το ω_0 . Τότε ο πρώτος όρος του παρονομαστή επικρατεί, το πλάτος C είναι σχετικά μικρό και οι ταλαντώσεις είναι μικρές.
2. το ω πολύ κοντά στο ω_0 . Τότε και οι δύο όροι του παρονομαστή είναι μικροί και οι ταλαντώσεις είναι μεγάλες.

Ειδικότερα για την περίπτωση $\omega = \omega_0$ έχουμε τη μέγιστη τιμή του πλάτους

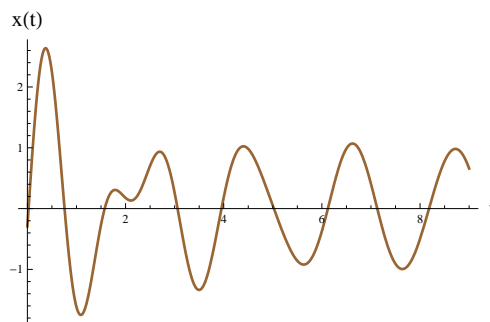
$$|C|_{max} = \frac{f_0}{2\alpha\omega_0}$$

4.3.3 Το πλάτος

Γενικά, το πλάτος λαμβάνει τη μέγιστη τιμή όταν ο παρονομαστής $D = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2$ είναι ελάχιστος. Δηλαδή

$$\frac{dD}{d\omega} = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}$$

Για την ασθενή απόσβεση έχουμε $\alpha \ll \omega_0$ και επομένως $|C|_{max} \sim f_0/(2\alpha\omega_0)$. Στο γράφημα 4.6 σχεδιάζεται το τετράγωνο του πλάτους για ορισμένες τιμές



Σχήμα 4.5: Εξαναγκασμένη ταλάντωση με ασθενή απόσβεση. Για μεγάλα t η εξωτερική ώθηση επικρατεί.

της παραμέτρου α . Καθώς ο συντελεστής απόσβεσης μικραίνει, ο συντονισμός γίνεται εντονότερος και το πλάτος του στενότερο προς την κορυφή, η οποία προφανώς αντιστοιχεί στην τιμή $\omega = \omega_0$.

Ορίζουμε ως πλάτος συντονισμού το μήκος της οριζόντιας γραμμής μεταξύ των σημείων της καμπύλης $|C|^2$ για την τιμή

$$|C(\bar{\omega})|^2 = \frac{1}{2}|C|_{max}^2$$

δηλαδή

$$\frac{4\alpha\omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2\omega_0^2} = \frac{1}{2}$$

Ορίζουμε $x = \omega^2 - \omega_0^2$, οπότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$x^2 - 4\alpha^2x - 4\alpha^2\omega_0^2 = 0$$

Για $\omega_0 \gg \alpha$, λαμβάνουμε ότι σε πρώτη προσέγγιση είναι

$$\bar{\omega} \sim \omega_0 \pm \alpha$$

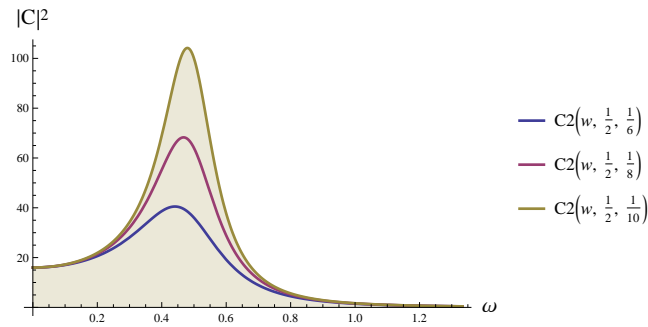
4.3.4 Η φάση

Η φάση δ της εξαναγκασμένης ταλάντωσης δίδεται

$$\delta = \arctan\left(\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad (4.23)$$

Στη συχνότητα συντονισμού $\omega = \omega_0$, ο παρονομαστής μηδενίζεται, άρα έχουμε

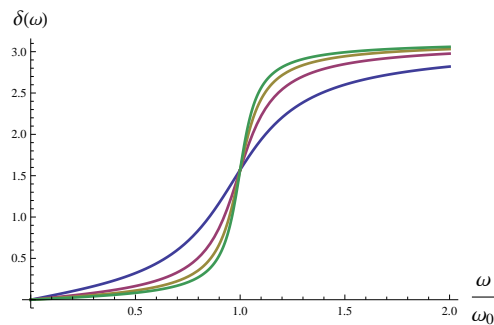
$$\delta = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$$



Σχήμα 4.6: Το πλάτος $|C|^2$ στην εξαναγκασμένη ταλάντωση με ασθενή απόσβεση. Για $\omega = \omega_0$ το πλάτος έχει τη μέγιστη τιμή (συντονισμός).

Στο γράφημα (4.7) σχεδιάζεται η φάση ως συνάρτηση της συχνότητας ω για διάφορες τιμές της παραμέτρου απόσβεσης. Προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα

1. Στην περιοχή $\omega \ll \omega_0$ η φάση είναι πολύ μικρή και οι ταλαντώσεις συμβαδίζουν με την ασκούμενη εξωτερική δύναμη.
2. Στην περιοχή $\omega \sim \omega_0$ η φάση παίρνει τιμές γύρω από την $\delta \sim \frac{\pi}{2}$. Η ταλάντωση ακολουθεί την επιβληθείσα δύναμη με διαφορά φάσης $\frac{\pi}{2}$. Μικρότερες τιμές της σταθεράς απόσβεσης συνεπάγονται μεγαλύτερη κλίση της καμπύλης και επομένως μικρότερο εύρος της ω γύρω από την τιμή $\delta = \pi/2$. Για την περίπτωση του συντονισμού $\omega = \omega_0$, η φάση είναι ακριβώς $\delta = \pi/2$ για κάθε τιμή της σταθεράς απόσβεσης α .
3. Στην περιοχή $\omega \sim \omega_0$ η διαφορά φάσης μεταξύ ασκούμενης δύναμης και ταλαντωτή παίρνει τη μέγιστη τιμή $\delta \sim \pi$.



Σχήμα 4.7: Η φάση δ στην εξαναγκασμένη ταλάντωση με ασθενή απόσβεση. Για $\omega = \omega_0$ παίρνει την τιμή $\frac{\pi}{2}$.

4.3.5 Ασκήσεις

Σώμα μάζης m είναι προσδεμένο στο άκρο ενός ελατηρίου σταθεράς k φυσικού μήκους ℓ . Το ελατήριο περιστρέφεται με κέντρο το άλλο άκρο του σε οριζόντιο δάπεδο χωρίς τριβές με γωνιακή ταχύτητα ω . Προξενούμε μικρή διαταραχή κατά μήκος της ακτίνας περιστροφής. Ως επακόλουθο η μάζα εκτός της περιστροφικής κίνησης, εκτελεί και μικρές ταλαντώσεις κατά μήκος της ακτίνας. Να βρεθεί η συχνότητα της ταλάντωσης.

Λύση

Αρχικά, η m εκτελεί κυκλική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα ω . Η μόνη δύναμη είναι η τάση του ελατηρίου. Αν R η ακτίνα περιστροφής και ℓ το φυσικό μήκος του ελατηρίου, τότε

$$k(R - \ell) = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$$

Ορίζουμε

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

οπότε

$$\omega_0^2(R - \ell) = \omega^2 R$$

Επιλύοντας ως προς την ακτίνα,

$$R = \frac{\ell}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (4.24)$$

Παρατηρούμε ότι καθώς $\omega \rightarrow \omega_0$ η ακτίνα τείνει στο άπειρο, $R \rightarrow \infty$. Δηλαδή έχουμε πάντα $\omega < \omega_0$.

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια μικρή διαταραχή $\epsilon \ll R$, έτσι ώστε η ακτίνα γράφεται

$$r = R + \epsilon$$

Στις πολικές συντεταγμένες η δύναμη έχει συνιστώσες $\vec{F} = (F_r, F_\phi)$. Επειδή η διαταραχή περιορίζεται κατά μήκος της ακτίνας, η $F_\phi = 0$, επομένως

$$\begin{aligned} F_r &= m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = -k(r - \ell) \\ F_\phi &= m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη επί r

$$rF_\phi = m(r^2\ddot{\phi} + 2r\dot{r}\dot{\phi}) = 0$$

Από την οποία προκύπτει ότι

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = 0 \rightarrow r^2\dot{\phi} = C$$

η οποία είναι ισοδύναμη με τη διατήρηση της στροφορμής. Συγκρίνοντας με την αρχική κατάσταση

$$R^2\omega = r^2\dot{\phi} \rightarrow \dot{\phi} = \frac{R^2}{r^2}\omega$$

Αντικαθιστούμε από την τελευταία τη $\dot{\phi}$ στον τύπο για την F_r

$$m \left(\ddot{r} - \frac{R^4}{r^3}\omega^2 \right) = -k(r - \ell)$$

Επειδή $\ddot{R} = 0$, και $r = \epsilon + R$ είναι

$$\ddot{r} = \ddot{\epsilon}$$

Αντικαθιστούμε, διαιρούμε με m και έχουμε

$$\ddot{\epsilon} - \frac{R^4}{(\epsilon + R)^3}\omega^2 = -\omega_0^2(\epsilon + R - \ell)$$

Στο πρώτο μέρος γράφουμε τον παρονομαστή ως λόγο του ϵ/R και αναπτύσσουμε σε σειρά

$$\frac{1}{\left(\frac{\epsilon}{R} + 1\right)^3} \approx 1 - \frac{3\epsilon}{R} + \frac{6\epsilon^2}{R^2} + O(\epsilon^3)$$

Από την ανωτέρω ανάπτυξη κρατούμε μόνο τον όρο ανάλογο του ϵ και αντικαθιστούμε

$$\ddot{\epsilon} + 3\omega^2\epsilon - \omega^2R = -\omega_0^2(\epsilon + R - \ell)$$

Κάνοντας χρήση της αρχικής εξίσωσης $\omega_0^2(R - \ell) = \omega^2R$ απαλοφουμε τους ίσους όρους στα δύο μέλη της εξίσωσης και λαμβάνουμε

$$\ddot{\epsilon} + (3\omega^2 + \omega_0^2)\epsilon = 0 \quad (4.26)$$

Η τελευταία, είναι η εξίσωση της αρμονικής κίνησης με λύση

$$\epsilon = A \cos(\omega_1 t - \delta)$$

όπου A, δ σταθερές και ω_1 η συχνότητα ταλάντωσης

$$\omega_1 = \sqrt{3\omega^2 + \omega_0^2} = \sqrt{3\omega^2 + \frac{k}{m}}$$

4.3.6 Ασκήσεις

1. Σημειακή μάζα m κείται πάνω σε λείο επίπεδο προσδεμένη στην άκρη P ελατηρίου σταθεράς k του οποίου το άλλο άκρο Q είναι σταθερό όπως στο σχήμα 1. Τη στιγμή $t = 0$ προσδίδουμε ταχύτητα $v_0 \hat{y}$, η δε κίνηση του σώματος περιορίζεται από κυκλική στεφάνη ακτίνας $R = OP = OQ = PQ/2$. Υπο ποιές συνθήκες το σώμα θα φτάσει στο σημείο $T = (0, R)$ και με ποιά ταχύτητα διέρχεται από αυτό;

2. Διδιάστατος ιστροπικός ταλαντωτής

Στην απλούστερη περίπτωση ταλάντωσης στις 2 διαστάσεις υποθέτουμε την ίδια κοινή σταθερά k και για τις δύο συνιστώσες του ταλαντωτή. Τότε, η κίνησή του διέπεται από την

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r}, \quad \vec{r} = (x, y)$$

Οι λύσεις προκύπτουν άμεσα. Θέτοντας $\omega^2 = \frac{k}{m}$, είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t - \delta_1) \\ y(t) &= B \cos(\omega t - \delta_2) \end{aligned} \quad (4.27)$$

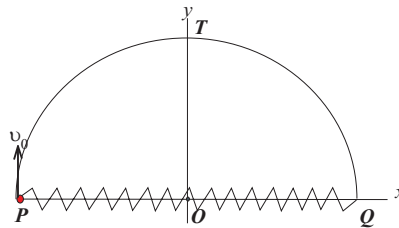
Το σύστημα εμφανίζει περιοδικότητα $T = 2\pi/\omega$. Η τροχιά είναι εν γένει διδιάστατη και η μορφή της εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες που προσδιορίζουν τις σταθερές $A, B, \delta_{1,2}$.

Για την διευκόλυνση της μελέτης δεχόμαστε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η μια φάση είναι μηδέν

$$\delta_2 = 0, \quad \delta_1 = \delta$$

Τότε,

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t - \delta) \\ y(t) &= B \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (4.28)$$



Το σύστημα διαγράφει διάφορες κλειστές τροχιές ανάλογα με την τιμή της φάσης δ . Οι απλούστερες περιπτώσεις προκύπτουν για τις τιμές $\delta = 0, \frac{\pi}{2}$

- Αν $\delta = 0$, η χρονική εξέλιξη του λόγου των πλατών ως προς τις δύο κατευθύνσεις δίδεται

$$\tan \phi = \frac{y}{x} = \frac{A_y}{A_x}$$

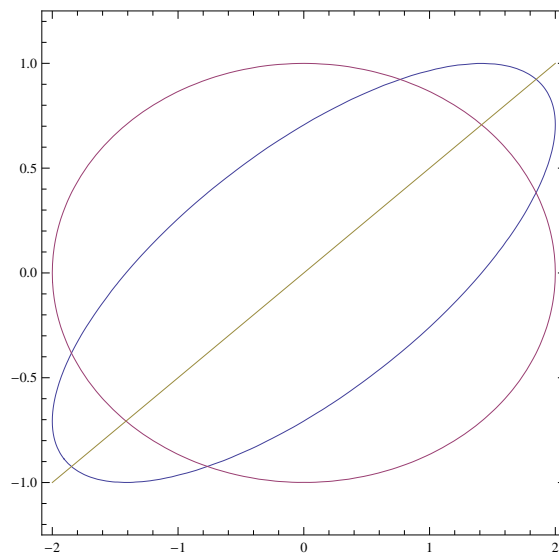
δηλαδή η εφαπτομένη της γωνίας (και συνεπώς η γωνία) παραμένει σταθερή. Δηλαδή, η κίνηση γίνεται παλιδρομικά πάνω σε ευθεία γραμμή.

- Αν $\delta = \frac{\pi}{2}$, τότε διαιρώντας τις εξισώσεις με τα αντίστοιχα πλάτη A, B και υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$$

που είναι η εξίσωση της έλλειψης, με άξονες A, B επί των x, y αντίστοιχα.

- Αν $\delta \neq 0, \frac{\pi}{2}$ η απαλειφή του χρόνου από τις εξισώσεις γίνεται πάλι με τη χρήση των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων και οδηγούν σε δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x ,. Άρα, η κίνηση είναι πάλι κλειστή ελλειπτική καμπύλη η οποία έχει πλέον άξονες που δεν ταυτίζονται με τους x, y . Η γενική δευτεροβάθμια εξίσωση ζητείται στην ακόλουθη άσκηση.



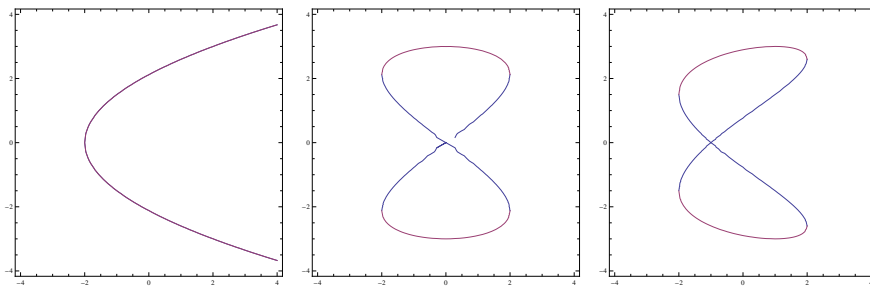
Σχήμα 4.8: Ισότροποι τρόποι ταλάντωσης σε δύο διαστάσεις $\delta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

Άσκηση Για ευκολία υποθέστε $\delta_1 = 0$ και δείξτε ότι οι εξισώσεις συνδυάζονται έτσι ώστε

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{c}\right)^2 = 1$$

Υπολογίστε τις σταθερές a, b, c ως προς τις αρχικές και σχεδιάστε τις καμπύλες $y(x)$ για $\delta_2 = 0, \pi/4, \pi/2$. Ειδικότερα, δείξτε ότι για $\delta_2 \pi/2$ είναι

$$\left(\frac{x}{A} - \sqrt{2}\frac{y}{B}\right)^2 + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 1$$



Σχήμα 4.9: Μη ιστροπικός ταλαντωτής $\omega_1 = 2\omega_2$ για τις φάσεις $\delta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ αντίστοιχα.

Διδιάστατος μή-ισοτροπικός ταλαντωτής

Στη παρούσα περίπτωση οι ταλαντώσεις κατά τις δύο κάθετες μεταξύ τους κατευθύνσεις έχουν διαφορετικές σταθερές $k_1 \neq k_2$. Άρα ορίζονται δύο διαφορετικές συχνότητες

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{k_2}{m}$$

και επομένως η ταλάντωση εκτελείται με διαφορετικές περιόδους κατά τις δύο κατευθύνσεις

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$$

Η κίνησή του διέπεται από την

$$m(\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j}) = -(k_1x\hat{i} + k_2y\hat{j})$$

Λύσεις

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_1 t - \delta_1) \\ y(t) &= B \cos(\omega_2 t - \delta_2) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Ο ταλαντωτής εμφανίζει κοινή περίοδο και επανέρχεται περιοδικά στην αρχική του κατάσταση εφόσον υπάρχουν ακέραιοι n_1, n_2 τέτοιοι ώστε

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2$$

δηλαδή, εφόσον ο λόγος των συχνοτήτων

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

είναι ρητός αριθμός. Αλλιώς η κίνηση δεν είναι περιοδική αλλά εξακολουθεί να περιορίζεται σε ορθογώνιο που σχηματίζεται από τα μέγιστα πλάτη $[-A, A]$ και $[-B, B]$.

Η κίνηση καλείται ημιπεριοδική εφόσον

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{n_1}{n_2} \rightarrow \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} = \frac{n_1}{n_2}$$

Οι τροχιές που διαγράφονται από τέτοια συστήματα καλούνται σχήματα Lissajous από το Γάλλο φυσικό που τα μελέτησε.

3. Θεωρούμε τα δύο συζευγμένα εκκρεμή του σχήματος και μικρές μετακινήσεις x_1 και x_2 από τις θέσεις ισορροπίας, με αρχικές συνθήκες

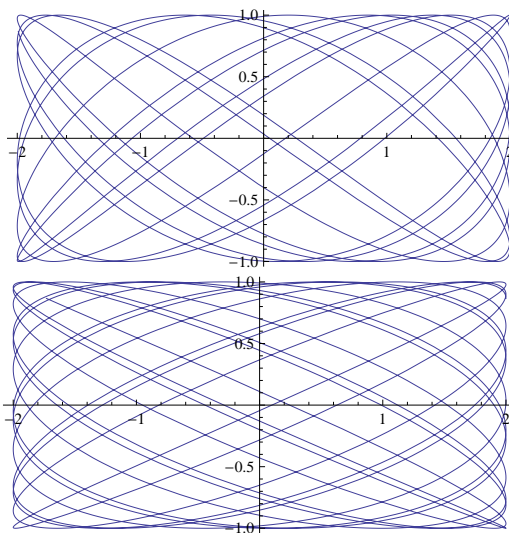
$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \dot{x}_1(0) = v_1, \dot{x}_2(0) = 0$$

Οι μετατοπίσεις x_1 και x_2 στο σύστημα υπόκεινται στις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + \frac{mg}{l}x_1 + k(x_1 - x_2) &= 0 \\ m\ddot{x}_2 + \frac{mg}{l}x_2 + k(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned}$$

Από τη μορφή του φυσικού προβλήματος και των συνοριακών συνθηκών οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι μετασχηματισμός *Laplace* είναι κατάλληλος για να μετατρέψει το σύστημα διαφορικών εξισώσεων σε ένα αλγεβρικό σύστημα. Κάνοντας χρήση των συνοριακών συνθηκών και του τύπου μετασχηματισμού των παραγώγων έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\ddot{x}_1(t)] &= s^2 F_1(s) - x_1(0) = s^2 F_1(s) - v \\ \mathcal{L}[\ddot{x}_2(t)] &= s^2 F_2(s) \end{aligned}$$



Σχήμα 4.10: Ημιπεριοδικός (quasi-periodic) μή ισοτροπικός ταλαντωτής $\omega_1 = \sqrt{2}, \sqrt{5}$ και $\omega_2 = 2$ για τη φάση $\delta = \frac{\pi}{6}$.

Λαμβάνοντας στη συνέχεια τον μετασχηματισμό *Laplace* των διαφορικών εξισώσεων καταλήγουμε στο ακόλουθο αλγεβρικό σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} m(s^2 F_1 - v) = -\frac{mg}{l} F_1 + k(F_2 - F_1) \\ ms^2 F_2 = -\frac{mg}{l} F_2 + k(F_1 - F_2) \end{array} \right\}$$

Επιλύοντας ως προς F_1, F_2 έχουμε

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \frac{v(s^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m})}{(s^2 + \frac{g}{l})(2\frac{k}{m} + \frac{g}{l} + s^2)} \\ &= \frac{v}{2} \left\{ \frac{1}{s^2 + \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}} + \frac{1}{s^2 + \frac{g}{l}} \right\} \\ &= \frac{v}{2} \left\{ \frac{1}{s^2 + A^2} + \frac{1}{s^2 + B^2} \right\} \end{aligned}$$

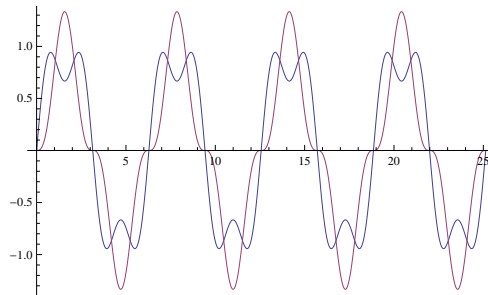
και αναλόγως για την F_2 . Ορίζουμε τις συχνότητες

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{k}{m}$$

Λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό έχουμε

$$x_n(t) = \frac{v}{2} \left\{ \frac{\sin[\omega_1 t]}{\sqrt{\frac{g}{l}}} + (-)^{n-1} \frac{\sin[(\sqrt{\omega_1^2 + 2\omega_2^2})t]}{\sqrt{\omega_1^2 + 2\omega_2^2}} \right\}$$

με $n = 1, 2$ αντίστοιχα για τις x_1, x_2 . Στο σχήμα δείχνονται τα διαγράμματα των δύο πλατών για ρητούς $\omega_1 = 1, \sqrt{\omega_1^2 + 2\omega_2^2} = 3$. Σε αυτή την περίπτωση οι ταλαντώσεις είναι περιοδικές.



Σχήμα 4.11: Συζευγμένα ελατήρια.

4. Η δυναμική ενέργεια μάζας m σε απόσταση r από την αρχή είναι

$$U(r) = A\left(\frac{r}{R} + a^2\frac{R}{r}\right)$$

όπου $0 < r < \infty$ και a, A, R θετικές σταθερές. Να βρεθεί η θέση ισορροπίας r_0 και ναδειχθεί ότι για μικρές μετατοπίσεις από αυτή το σύστημα συμπεριφέρεται ως αρμονικός ταλαντωτής. Προσδιορίστε τη σταθερά k .

5. Να παραχθεί η εξίσωση των τροχιών $f(x, y) = 1$ για την περίπτωση ανισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή με λύσεις

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(2\omega t) \\ y(t) &= B \cos(\omega t - \delta) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Από αυτή συνάγετε τις εξισώσεις για τις ειδικές περιπτώσεις $\delta = 0, \frac{\pi}{4}$

6. Στο μάθημα μελετήσαμε τη περίπτωση δύο μαζών σε οριζόντιο επίπεδο συνδεδεμένες με ελατήρια με ίσες σταθερές k και ίσα μήκη ελατηρίων. Επαναλάβετε την άσκηση με διαφορετικές μεταξύ τους σταθερές k_1, k_2 όπως στο σχήμα (4.12).

Λύση. Η άσκηση είναι χρήσιμη για εισαγάγουμε μια νέα μέθοδο επίλυσης.

Υπόδειξη. Ας υποθέσουμε μετατοπίσεις x_1, x_2 των δύο μαζών από τη θέση ισορροπίας. Οι εξισώσεις κίνησης γράφονται

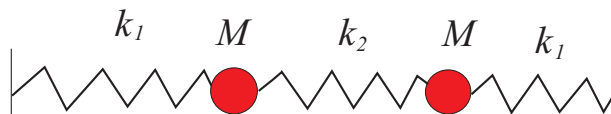
$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -k_1x_2 - k_2(x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Αν ορίσουμε το διάνυσμα

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

και τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1+r & -1 \\ -1 & 1+r \end{pmatrix} \quad (4.33)$$



Σχήμα 4.12: Τα ελατήρια της άσκησης 2

όπου $r = \omega_1^2/\omega_2^2$ οι εξισώσεις παίρνουν τη μορφή

$$\frac{d^2}{dt^2}|x\rangle + \omega_2^2 A|x\rangle = 0 \quad (4.34)$$

Αν R ο διαγωνίζων πίνακας $R^{-1}AR = I$, η προηγούμενη γράφεται

$$\frac{d^2}{dt^2}R^{-1}|x\rangle + \omega_2^2 R^{-1}ARR^{-1}|x\rangle = 0$$

Αν ορίσουμε ένα νέο διάνυσμα $|y\rangle = R^{-1}|x\rangle$ και οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι a_1, a_2 καταλήγουμε στο σύστημα

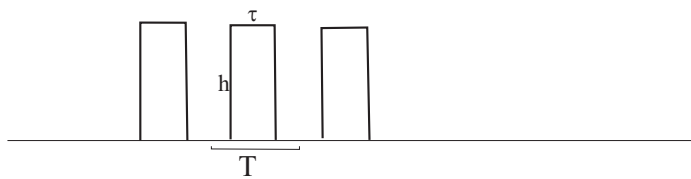
$$\ddot{y}_1 + \omega_1 y_1 = 0, \quad \ddot{y}_2 + \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} y_2 = 0$$

του οποίου οι λύσεις είναι γνωστές. Προσδιορίστε τις ιδιοτιμές a_1, a_2 και βρείτε τις λύσεις.

7. Με τη μέθοδο των σειρών Fourier μελετήστε τη περίπτωση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

όπου η $f(t)$ είναι ο περιοδικός τετραγωνικός παλμός του σχήματος (4.13)



Σχήμα 4.13: Περιοδικός τετραγωνικός παλμός ύψους h .

4.4 Η γενική λύση του εκκρεμούς. Διαγράμματα φάσεων

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια το απλό εκκρεμές με μήκος νήματος ℓ και μάζα σφαιριδίου m , το οποίο αφήνουμε ελεύθερο από γωνία ϕ μετρούμενη ως προς την κατακόρυφη. Θεωρούμε την κατακόρυφη ως τον άξονα x και την οριζόντια διερχόμενη από το σημείο ανάρτησης ως τον άξονα y . Τότε, οι συνιστώσες δύναμης σε πολικές συντεταγμένες

$$F_\phi = m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}), \quad F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)$$

Στην περίπτωση του εκκρεμούς με $r = \ell$ =σταθερό είναι $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ οπότε έχουμε

$$F_\phi = m\ell\ddot{\phi}, \quad F_r = -m\ell\dot{\phi}^2$$

Στη παρούσα περίπτωση η κινητήρια δύναμη είναι το βάρος του σώματος mg το οποίο αναλύουμε σε κεντρομόλο και επιτρόχια συνιστώσα

$$mg \cos \phi, \quad mg \sin \phi$$

Κατά τη διεύθυνση του νήματος έχουμε την τάση T και την $mg \cos \phi$, ενώ κατά μήκος της κυκλικής τροχιάς μόνο την $mg \sin \phi$. Από το σχήμα βλέπουμε ότι οι εξισώσεις κίνησης του εκκρεμούς είναι

$$\begin{aligned} m\ell\ddot{\phi} &= -mg \sin \phi \\ m\ell\dot{\phi}^2 &= T - mg \cos \phi \end{aligned} \quad (4.35)$$

Για την επιτρόχια συνιστώσα έχουμε κίνηση μόνο λόγω της $(-mg \sin \phi)$ η οποία δρά ως δύναμη επαναφοράς. Η επίλυσή της δίνει την εξέλιξη της γωνίας ϕ ως συνάρτηση του χρόνου, ενώ η δεύτερη την εκάστοτε τάση T του νήματος.

Η εξίσωση που καθορίζει την κίνηση του εκκρεμούς γράφεται

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{\ell} \sin \phi = 0 \quad (4.36)$$

Για κίνηση σε μικρές γωνίες μπορούμε να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση του ημιτόνου με τη γωνία $\sin \phi \approx \phi$, επομένως η εξίσωση κίνησης γράφεται

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{\ell} \phi = 0$$

Η λύση είναι τότε

$$\phi(t) = C \cos(\omega t + \delta), \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Γενική περίπτωση

Για κίνηση σε μεγάλες γωνίες ϕ η προσέγγιση δεν ισχύει και η εξίσωση δεν περιγράφει αρμονική ταλάντωση ούτε κατά προσέγγιση. Επομένως, πρέπει να επιδώσουμε λύση της (4.36). Αρχίζουμε τη μελέτη με την εύρεση σταθερών της κίνησης. Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (4.36) με $\dot{\phi}$ και έχουμε

$$\dot{\phi}\ddot{\phi} + \omega^2\dot{\phi}\sin\phi = 0$$

Από την οποία προκύπτει

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \omega^2 \cos\phi \right) = 0$$

Από την εξίσωση προκύπτει το πρώτο ολοκλήρωμα κίνησης

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \omega^2 \cos\phi = C \quad (4.37)$$

που αντιστοιχεί στη διατήρηση ενέργειας. Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας με $m\ell^2$, και θέτοντας $m\ell^2 C = E$ λαμβάνουμε

$$\frac{1}{2}m(\ell\dot{\phi})^2 - mg\ell \cos\phi = E$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $s = \ell\phi$ και $v = \dot{s} = \ell\dot{\phi}$ ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στην κινητική ενέργεια $K = \frac{1}{2}mv^2$. Αν θεωρήσουμε σημείο αναφοράς την οριζόντια γραμμή που διέρχεται από το σημείο ανάρτησης του εκκρεμούς, ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί στη δυναμική ενέργεια $U = -mg\ell \cos\phi$, άρα,

$$K + U = E$$

Επιστρέφοντας στην εξίσωση (4.36) θα την μελετήσουμε για δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση θα υποθέσουμε ότι το σώμα δεν έχει αρκετή ενέργεια για να εκτελέσει πλήρη περιστροφή και φτάνει σε μια μέγιστη γωνία $\phi_{max} < \pi$. Στη θέση αυτή $v_{\phi_{max}} = 0$ και επομένως $\dot{\phi}_{max} = 0$. Αντικαθιστούμε στο πρώτο ολοκλήρωμα της κίνησης (4.37) και λαμβάνουμε

$$C = -\omega^2 \cos\phi_{max} \quad (4.38)$$

άρα,

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = \omega^2 \cos\phi - \omega^2 \cos\phi_{max} \quad (4.39)$$

η οποία επιλύεται ως προς τη $\dot{\phi}$ και δίδει

$$\dot{\phi} = \pm\sqrt{2}\omega\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_{max}} \quad (4.40)$$

Αντικαθιστούμε $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$ και διαχωρίζουμε τις μεταβλητές οπότε λαμβάνουμε

$$dt = \pm \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_{max}}}$$

Η περίοδος της κίνησης προκύπτει από την ολοκλήρωση της τελευταίας. Αν τα όρια ολοκλήρωσης της γωνίας είναι $\phi = [0, \pm \phi_{max}]$ η περίοδος είναι

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\phi_{max}} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_{max}}} \quad (4.41)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό ανάγεται σε καθιερωμένη μορφή με τους ακόλουθους μετασχηματισμούς. Η υπόριζη ποσότητα γράφεται

$$D = \cos \phi - \cos \phi_{max} = 2 \left(\sin^2 \frac{\phi_{max}}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2} \right)$$

ενώ, ορίζοντας τη σταθερά

$$k^2 = \sin^2 \frac{\phi_{max}}{2} \quad (4.42)$$

παίρνει τη μορφή

$$D = 2(k^2 - \sin^2 \frac{\phi}{2}) \quad (4.43)$$

Στη συνέχεια ορίζουμε μια νέα γωνία θ μέσω της σχέσης

$$\sin \frac{\phi}{2} = k \sin \theta \quad (4.44)$$

Αντικατάστασή της στην έκφραση για την D δίδει

$$D = 2k^2 \cos^2 \theta$$

Από τις (4.42) και (4.44) προκύπτει ότι τα όρια της γωνίας είναι

$$\theta = [0, \frac{\pi}{2}]$$

Διαφορίζοντας την (4.44) λαμβάνουμε επίσης

$$d\phi = \frac{2k \cos \theta d\theta}{\cos \phi/2} = \frac{2k \cos \theta d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \phi/2}}$$

και με τη χρήση της (4.44)

$$d\phi = \frac{2k \cos \theta d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (4.45)$$

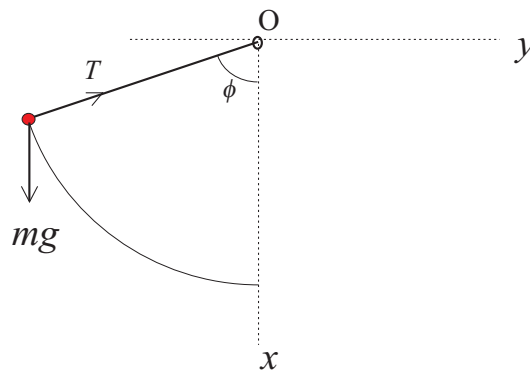
Αντικαθιστούμε την παραπάνω μαζί με την έκφραση για την D στην (4.41) και ευρίσκουμε ότι στη περίπτωση $\phi_{max} < \pi$ η περίοδος κίνησης δίδεται από το ολοκλήρωμα

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (4.46)$$

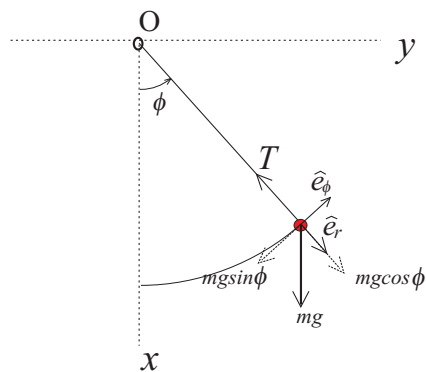
όπου

$$\sin \frac{\phi}{2} = k \sin \theta, \quad k = \sin \frac{\phi_{max}}{2}$$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως ελλειπτικό ολοκλήρωμα.



Σχήμα 4.14: Το εκκρεμές



Σχήμα 4.15: Οι δυνάμεις στο εκκρεμές

Ως συνάρτηση του k συμβολίζεται ως εξής

$$\frac{\mathcal{K}(\frac{k^2}{k^2-1})}{1-k^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad (4.47)$$

Μπορεί να υπολογιστεί για διάφορες τιμές του k με τη χρήση υπολογιστή. Για μικρά k μπορούμε να προσεγγίσουμε την τιμή του αφού κάνουμε ανάπτυξη σε σειρά της ποσότητας στον παρονομαστή και κρατήσουμε τους επιθυμητούς όρους. Για την ειδική περίπτωση $k = 0$ έχουμε $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.

Για να αποκτήσουμε μια πρώτη εικόνα των τιμών, ορίζουμε την παράμετρο

$$\tau = \frac{T}{4\sqrt{\ell/g}} \quad (4.48)$$

η οποία σχεδιάζεται στο 4.16. Η καμπύλη τείνει ασυμπτωτικά στο άπειρο καθώς $k \rightarrow 1$.

Άσκηση Αναπτύξτε σε σειρά Taylor ως προς την παράμετρο k τον παρονομαστή (δηλαδή $1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2(\theta) + \frac{3}{8}k^4 \sin^4(\theta) + O(k^5)$) και υπολογίστε την περίοδο με προσέγγιση 2 όρων.

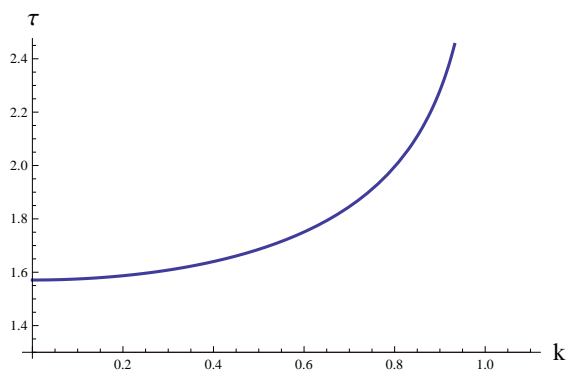
• Αν η ταχύτητα είναι διάφορη του μηδενός για κάθε γωνία, τότε εκτελεί πλήρεις περιστροφές. Στη θέση $\phi_0 = \pi$, είναι $\dot{\phi}_0 \neq 0$ και τότε η εξίσωση κίνησης γράφεται

$$\frac{d\phi}{dt} = \pm \sqrt{\dot{\phi}_0^2 + 2\omega^2(1 + \cos \phi)}$$

Διαγράμματα φάσεων

Η ταχύτητα $v = \ell\dot{\phi}$ ως συνάρτηση της γωνίας μπορεί να εκφραστεί ως εξής

$$v = \pm \sqrt{2g\ell} \sqrt{\cos \phi - \cos \phi_{max}}$$



Σχήμα 4.16: Η παράμετρος τ της (4.48).

Με τη χρήση της, μπορούμε να γνωρίζουμε την ταχύτητα για κάθε γωνία εφόσον είναι γνωστή η αρχική ϕ_{max} . Τα διαγράμματα για διάφορες τιμές της τελευταίας καλούνται διαγράμματα φάσεων.

Ας θεωρήσουμε πρώτα την ειδική τιμή $\phi_{max} = \pi$. Τότε

$$v = \pm \sqrt{2gl} \sqrt{\cos \phi + 1}$$

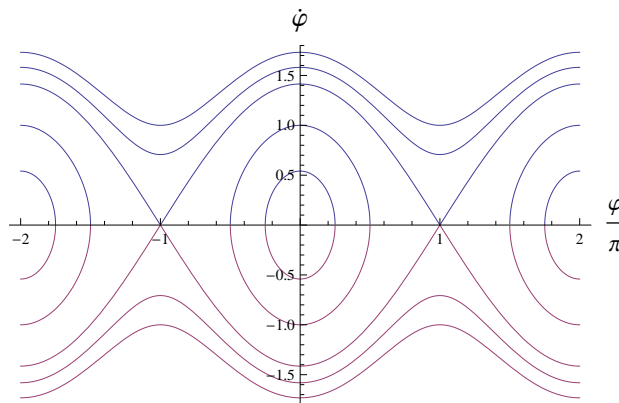
και έχουμε μηδενισμό της ταχύτητας στα σημεία $\phi = \pm n\pi$. Για $\phi = 0$ έχουμε τη μέγιστη (ελάχιστη) τιμή $v = \pm 2\sqrt{gl}$. Οι δύο καμπύλες αυτές τέμνουν τον άξονα $x \rightarrow \phi/\pi$ του σχήματος 4.17 στους ακεραίους ενώ επί του κάθετου άξονα v έχουν τη μέγιστη τιμή. Για περιπτώσεις $\phi < \pi$ έχουμε ελλειπτικές κλειστές καμπύλες που τέμνουν τον οριζόντιο άξονα στα σημεία που η ταχύτητα μηδενίζεται. Για περιπτώσεις πλήρους περιστροφής όπου η ταχύτητα δεν μηδενίζεται πουθενά, οι αντίστοιχες καμπύλες δεν τέμνουν τον οριζόντιο άξονα όπως δείχνουν οι αντίστοιχες καμπύλες στα διαγράμματα φάσεων του σχήματος 4.17.

4.4.1 Ασκήσεις

1. Σημειακή μάζα m ισορροπεί μεταξύ δύο ελατηρίων σταθεράς k και μήκους ℓ_0 όπως στο σχήμα (4.18). Τα ελατήρια είναι τεταμένα και δέχονται τάση T_0 έκαστο. Μετατοπίζουμε τη μάζα κατά μικρό διάστημα x κάθετα στην ευθεία της θέσης ισορροπίας. Να μελετηθεί η κίνηση.

- Διδιάστατη κίνηση ενός ταλαντωτή περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$x_1(t) = A \cos(5\pi t), \quad y_1(t) = B \cos(3\pi t - \delta)$$



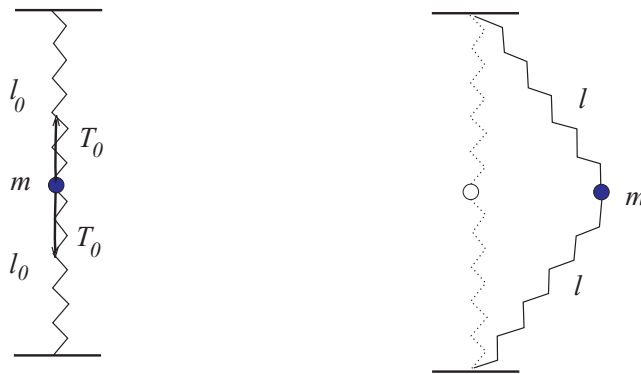
Σχήμα 4.17: Διάγραμμα φάσεων του εκκρεμούς

ενώ ενός δευτέρου διέπεται από τις

$$x_2(t) = A \cos(\pi t), \quad y_2(t) = B \cos(\sqrt{2}\pi t)$$

Είναι οι παραπάνω κινήσεις περιοδικές και αν ναι, ποιά η περίοδός τους;

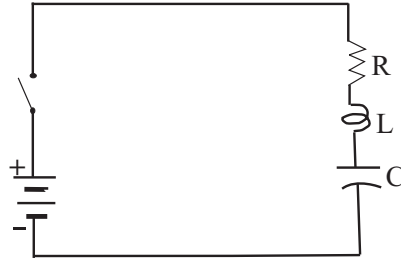
2. Βλήμα μάζας m και οριζόντια ταχύτητα v κτυπά ελατήριο ενσωματωμένο σε σώμα μάζας M που βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο με αρχική ταχύτητα μηδέν (βλ. σχήμα). Μετά την κρούση το σύστημα κινείται χωρίς τριβές. Να βρεθεί το μέγιστο μήκος συσπίρωσης του ελατηρίου.
3. Το ηλεκτρικό κύκλωμα $L - R - C$ (πηγίο, αντίσταση, πυκνωτής) του σχήματος συνδέεται σε σταθερή τάση V και διαρέεται από ρεύμα $I(t)$. Κάνετε εφαρμογή των νόμων του *Kirchoff* και δείξτε ότι η διαφορική εξίσωση που προκύπτει αντιστοιχεί σε σύστημα αποσβενόμενου ταλαντωτή. Βρείτε τη συνάρτηση για τη χρονική εξάρτηση του ρεύματος.
4. Μαύρη μπίλια κινούμενη με ταχύτητα v_1 παράλληλα προς τις δύο πλευρικές δοκούς AB, DC κτυπά ακίνητη κόκκινη ευρισκόμενη στο μέσο της



Σχήμα 4.18: Δύο ελατήρια και μάζα m σε θέση ισορροπίας (αριστερά) και κατά εγκάρσια μετατόπιση (δεξιά)



Σχήμα 4.19: Το σχήμα της άσκησης



Σχήμα 4.20: Το κύκλωμα LRC

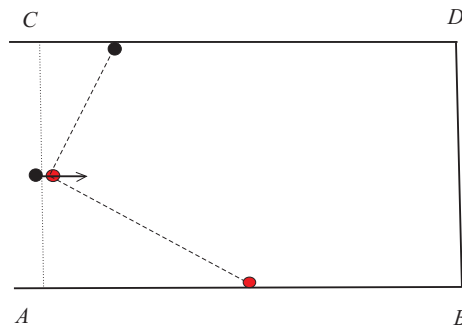
απόστασης ℓ (βλέπε σχήμα). Μετά την κρούση η κόκκινη κυτπά την AB σε απόσταση $\sqrt{3}\ell/2$. Να βρεθεί η πορεία της μαύρης μπίλιας και το σημείο πρόσκρουσης με το CD .

5. Φιάλη ύψους h επιφανείας βάσης A ευρίσκεται εντός δοχείου με νερό και ισορροπεί όπως στο σχήμα. Στη συνέχεια βυθίζεται σε βάθος d ($h > d > d_0$). Να μελετηθεί η κίνηση. (Τριβές κλπ δεν υπάρχουν)
6. Η Διαφορική Εξίσωση της κίνησης σε δυναμικό για κεντρική δύναμη $F(r)$ με ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο t γράφεται

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{L^2}{mr^3} + F(r)$$

Δείξτε ότι η αντίστοιχη εξίσωση με ανεξάρτητη μεταβλητή τη γωνία ϕ στο επίπεδο της κίνησης είναι της μορφής

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + \kappa u + \lambda f(u) = 0$$

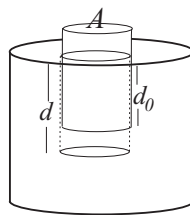


Σχήμα 4.21: Κρούση δύο σφαιριδίων ίσης μάζας (μπίλιες)

και υπολογίστε τη σταθερά k και την $f(u)$ ως προς την αρχική $F(r)$. Αν

$$F(r) = -k \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\ell}{r^3} \right)$$

όπου k, ℓ κατάλληλες θετικές σταθερές, να βρεθεί η $r(\phi)$.



Σχήμα 4.22: Βύθιση φιάλης της άσκησης 3