

Γεωργίου Κ. Λεοντάρη
Καθηγητή Θεωρητικής Φυσικής

Παραδόσεις Κλασικής Μηχανικής

Τμήμα Φυσικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Ιωάννινα 2014

Κεφάλαιο 5

Κίνηση σε Κεντρικό Δυναμικό

Μετελήσαμε κυρίως το πρόβλημα σώματος μέσα σε δυναμικό, και ειδικότερα σε κεντρικό δυναμικό. Όμως, η δημιουργία του δυναμικού μέσα στο οποίο ευρίσκεται το σώμα απαιτεί την ύπαρξη ενός δεύτερου σώματος. Συνεπώς το πρόβλημα εμπλέκει τελικά την ύπαρξη τουλάχιστον δύο σωμάτων και την αλληλεπίδραση μεταξύ τους.

Ας θεωρήσουμε δύο σώματα με μάζες m_1, m_2 . Θα αρχίσουμε τη μελέτη με την υπόθεση ύπαρξης μεταξύ τους διατηρητικής δύναμης η οποία είναι κεντρική και σφαιρικά συμμετρική. Αν $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21}$ οι δυνάμεις που ασκούν το ένα στο άλλο, από τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα γνωρίζουμε ότι $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Επειδή υποθέσαμε ότι οι δυνάμεις είναι κεντρικές, έπεται ότι η κατεύθυνσή τους είναι επί της ευθείας που ενώνει τα δύο κέντρα. Αν \vec{r}_1, \vec{r}_2 οι θέσεις των σωμάτων, το διάνυσμα

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \hat{e}_r = r \hat{e}_r \quad (5.1)$$

ενώνει τα δύο κέντρα των σωμάτων και επομένως, για τις δυνάμεις μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= f(r) \hat{e}_r \\ \vec{F}_{21} &= -f(r) \hat{e}_r \end{aligned} \quad (5.2)$$

όπου η συνάρτηση $f(r)$ εξαρτάται μόνο από το μέτρο της μεταξύ τους απόστασης. Οι δυνάμεις είναι ελκτικές αν $f(r) < 0$ και απωστικές αν $f(r) > 0$.

Οι εξισώσεις κίνησης γράφονται

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= f(r) \hat{e}_r \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -f(r) \hat{e}_r \end{aligned} \quad (5.3)$$

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι η επίλυση του προβλήματος των δύο σωμάτων αλληλεπιδρώντων με κεντρική δύναμη είναι ευκολότερη αν τα πρώτα μέλη των

εξισώσεων γραφούν ως συνάρτηση τη διαφοράς $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Ξαναγράφουμε τις εξισώσεις διαιρώντας με τις μάζες

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{1}{m_1} f(r) \hat{e}_r \\ \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{1}{m_2} f(r) \hat{e}_r\end{aligned}\quad (5.4)$$

Αφαιρούμε την τελευταία από την πρώτη

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) f(r) \hat{e}_r \quad (5.5)$$

Ορίζουμε την ανηγμένη μάζα μ από τη σχέση

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

ή,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

και η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\mu \ddot{\vec{r}} = f(r) \hat{e}_r \quad (5.6)$$

δηλαδή είναι ταυτόσημη με την εξίσωση κίνησης ενός σώματος μάζας μ . Το πρόβλημα των δύο σωμάτων σε κεντρικό δυναμικό έχει πλέον αναχθεί σε πρόβλημα ενός σώματος το οποίο υπακούει την εξίσωση κίνησης σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Newton. Επομένως η εξίσωση (5.6) μπορεί να επιλυθεί με τις μεθόδους που αναπτύχθηκαν.¹

Η μορφή της εξίσωσης (5.6) μας έχει ήδη υποδείξει την επιλογή της \vec{r} ως νέας συντεταγμένης, όμως το αρχικό πρόβλημα συνίσταται από δύο σώματα και συνεπώς δύο διανύσματα θέσης. Μια βολική επιλογή για το δεύτερο αποτελεί το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας των δύο σωμάτων.

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Παραγωγίζοντας λαμβάνουμε το διάνυσμα της ταχύτητας

$$\vec{V} = \dot{\vec{R}} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (5.7)$$

¹Είναι λογικό να αναρωτηθεί τις εάν η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί σε περισσότερα από δύο σώματα. Δυστυχώς, το πρόβλημα περισσότερων σωμάτων είναι περίπλοκο και δεν είναι δυνατό να επιλυθεί με την εν λόγω μέθοδο.

και επειδή η ορμή $\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V}$ παραμένει σταθερή, έπεται ότι και η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι σταθερή. Άρα, το κέντρο μάζας μπορεί να επιλεγεί ως αδρανειακό σύστημα. Θα δούμε σε επόμενα εδάφια ότι η επιλογή αυτή απλοποιεί σημαντικά το πρόβλημα.

5.1 Το αδρανειακό σύστημα του κέντρου μάζας

Εφόσον επιλέξαμε τα \vec{r}, \vec{R} ως διανύσματα αναφοράς, πρέπει να εκφράσουμε και όλες τις φυσικές ποσότητες ως προς αυτά.

Αρχίζοντας από τα διανύσματα θέσης των δύο σωμάτων, έχουμε

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}\end{aligned}\quad (5.8)$$

Η κινητική ενέργεια γράφεται

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2}m_1|\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{\vec{r}}_2|^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\dot{\vec{r}}\right) \cdot \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\dot{\vec{r}}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\dot{\vec{r}}\right) \cdot \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\dot{\vec{r}}\right) \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)|\dot{\vec{R}}|^2 + \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}|\dot{\vec{r}}|^2\end{aligned}\quad (5.9)$$

Θέτοντας $M = m_1 + m_2$, $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$, $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, η κινητική ενέργεια γράφεται

$$K = \frac{1}{2}M|\vec{V}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\vec{v}|^2\quad (5.10)$$

δηλαδή είναι το άθροισμα των κινητικών ενεργειών "σωμάτιου" με μάζα το άθροισμα των μαζών και ταχύτητα αυτή του κέντρου μάζας συν την κινητική ενέργεια "σωμάτιου" μάζας μ και ταχύτητας $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$.

Η στροφορμή

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times m_1\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2\vec{v}_2$$

με τις αντικαταστάσεις των διανυσμάτων θέσης (5.8) και των αντίστοιχων ταχυτήτων είναι

$$\vec{L} = \vec{R} \times (M\vec{V}) + \vec{r} \times (\mu\vec{v})$$

Αν επιλέξουμε ως αδρανειακό σύστημα το κέντρο μάζας τότε, ως προς αυτό το διάνυσμα θέσης είναι $\vec{R} = 0$ και η $\vec{V} = 0$, άρα η στροφορμή

$$\vec{L} = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}} \quad (5.11)$$

δηλαδή, η στροφορμή ως προς το αδρανειακό σύστημα του κέντρου μάζας είναι ίση με εκείνη "σωματίου" μάζας μ και θέσης $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Επειδή η στροφορμή διατηρείται το \vec{L} έχει σταθερή κατεύθυνση. Το διάνυσμα της στροφορμής είναι κάθετο στο επίπεδο των (\vec{r}, \vec{v}) , και επομένως το επίπεδο κίνησης παραμένει σταθερό.

Σε προηγούμενα κεφάλαια μελετήσαμε εκτενώς τις διατηρητικές δυνάμεις. Στη περίπτωση αυτή το έργο μεταξύ δύο θέσεων ορίζεται ως το ολοκλήρωμα

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

και στην περίπτωση κεντρικών δυνάμεων $\vec{F} = f(r)\hat{e}_r$ το ολοκλήρωμα γράφεται ως η διαφορά της δυναμικής ενέργειας στα δύο άκρα

$$U(1) - U(2) = \int_1^2 f(r)dr$$

Ορίζοντας τη δυναμική ενέργεια,

$$U(r) = - \int_{r_0}^r f(r)dr$$

η διατήρηση ενέργειας στο σύστημα κέντρου μάζας παίρνει τη μορφή

$$E = \frac{1}{2}\mu|\vec{v}|^2 + U(r) \quad (5.12)$$

και καλείται το πρώτο ολοκλήρωμα της κίνησης.

Η στροφορμή ως προς το σύστημα κέντρου μάζας επίσης διατηρείται

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \mu \ddot{\vec{r}} \propto \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

καθότι η δύναμη είναι κεντρική. Επομένως είναι σταθερό διάνυσμα

$$\vec{L} = \vec{C} \quad (5.13)$$

και αποτελεί το δεύτερο ολοκλήρωμα της κίνησης. (Φυσικά στην ειδική περίπτωση $\vec{L} = 0$ το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση.)

5.1.1 Τα ολοκληρώματα κίνησης στις πολικές συντεταγμένες

Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $\vec{r} = r\hat{e}_r$ και $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\phi}\hat{e}_\phi$,

$$K = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\phi}\hat{e}_\phi) \cdot (\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\phi}\hat{e}_\phi) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)$$

τα δύο ολοκληρώματα κίνησης γράφονται

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\phi}^2 + U(r) \\ L &= \mu r^2\dot{\phi} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Στο πολικό σύστημα βλέπουμε λοιπόν ότι η θέση πλέον το "σώματος" μ καθορίζεται μόνο από δύο βαθμούς ελευθερίας, των r, ϕ . Επιπλέον, αν λύσουμε το δεύτερο ολοκλήρωμα της κίνησης ως προς $\dot{\phi}$ και αντικαταστήσουμε στην ενέργεια, έχουμε

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r) \quad (5.15)$$

Η τελευταία μορφή του ολοκληρώματος κίνησης είναι συνάρτηση μόνο της θέσης r και της ταχύτητας \dot{r} δηλαδή έχει τη μορφή ενός μονοδιάστατου προβλήματος για σώμα μάζης μ . Για να δείξουμε ακόμη περισσότερο την αναλογία ορίζουμε την ποσότητα

$$V(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r) \quad (5.16)$$

την οποία καλούμε *ενεργό ή υποθετικό δυναμικό*. Τότε, η εξίσωση της ενέργειας

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V(r) \quad (5.17)$$

αντιστοιχεί ακριβώς στη μορφή που θα είχε για ένα σώμα μάζας μ με δυναμική ενέργεια $V(r)$. Η τελευταία διαφέρει από την πραγματική κατά τον όρο $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$ ο οποίος καλείται φυγόκεντρο δυναμικό.

Για να επιλύσουμε τότε το πρόβλημα της κίνησης, εφαρμόζουμε ακριβώς τη μέθοδο που αναπτύξαμε στο πρώτο κεφάλαιο για τα μονοδιάστατα προβλήματα. Είναι

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 = E - V$$

την οποία επιλύουμε ως προς $\dot{r} = dr/dt$ και λαμβάνουμε

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V)}$$

Διαχωρίζουμε τις μεταβλητές

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V)}}$$

και ολοκληρώνουμε

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V)}} \quad (5.18)$$

Η (5.19) αποτελεί τη λύση του προβλήματος κίνησης σε κεντρικό δυναμικό. Για δοθέν φυσικό πρόβλημα που η συνάρτηση δυναμικού $U(r)$ δύναται να προσδιοριστεί, η ολοκλήρωση μπορεί να εκτελεστεί και το αποτέλεσμα δίδει το χρόνο ως συνάρτηση της θέσης $t = t(r)$. Φυσικά, απαιτείται αντιστροφή της συνάρτησης ώστε να έχουμε τη χρονική εξέλιξη της θέσης $r = r(t)$. Για πολύπλοκες συναρτήσεις $V(r)$ δεν είναι πάντα δυνατή μια αναλυτική μορφή της ολοκλήρωσης αλλά μπορούμε να λάβουμε το αποτέλεσμα με αριθμητικές μεθόδους.

Πολλές φορές, αντί της $r(t)$ είναι επιθυμητή η εύρεση της σχέσης $r(\phi)$. Για να απαλείψουμε το χρόνο από το προηγούμενο ολοκλήρωμα κάνουμε χρήση του δευτέρου ολοκληρώματος κίνησης το οποίο δίδει

$$\dot{\phi} = \frac{L}{\mu r^2} \rightarrow d\phi = \frac{L}{\mu r^2} dt$$

Επομένως,

$$d\phi = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V)}}$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\phi - \phi_0 = \frac{L}{\mu} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V)}} \quad (5.19)$$

5.1.2 Μια απλή περίπτωση

Ας θεωρήσουμε δύο μη αλληλεπιδρώντα σώματα m_1, m_2 με σταθερές ταχύτητες v_1, v_2 αντίστοιχα. Η σχετική απόσταση και ταχύτητα μεταξύ τους είναι $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ και $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Δοθέντος ότι $U(r) = 0$ στο Σύστημα Κέντρου Μάζας

$$E = \frac{1}{2} \mu |\vec{v}|^2 \quad (5.20)$$

και το ενεργό δυναμικό

$$V = 0 + \frac{L^2}{2\mu r^2} = \frac{L^2}{2\mu r^2} \quad (5.21)$$

άρα η (5.20) γράφεται

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} \quad (5.22)$$

Αν θ η γωνία \vec{r}, \vec{v} η στροφορμή είναι

$$L = |\vec{r} \times \mu \vec{v}| = \mu r v \sin \theta = \mu v d$$

Αντικατάσταση στο ενεργό δυναμικό δίδει

$$V = \frac{1}{2}\mu v^2 \frac{d^2}{r^2}$$

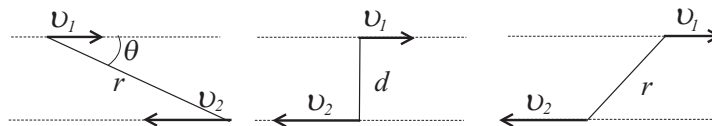
και η ενέργεια

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{r^2}{d^2} V$$

Για δοθέν φυσικό σύστημα η ενέργεια είναι σταθερά της κίνησης $E = c$. Από την τελευταία παρατηρούμε ότι υπάρχει μια οριακή τιμή $r = d$ για την οποία $E = V(d)$, ενώ για μικρότερες τιμές του $r < d$ το δυναμικό είναι μεγαλύτερο της ενέργειας του συστήματος. Δηλαδή, υπάρχει μια ελάχιστη απόσταση $r = d$ μεταξύ των σωμάτων στην οποία η ακτινική ταχύτητα είναι μηδέν

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = E - V \rightarrow \dot{r} = 0$$

Άρα η $r = d$ είναι η πλησιέστερη απόσταση. Για αποστάσεις $r > d$ ο λόγος $\frac{r^2}{d^2} > 1$ και επομένως η ισότητα ικανοποιείται για $V(r) < E$. Δηλαδή, καθώς τα σώματα απομακρύνονται ξανά μεταξύ τους, $K = E - V > 0$ και επομένως $\dot{r} > 0$. Η κατάσταση περιγράφεται στα σχήματα (5.2).

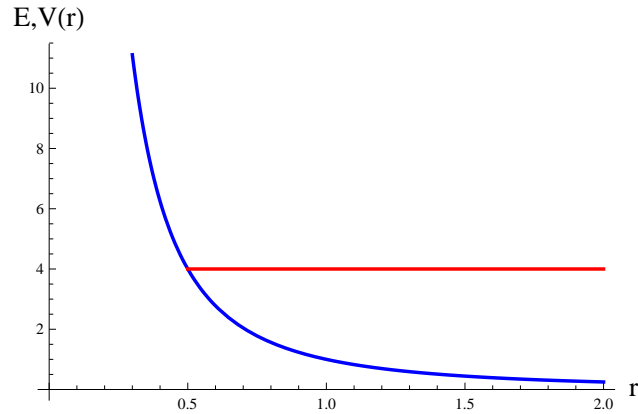


Σχήμα 5.1: στιγμιότυπα της κίνησης για δύο ελεύθερα σώματα.

5.1.3 Η λύση για το βαρυτικό πεδίο

Σε βαρυτικό πεδίο η δυναμική ενέργεια γράφεται $U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$ οπότε το ενεργό δυναμικό παίρνει τη μορφή

$$V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2} \quad (5.23)$$



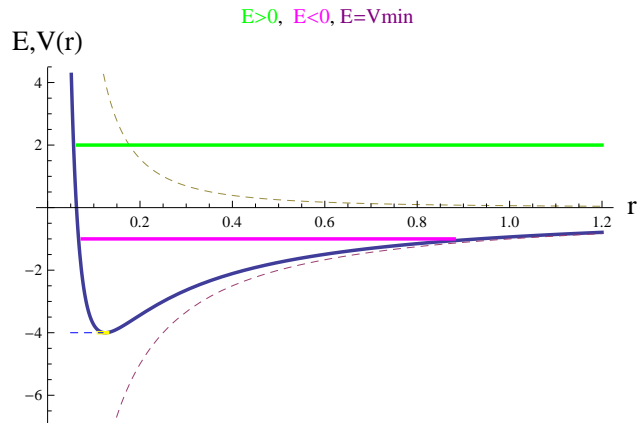
Σχήμα 5.2: Διάγραμμα Ενεργού Δυναμικού-Ενέργειας για δύο ελεύθερα σώματα.

Στο σχήμα 5.3 σχεδιάζεται το διάγραμμα του ενεργού δυναμικού. Για αρκούντως μικρές αποστάσεις, ο όρος $1/r^2$ επικρατεί του όρου $1/r$ και καθώς $r \rightarrow 0$ το ενεργό δυναμικό τείνει στο άπειρο $V \rightarrow +\infty$. Για μεγάλες αποστάσεις r υπερσχύει ο όρος $1/r$ και συνεπώς το ενεργό δυναμικό τείνει στο μηδέν από τα αρνητικά του κάθετου άξονα. Το ελάχιστο του δυναμικού ορίζεται στην απόσταση για την οποία $dV/dr = 0$ και είναι

$$r_0 = \frac{L^2}{Gm_1m_2\mu}, \quad V_{min} = -\frac{L^2}{2\mu r_0^2} \quad (5.24)$$

Η μορφή της κίνησης του συστήματος εξαρτάται από την μηχανική του ενέργεια. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

1. $E > 0$. Στην περίπτωση θετικής τιμής της συνολικής ενέργειας η κίνηση δεν είναι φραγμένη. Υπάρχει μιά ελάχιστη απόσταση r_{min} που η ενέργεια είναι ίση με το ενεργό δυναμικό $E = V(r_{min})$. Επειδή πάντα $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 = E - V \geq 0$ στην r_{min} είναι $\dot{r} = 0$ ενώ η κίνηση περιορίζεται σε ακτίνες μεγαλύτερες από την r_{min} . Για παράδειγμα, απαραίτητη προϋπόθεση για να εισέλθει εξωτερικός κομήτης στο Ηλιακό σύστημα είναι $E > 0$. Η πλησιέστερη δυνατή θέση του ως προς τον Ήλιο ορίζεται από τη συνθήκη που διατυπώθηκε παραπαπάνω δηλαδή $E = V(r_{min})$.
2. $V_{min} < E < 0$. Η κίνηση είναι φραγμένη μεταξύ δύο ακτίνων r_{min}, r_{max} οι οποίες προκύπτουν από τη συνθήκη $E = V(r)$. Στο βαρυτικό πεδίο η κίνηση είναι ελλειπτική, όπως των πλανητών γύρω από τον Ήλιο.



Σχήμα 5.3: Το ενεργό δυναμικό στη περίπτωση του βαρυτικού πεδίου. Δέσμιες καταστάσεις προκύπτουν για σώματα με ενέργεια $V_{min} \leq E < 0$

- Εάν η τιμή της ενέργειας συστήματος ισούται με την ελάχιστη τιμή του ενεργού δυναμικού, $E = V_{min}$ τότε $\dot{r} = 0$ και η απόσταση των δύο σωμάτων παραμένει σταθερή. Φυσικά, καθόσον $L \neq 0$ είναι $\dot{\phi} \neq 0$ και συνεπώς συνεχίζει να υπάρχει γωνιακή ταχύτητα, δηλαδή η κίνηση είναι κυκλική.

5.1.4 Η εξίσωση της τροχιάς

Επανερχόμαστε στην εξίσωση της κίνησης κεντρικής δύναμης

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = f(r) \hat{e}_r$$

Στις πολικές συντεταγμένες

$$\begin{aligned} f(r) &= \mu \ddot{r} - \mu r \dot{\phi}^2 \\ 0 &= \mu(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Όπως είδαμε κατ' επανάληψη, η δεύτερη οδηγεί στη συνθήκη διατήρησης της στροφορμής

$$L = \mu r^2 \dot{\phi}$$

$$\dot{\phi} = \frac{L}{\mu r^2} \quad (5.26)$$

Αντικαθιστούμε την (5.26) στην εξίσωση κίνησης έχουμε

$$\mu \ddot{r} = f(r) + \frac{L^2}{\mu r^3} \quad (5.27)$$

Επειδή $f(r)$ είναι κεντρική, υπάρχει δυναμικό ώστε $f(r) = -\frac{dU}{dr}$ και συνεπώς η τελευταία γράφεται

$$\mu\ddot{r} = -\frac{d}{dr} \left(U + \frac{L^2}{2\mu r^2} \right) = -\frac{dV}{dr} \quad (5.28)$$

όπου, όπως ορίσαμε η παράσταση στην παρένθεση αποτελεί το ενεργό δυναμικό

$$V = U + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

5.1.5 Η εξάρτηση από τη γωνία

Συχνά είναι προτιμότερη η εξάρτηση της ακτίνας από τη γωνία. Τότε, για να απαλείψουμε το χρόνο από την εξίσωση εργαζόμαστε ως ακολούθως. Η παράγωγος \dot{r} γράφεται

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \dot{\phi} \frac{dr}{d\phi}$$

όπου από την εξίσωση διατήρησης της στροφορμής στην τελευταία αντικαταστήσαμε τη $\dot{\phi}$. Επίσης, αντικαθιστούμε $\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} = -\frac{d}{d\phi} \frac{1}{r}$ και λαμβάνουμε

$$\dot{r} = -\frac{L}{\mu} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Η δεύτερη παράγωγος γράφεται

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \dot{r} = \dot{\phi} \frac{d}{d\phi} \dot{r} = \dot{\phi} \left(-\frac{L}{\mu} \frac{d}{d\phi} \frac{1}{r} \right)$$

ενώ με την αντικατάσταση της $\dot{\phi}$ από την εξίσωση για τη στροφορμή, λαμβάνουμε

$$\ddot{r} = -\frac{L^2}{\mu^2 r^2} \frac{d}{d\phi} \frac{1}{r}$$

Κάνουμε τέλος το μετασχηματισμό

$$u = \frac{1}{r} \quad (5.29)$$

Κάνοντας τις αντικαταστάσεις τελικά η διαφορική εξίσωση λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = -\frac{\mu}{L^2} \frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) \quad (5.30)$$

5.1.6 Η λύση στο ελκτικό δυναμικό της βαρύτητας

Για την περίπτωση της βαρυτικής δύναμης

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} = -ku^2$$

ο δεύτερος όρος της Διαφορικής εξίσωσης γράφεται

$$-\frac{\mu}{L^2} \frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{k\mu}{L^2}$$

και η εξίσωση λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{k\mu}{L^2} \quad (5.31)$$

Η τελευταία είναι μή ομογενής δεύτερης τάξης. Η μερική λύση είναι

$$\tilde{u} = \frac{k\mu}{L^2}$$

ενώ η λύση της αντίστοιχης ομογενούς από προηγούμενα κεφάλαια είναι γνωστή και γράφεται $A \cos(\phi - \phi_0)$, άρα

$$u(\phi) = \frac{k\mu}{L^2} + A \cos(\phi - \phi_0) = \frac{k\mu}{L^2} (1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0))$$

Στην τελευταία εισήχθη η σταθερά ϵ η οποία θα προσδιορισθεί στη συνέχεια. Η ακτίνα της τροχιάς $r = 1/u$ δίδεται τότε από

$$r(\phi) = \frac{L^2/(k\mu)}{1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0)} \quad (5.32)$$

5.1.7 Η μορφή των τροχιών

Η λύση (5.32) δίδει την τροχιά ως συνάρτηση της γωνίας και της παραμέτρου ϵ . Η τελευταία εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες της κίνησης, και μπορεί να λάβει οποιαδήποτε θετική τιμή. Οι ποιοτικά διαφορετικές μορφές τροχιών ταξινομούνται για τις τιμές $\epsilon < 1$ (ελλειπτική), $\epsilon = 1$ (παραβολική) και $\epsilon > 1$ (υπερβολική τροχιά).

Πριν μελετήσουμε τις μορφές των τροχιών, θα παραγάγουμε μια χρήσιμη σχέση της ϵ με την ενέργεια.

5.1.8 Η σχέση ενέργειας εκκεντρότητας

Εως τώρα η σταθερά ϵ θεωρήθηκε αυθαίρετη παράμετρος. Όμως για τον υπολογισμό των παραμέτρων της κίνησης πρέπει να τη συνδέσουμε με φυσικές ποσότητες. Μπορούμε να εξαγάγουμε μια σχέση ϵ και ενέργειας λαμβάνοντας υπ' όψη ότι αυτή ισούται με το ενεργό δυναμικό στα σημεία της τροχιάς r_{min}, r_{max} .

$$E = -\frac{k}{r_{min}} + \frac{L^2}{2\mu r_{min}^2}$$

$$E = \frac{1}{2r_{min}} \left(\frac{L^2}{\mu r_{min}} - 2k \right)$$

Όμως,

$$r_{min} = \frac{r_0}{1 + \epsilon} = \frac{\frac{L^2}{\mu k}}{1 + \epsilon}$$

η οποία αν αντικατασταθεί στην προηγούμενη δίνει την ενέργεια ως συνάρτηση της εκκεντρότητας

$$E = \frac{k^2 \mu}{2L^2} (\epsilon^2 - 1) \quad (5.33)$$

και αντιστρόφως

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{k^2 \mu}} \quad (5.34)$$

Όταν $\epsilon < 1$ από την (5.33) προκύπτει ότι η ενέργεια είναι αρνητική, ενώ για $\epsilon = 0$ ισούται με

$$E = -\frac{k^2 \mu}{2L^2}$$

ενώ η ακτίνα της τροχιάς παραμένει σταθερή

$$r = r_0 = \frac{L^2}{\mu k}$$

δηλαδή, η κίνηση για $\epsilon = 0$ είναι κυκλική όπως αναμένουμε. Είδαμε επίσης ότι η ελάχιστη τιμή του ενεργού δυναμικού λαμβάνει χώρα για $r = r_0$

$$\frac{dV}{dr} = 0 \rightarrow r_0 = \frac{L^2}{k\mu}$$

και τότε προκύπτει ξανά ότι

$$V_{min} = E = -\frac{k^2 \mu}{2L^2}$$

5.1.9 Ελλειπτική τροχιά, $\epsilon < 1$

Όταν $\epsilon < 1$, ο παρονομαστής της λύσης είναι μη μηδενικός για όλες τις τιμές της γωνίας ϕ . Υπάρχει μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή της ακτίνας για $\phi - \phi_0 = \pi, 0$ αντίστοιχα

$$\begin{aligned} r_{max} &= \frac{r_0}{1 - \epsilon} \\ r_{min} &= \frac{r_0}{1 + \epsilon} \end{aligned} \quad (5.35)$$

δηλαδή η κίνηση είναι φραγμένη και το σώμα κινείται σε ακτίνες μεταξύ των δύο οριακών τιμών r_{min}, r_{max} . Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι στη προκειμένη περίπτωση η τροχιά ποτέ δεν απειρίζεται, ισχύει

$$r(\phi) = (\phi + 2\pi)$$

δηλαδή η κίνηση είναι περιοδική και το σώμα διαγράφει ελλειπτική τροχιά. Η αντίστοιχη μορφή της εξίσωσης της έλλειψης στις καρτεσιανές συντεταγμένες προκύπτει εύκολα από την (??) για $\epsilon < 1$ ως ακολούθως. Θέτουμε για ευκολία $\phi_0 = 0$ και γράφουμε την εξίσωση

$$r(1 + \epsilon \cos \phi) = r_0 \rightarrow r = \epsilon r \cos \phi = r_0$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και αντικαθιστούμε $r^2 = x^2 + y^2, x = r \cos \phi$. Μετά από στοιχειώδεις πράξεις λαμβάνουμε

$$\frac{(x + c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{r_0}{1 - \epsilon^2} \\ b &= \frac{r_0}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \\ c &= \frac{r_0 \epsilon}{1 - \epsilon^2} \end{aligned} \quad (5.36)$$

1. Από τις ανωτέρω σχέσεις προκύπτει

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \epsilon^2}$$

Από τις γνωστές μαθηματικές ιδιότητες της έλλειψης προκύπτει ότι η παράμετρος ϵ είναι η εκκεντρότητα της έλλειψης.

2. Η θέση του Ήλιου ευρίσκεται σε απόσταση c από το κέντρο της έλλειψης επί του άξονα a .
3. Από τις ανωτέρω σχέσεις προκύπτει επίσης ότι

$$c = \epsilon a$$

Η σχέση αυτή ορίζει την μία από τις δύο εστίες της έλλειψης. Συνεπώς, ο Ήλιος ευρίσκεται στην μια εστία της ελλειπτικής τροχιάς.

Υπενθυμίζουμε ότι m_1, m_2 είναι οι μάζες των δύο απομονωμένων σωμάτων ενώ $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ είναι η ανηγμένη μάζα. Αν για παράδειγμα το φυσικό πρόβλημα είναι η κίνηση ενός πλανήτη γύρω από τον Ήλιο, τότε $m_1 = M_\odot, m_2 = m_p$ και $M_\odot \gg m_p$, άρα

$$\mu = \frac{M_\odot m_p}{M_\odot + m_p} \sim m_p$$

Το κέντρο μάζας

$$\vec{R} = \frac{M_\odot \vec{R}_\odot + m_p \vec{r}_p}{M_\odot + m_p} \sim \vec{R}_\odot$$

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι στο σύστημα πλανήτη Ηλίου, το κέντρο μάζας ευρίσκεται στο κέντρο του Ηλίου και η ανηγμένη μάζα είναι περίπου η μάζα του πλανήτη.

5.1.10 Ο τρίτος Νόμος του Kepler

Στις πολικές συντεταγμένες η στροφορμή γράφεται

$$L = \mu r^2 \frac{d\phi}{dt}$$

Η σχέση γράφεται

$$\frac{L}{2\mu} dt = \frac{1}{2} r^2 d\phi$$

Το δεξιό μέλος της τελευταίας είναι το στοιχείο του εμβαδού της έλλειψης (βλ. σχήμα 5.4)

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\phi$$

Αν ολοκληρώσουμε τα δύο μέλη για μιά πλήρη περίοδο της κίνησης, το ολοκλήρωμα στο πρώτο μέλος δίδει την περίοδο $\int dt = T$, ενώ το δεύτερο μέλος είναι το εμβαδό της έλλειψης $A = \pi ab$, άρα

$$\frac{L}{2\mu} T = \pi ab$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και κάνουμε χρήση της $b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}$ οπότε λαμβάνουμε

$$\frac{L^2}{4\mu^2} T^2 = \pi^2 a^2 b^2 = \pi^2 a^4 (1 - \epsilon^2)$$

Αντικαθιστούμε στη συνέχεια την $r_0 = a(1 - \epsilon^2)$ και παίρνουμε

$$\frac{L^2}{4\mu^2} T^2 = \pi^2 a^3 r_0$$

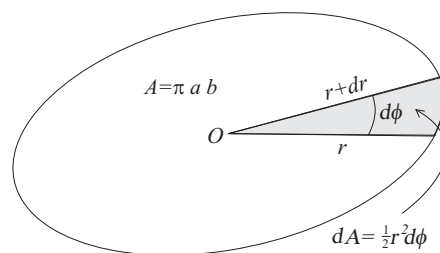
Όμως $r_0 = L^2 / (k\mu)$ οπότε τελικά μετά την αντικατάσταση στην τελευταία έχουμε τη σχέση

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{\mu}{k} a^3$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $k = Gm_1 m_2 = G\mu(m_1 + m_2)$ έχουμε

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 \quad (5.37)$$

Στο ηλιακό σύστημα, η μιά μάζα είναι του Ηλίου $m_1 = M_\odot$ και η δεύτερη ενός



Σχήμα 5.4: Το εμβαδό στοιχειώδους τμήματος της έλλειψης

πλανήτη $m_2 = m$, όπου $M_\odot \gg m$. Άρα, μπορούμε να παραλείψουμε σε πρώτη προσέγγιση τη μικρή μάζα στο άθροισμα και τότε

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} a^3 \quad (5.38)$$

Η (5.5) είναι ο τρίτος νόμος του Kepler, παρατηρούμε δε ότι στη απορρέει από τη θεωρία του Newton και ισχύει κατά προσέγγιση.

5.1.11 Παράδειγμα. Δορυφόρος σε τροχιά γύρω από τη Γή

• Θεωρούμε πρώτα την απλούστερη περίπτωση κυκλικής τροχιάς δορυφόρου γύρω από τη Γή. Ας υποθέσουμε ότι η τροχιά λαμβάνει χώρα σε n γήινες ακτίνες $R_s = nR$. Η δύναμη της βαρύτητας είναι η κεντρομόλος

$$m \frac{v^2}{R_s} = G \frac{Mm}{R_s^2} \rightarrow \frac{v^2}{R_s} = G \frac{M}{R_s^2} = g \frac{R^2}{R_s^2}$$

Αν T η περίοδος της κίνησης, είναι $v = \omega R_s = \frac{2\pi}{T} nR$. Αντικαθιστούμε και λύνουμε ως προς T

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} n^{3/2} \quad (5.39)$$

Ορισμένες ενδιαφέρουσες περιπτώσεις είναι:

1.) Για δορυφόρους που κινούνται κοντά στην επιφάνεια της Γής ο χρόνος μιας πλήρους περιστροφής ισούται με ($R = 6371 \text{ Km}$)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{6371 \times 10^3}{9.81}} \text{ s} \sim 5063 \text{ s} \sim 84 \text{ min}$$

2.) Οι γεωστατικοί δορυφόροι ευρίσκονται σε σταθερό σημείο πάνω από την επιφάνεια της Γης και πάνω από τον Ισημερινό. Επομένως ο χρόνος μιας πλήρους περιστροφής ισούται με την περίοδο της περιφοράς της Γης ως προς τον άξονά της. Επιλύοντας την τελευταία ως προς n , και αντικαθιστώντας $T = 24 \times 3600 \text{ s}$, ευρίσκουμε ότι

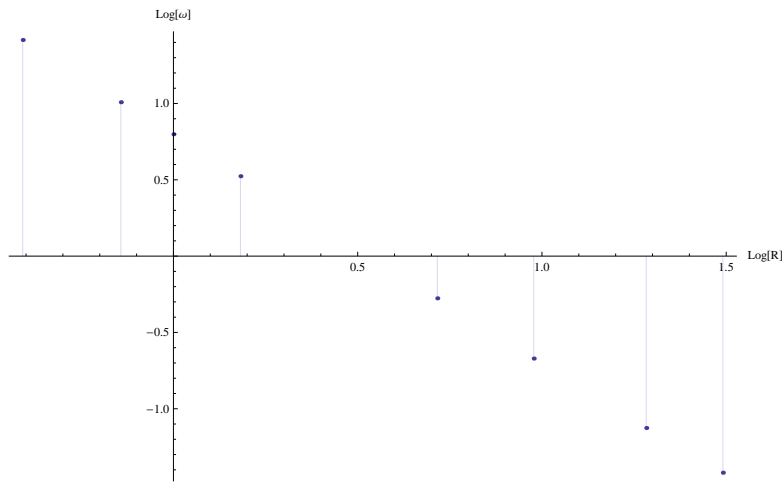
$$\frac{T^{2/3} \sqrt[3]{\frac{g}{R}}}{(2\pi)^{2/3}} = 6.63$$

Δηλαδή, η τροχιά ενός γεωστατικού δορυφόρου είναι περί τις 6.63 φορές η ακτίνα της Γης.

3.) Η τροχιά της Σελήνης είναι σε ακτίνα $R_s \sim 60R$. Άρα η περίοδος της είναι

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{6371 \times 10^3}{9.81}} \text{ s} 60^{3/2} \sim 2.35329 \times 10^6 \text{ s} \sim 27.3 \text{ days}$$

• Ο Τρίτος νόμος του Kepler επιβεβαιώνεται από τις μετρήσεις των περιόδων και των ελλειπτικών τροχιών των πλανητών του Ηλιακού μας συστήματος. Στον παρακάτω πίνακα η δεύτερη στήλη ορίζει την απόσταση των πλανητών από τον Ήλιο (σε AU) και η τρίτη τη συχνότητα $\omega = 2\pi/T$ ως συνάρτηση της περιόδου και η δεύτερη. Η ω εδώ μετρείται σε σχέση με την περίοδο της Γής.



Σχήμα 5.5: Οι πειραματικές μετρήσεις των περιόδων και τροχιών των πλανητών σε λογαριθμική κλίμακα.

Για παράδειγμα ο Ερμής έχει περίοδο $T = 88/365$ δηλαδή 88 ημέρες της μιας πλήρους περιστροφής του δια τις 365 της γης.

Mercury	0.39	$\frac{365\pi}{44}$
Venus	0.72	$\frac{146\pi}{45}$
Earth	1	2π
Mars	1.52	$\frac{730\pi}{687}$
Jupiter	5.2	$\frac{146\pi}{867}$
Saturn	9.5	$\frac{146\pi}{2151}$
Uranus	19.19	$\frac{\pi}{42}$
Neptune	30.97	$\frac{73\pi}{6019}$

Στη συνέχεια παίρνουμε το λογάριθμο της λίστας και σχεδιάζουμε. Το αποτέλεσμα είναι στην εικόνα 5.5. Οι περίοδοι ευρίσκονται πάνω σε μια κοινή ευθεία, δηλαδή ο λόγος είναι σταθερός.

5.1.12 Μη φραγμένες τροχιές

Στις μη φραγμένες τροχιές διακρίνουμε τις δύο περιπτώσεις, $\epsilon = 1$ και $\epsilon > 1$. Στην πρώτη περίπτωση η λύση γράφεται

$$r = \frac{r_0}{1 + \cos(\phi - \phi_0)}$$

Στην περίπτωση $\phi - \phi_0 = \pm\pi$, ο παρονομαστής μηδενίζεται και η ακτίνα της τροχιάς απειρίζεται. Η οριακή ($\epsilon = 1$) αυτή περίπτωση μή φραγμένης τροχιάς είναι παραβολική. Η καρτεσιανή της μορφή γράφεται (θέτουμε $\phi_0 = 0$)

$$r = r_0 - r \cos \phi = r_0 - x \rightarrow x^2 + y^2 = r_0^2 - 2r_0x + x^2$$

ή

$$y^2 - 2r_0x = r_0^2$$

η οποία είναι η γνωστή καρτεσιανή μορφή της παραβολής.

Για $\epsilon > 1$ έχουμε υπερβολική τροχιά.

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0)}$$

Με ανάλογη διαδικασία, αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες γράφεται

$$\frac{(x - c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

με

$$\begin{aligned} a &= \frac{r_0}{\epsilon^2 - 1} \\ b &= \frac{r_0}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} \\ c &= \frac{r_0 \epsilon}{\epsilon^2 - 1} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Για να περιγράψουμε την κίνηση ως θεωρήσουμε την περίπτωση κομήτη που εισέρχεται στο ηλιακό σύστημα και συνεπώς εκτελεί κίνηση με $E > 0$ με κέντρο έλξης τον Ήλιο.

Θεωρούμε ότι σε απομακρυσμένο αρχικό σημείο ως προς το ελκτικό κέντρο η ταχύτητα είναι v_0 και ότι η προέκταση της ευθείας της αρχικής τροχιάς διέρχεται σε απόσταση b από το κέντρο (βλ. σχ. 5.6.) Η απόσταση b καλείται *παράμετρος πρόσκρουσης*. Στην απομακρυσμένη θέση, η ορμή και ενέργεια είναι

$$\begin{aligned} L &= \mu v_0 b \\ E &= \frac{1}{2} \mu v_0^2 \end{aligned} \quad (5.41)$$

Για την ευκολότερη περιγραφή της κίνησης, επιλέγουμε ως αρχική συνθήκη $\phi_0 = \pi$ και τότε η εξίσωση της υπερβολικής τροχιάς στο βαρυτικό δυναμικό γράφεται

$$r = \frac{r_0}{1 - \epsilon \cos \phi} \quad (5.42)$$

Όταν το σώμα ευρίσκεται σε άπειρη απόσταση από το ελκτικό κέντρο, $r \rightarrow \infty$ ο παρονομαστής μηδενίζεται. Η τιμή της γωνίας που μηδενίζει τον παρονομαστή είναι

$$\cos\phi_\alpha = \frac{1}{\epsilon} \quad (5.43)$$

και ορίζει την ασυμπτωτική ευθεία του σχήματος.

Ας θεωρήσουμε τη σχέση $\epsilon - E$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$$

Με αντικατάσταση των (5.41) παίρνει τη μορφή

$$\epsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{k}\right)^2} \quad (5.44)$$

ενώ η παράμετρος r_0 γράφεται

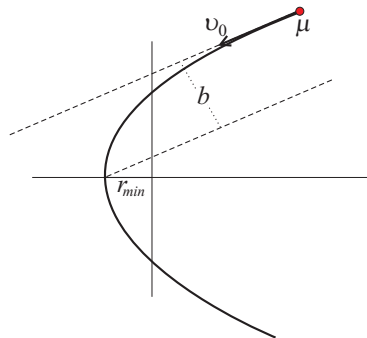
$$r_0 = \frac{L^2}{\mu k} = \frac{2Eb^2}{k}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της τροχιάς και λαμβάνουμε

$$r = \frac{\frac{2Eb^2}{k}}{1 - \sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{k}\right)^2} \cos\phi} \quad (5.45)$$

Από την τελευταία συνάγουμε ότι η ελάχιστη απόσταση είναι για $\phi = \pi$, δηλαδή

$$r_{min} = \frac{\frac{2Eb}{k}}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{k}\right)^2}} b$$



Σχήμα 5.6: Η παράμετρος κρούσης στην υπερβολική τροχιά

Για μεγάλες ενέργειες $E \rightarrow \infty$, διαπιστώνουμε από την τελευταία ότι η ελάχιστη απόσταση λαμβάνει τη μέγιστή της τιμή $r_{min} \rightarrow b$, επομένως

$$0 < r_{min} < b$$

Η γωνία της ασυμπτωτικής ευθείας επίσης γράφεται

$$\cos \phi_\alpha = \frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{k}\right)^2}} \quad (5.46)$$

Μετά την αλληλεπίδραση το σώμα απομακρύνεται από το κέντρο σε διαφορετική κατεύθυνση. Η απόκλιση τελικής από την αρχική τροχιά μετρείται με τη γωνία σκέδασης Θ η οποία δίδεται από τη σχέση (βλ. σχήμα 5.7)

$$\Theta = \pi - 2\phi_\alpha \quad (5.47)$$

από την οποία έχουμε

$$\sin \frac{\Theta}{2} = \cos \phi_\alpha = \frac{1}{\epsilon}$$

δηλαδή

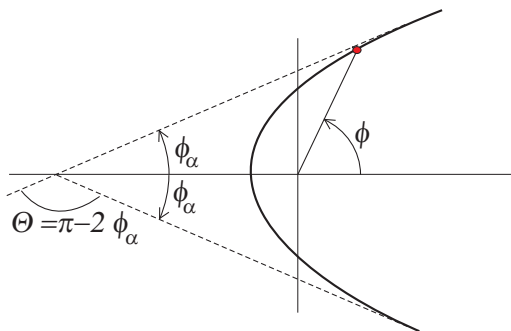
$$\sin \frac{\Theta}{2} = \frac{1}{\epsilon} \quad (5.48)$$

Κάνοντας χρήση της (5.44)

$$\epsilon^2 = 1 + \left(\frac{2Eb}{k}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}}$$

και τελικά το b δίδεται

$$b = \frac{k}{2E} \cot \frac{\Theta}{2} \quad (5.49)$$



Σχήμα 5.7: Η γωνία σκέδασης

Από τις παραπάνω εκφράσεις παρατηρούμε ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε τις περισσότερες παραμέτρους της αλληλεπίδρασης γνωρίζοντας μόνο τα "μακροσκοπικά" μεγέθη της κίνησης, δηλαδή την ταχύτητα v_0 στο 'άπειρο' και τη γωνία σκέδασης Θ . Για παράδειγμα

$$\epsilon = \frac{1}{\sin \frac{\Theta}{2}}, \quad r_0 = \frac{k}{2E} \cot^2 \frac{\Theta}{2}$$

Απωστικό δυναμικό

Θα θεωρήσουμε απωστικό δυναμικό της μορφής

$$U(r) = \frac{k}{r}, \quad k > 0$$

δηλαδή η δύναμη $F(r) = \frac{k}{r^2}$. Επιλύοντας ξανά την εξίσωση παίρνουμε τη λύση

$$r = \frac{r_0}{-1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0)} \quad (5.50)$$

Θα θεωρήσουμε $\phi_0 = 0$. Το κέντρο της άπωσης ευρίσκεται εκτός της καμπύλης, (βλ σχήμα "..."), ενώ η ελάχιστη απόσταση που το σώμα προσεγγίζει είναι επί του οριζόντιου άξονα του σχήματος που ορίζει η $\phi = 0$,

$$r_{min} = \frac{r_0}{\epsilon - 1}$$

Το σώμα για $r \rightarrow \infty$ ορίζει την ασυμπτωτική με τιμή της γωνίας που δίδεται από

$$\phi_\alpha = \cos^{-1} \frac{1}{\epsilon}$$

Αυτή είναι και η μέγιστη τιμή της γωνίας. Η γωνία σκέδασης ορίζεται ακριβώς όπως και στην περίπτωση του ελκτικού δυναμικού και είναι

$$\Theta = \pi - 2\phi_\alpha$$

5.2 Σκέδαση

Η μελέτη των μη φραγμένων τροχιών θα φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη στη θεωρία της σκέδασης. Η σκέδαση είναι ένας αποτελεσματικός τρόπος για την διερεύνηση της υποατομικής δομής. Στα πειράματα συνήθως κατευθύνουμε μια ροή σωματιδίων σε στόχο που είναι άτομα ή πυρήνες. Τα συμπεράσματα για τη δομή εξάγονται από την μελέτη των σωματιδίων που σκεδάζονται. Από την προηγούμενη ανάλυση θα υπέθετε τις ότι δοθέντων των αρχικών συνθηκών ενός βλήματος,

μπορούμε να μελετήσουμε την τροχιά του και να αποσπάσουμε πληροφορίες για τη μορφή του στόχου και της δύναμης αλληλεπίδρασης. Όμως στο επίπεδο των πυρήνων αυτό δεν είναι εφικτό. Δεν είναι δυνατό για παράδειγμα να γνωρίζουμε την παράμετρο πρόσκρουσης και άλλες λεπτομέρειες της τροχιάς. Όμως, βάλλοντας με μεγάλο αριθμό σωματιδίων μπορούμε να μελετήσουμε τον τρόπο που σκεδάζονται σε διάφορες γωνίες και να οδηγηθούμε σε χρήσιμα συμπεράσματα για την αλληλεπίδραση και τη δομή. Βέβαια, στο υποατομικό επίπεδο γνωρίζουμε ότι ισχύει η κβανική μηχανική, όμως μπορούμε να εξαγάγουμε σημαντικές πληροφορίες από τις γενικές αρχές διατήρησης της κλασσικής φυσικής οι οποίες προφανώς ισχύουν και στη κβανική. Επίσης, οι έννοιες της σκέδασης όπως η ενεργός διατομή κλπ, ορίζονται ήδη στο πλαίσιο της κλασσικής μηχανικής.

Σε αντιστοιχία με την μελέτη του προηγούμενου εδαφίου, θα βασιστούμε στον ορισμό των δύο παραμέτρων:

- την παράμετρο πρόσκρουσης b που ορίζεται ως η μικρότερη απόσταση που θα διήρχετο το βλήμα από το στόχο εάν δεν υπήρχε καμιά αλληλεπίδραση μεταξύ τους

- τη γωνία σκέδασης θ η οποία μετρά την απόκλιση της εξερχόμενης δέσμης των σωματιδίων από την εισερχόμενη.

Σε δοθείσα πειραματική διάταξη είναι κατ' αρχάς εφικτή η μέτρηση της γωνίας σκέδασης, αλλά δεν είναι δυνατή η απ' ευθείας μέτρηση της παραμέτρου πρόσκρουσης. Επομένως, ένας από τους στόχους είναι η εύρεση μιας σχέσης μεταξύ τους $b = b(\theta)$ ή $\theta = \theta(b)$. Το ανέφικτο της απ' ευθείας μέτρησης του b στα πειράματα σε υποατομικό επίπεδο, οδηγεί στην εισαγωγή της έννοιας "ενεργός διατομή σκέδασης" την οποία θα ορίσουμε στα επόμενα.

Κατά την εκτέλεση του πειράματος συνήθως έχουμε ένα λεπτό φύλλο υλικού (σχ. ??). Οι πυρήνες των ατόμων αποτελούν τους στόχους και εν γένει δεν είναι γνωστή η ακριβής θέση τους ούτε η ακριβής απόσταση των τροχιών από αυτούς. Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε την πιθανότητα να χτυπήσουμε ένα στόχο.

Ας υποθέσουμε τυχαία κατανομημένους N_t στόχους σε συνολική επιφάνεια ελάσματος A . Ορίζουμε την πυκνότητα n_t δηλαδή τον αριθμό των στόχων ανά μονάδα επιφάνειας, δηλαδή, ο ολικός αριθμός των στόχων δίδεται από

$$N_t = n_t A \quad (5.51)$$

Αν R η ακτίνα ενός στόχου, τότε η διατομή σκέδασης (cross section) ενός στόχου δίδεται από

$$\sigma = \pi R^2 \quad (5.52)$$

ενώ η συνολική διατομή των στόχων είναι

$$\Sigma = n_t \sigma A \quad (5.53)$$

Από τα παραπάνω συνάγουμε ότι η πιθανότητα σύγκρουσης ενός σημειακού σωματιδίου/βλήματος με στόχο είναι ίση με το λόγο της διατομής των στόχων ως προς τη συνολική επιφάνεια

$$p = \frac{n_t \sigma A}{A} = n_t \sigma \quad (5.54)$$

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε N_π τον αριθμό από προσπίπτοντα σωματίδια τότε ο αριθμός N_σ των σκεδαζόμενων σωματιδίων δίδεται από

$$N_\sigma = n_t \sigma N_\pi \quad (5.55)$$

Γνωρίζοντας τον αριθμό των προσπιπτόντων σωματιδίων και μετρώντας τον αριθμό των σκεδασμένων σωματιδίων μπορούμε να υπολογίσουμε τη διατομή σκέδασης. Πολλές φορές έχουμε συνεχή ροή προσπίπτουσας δέσμης οπότε σε αυτή την περίπτωση ορίζουμε το ρυθμό των προσπιπτόντων σωματιδίων στη μονάδα του χρόνου $R_\pi = N_\pi / (\Delta t)$ και τότε ο τύπος γράφεται

$$R_\sigma = n_t \sigma R_\pi$$

Στην υποατομική φυσική η συνήθης μονάδα μέτρησης των διατομών σκέδασης είναι

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2 \quad (5.56)$$

Εφαρμογή

Ας θεωρήσουμε N_π σωματίδια τα οποία βάλονται εναντίον στόχου ελάσματος πάχους d και διατομή σκέδασης σ . Η πυκνότητα του υλικού του ελάσματος είναι ρ και η μάζα των πυρήνων m_n . Να βρεθεί ο αριθμός των σκεδασμένων σωματιδίων.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, τα σκεδασθέντα σωματίδια δίδονται από

$$N_\sigma = n_t \sigma N_\pi$$

επομένως πρέπει να υπολογίσουμε το n_t , δηλαδή των αριθμό των στόχων ανά μονάδα επιφάνειας. Ας υποθέσουμε ότι N_t είναι ο ολικός αριθμός των στόχων/πυρήνων μάζας m_n , τότε η συνολική μάζα τους είναι $M = N_t m_n$. Αν A η επιφάνεια του ελάσματος, ο όγκος του είναι $V = A d$ και τότε

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{N_t m_n}{A d} = \frac{N_t}{A} \cdot \frac{m_n}{d} = n_t \frac{m_n}{d}$$

Λύνουμε την τελευταία ως προς n_t (τον αριθμό στόχων ανα μονάδα επιφάνειας) και έχουμε

$$n_t = \frac{\rho d}{m_n} \quad (5.57)$$

Αντικαθιστούμε στο γενικό τύπο και λαμβάνουμε

$$N_{\sigma} = \frac{\rho d}{m_n} \sigma N_{\pi} \quad (5.58)$$

Άσκηση

Συνήθως ένα μικρό κλάσμα των αρχικών σωματιδίων σκεδάζεται. Εφαρμόστε τα αποτελέσματα για την περίπτωση πρόσπτωσης νετρονίων σε φύλλο αλουμινίου με τα ακόλουθα δεδομένα

$$N_{\pi} = 10^4, \sigma = 1.5 \text{ barns}, \rho = 2.7 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3, m_n = 2.7 \times 1.66 \times 10^{-26} \text{ Kg}, d = 10^{-4} \text{ m}$$

5.2.1 Διατομή σκέδασης

Αν θεωρήσουμε ότι και το σωματίδιο έχει διάσταση τότε η διατομή σκέδασης εξαρτάται και από το προσπίπτον σωματίδιο. Αν R_1, R_2 οι ακτίνες βλήματος και στόχου για να έχουμε σύγκρουση πρέπει η παράμετρος κρούσης να είναι μικρότερη του αθροίσματος αυτών $b < R_1 + R_2$. Η ενεργός διατομή είναι τώρα

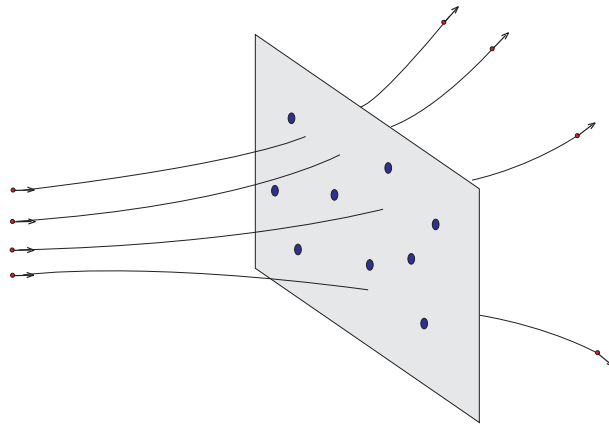
$$\sigma = \pi(R_1 + R_2)^2 \quad (5.59)$$

Προφανώς, η ενεργός διατομή είναι διαφορετική αν χρησιμοποιήσουμε διαφορετικά σωματίδια. Η ενεργός διατομή είναι επίσης διαφορετική για βλήματα που σκεδάζονται ή βλήματα που απορροφώνται από το στόχο. Επίσης, εξαρτάται από την ενέργεια. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε προσπίπτοντα ηλεκτρόνια σε πυρήνα, υπάρχει το ενδεχόμενο ιονισμού το οποίο συμβαίνει για κατάλληλη ενέργεια του ηλεκτρονίου. Εν γένει ορίζουμε $\sigma_{tot} = \sum_i \sigma_i$ για να λάβουμε υπ' όψη όλες τις περιπτώσεις και $N_{\sigma} = \sigma_{tot} n_t N_{\pi}$.

5.2.2 Διαφορική ενεργός διατομή σκέδασης

Θα μπορούσαμε να εξαγάγουμε χρήσιμη πληροφορία για την υποατομική δομή αν γνωρίζαμε τον αριθμό, ή το ποσοστό των σωματιδίων που σκεδάζονται σε κάθε κατεύθυνση. Για να μελετήσουμε το πρόβλημα αυτό, εισάγουμε την έννοια της διαφορικής ενεργού διατομής (differential cross section). Απλοποιούμε στη συνέχεια τη μελέτη, θεωρώντας ότι η σκέδαση είναι ελαστική.

Επιδώκουμε να βρούμε τον αριθμό των σκεδασθέντων σωματιδίων σε δοθείσα κατεύθυνση. Για την ευκολότερη χρήση των σφαιρικών συντεταγμένων θα υποθέσουμε ότι η προσπίπτουσα δέσμη κινείται κατά τον άξονα z όπως στο σχήμα (5.8). Έτσι οι μετρήσεις ως προς τις γωνίες να γίνονται με αναφορά τις θ, ϕ των σφαιρικών συντεταγμένων.



Σχήμα 5.8: Σκέδαση

Φυσικά, μια μέτρηση δεν έχει έννοια για ένα δοθέν ζεύγος θ, ϕ , αλλά για ένα κώνο γύρω από αυτές τις τιμές όπως φαίνεται στο σχήμα. Εισάγουμε τότε τη στερεά γωνία

$$\Omega = \frac{A}{r^2}$$

όπου A το εμβαδό που αποκόπτει ο κώνος σε μια νοητή σφαίρα ακτίνας r που γίνεται η μέτρηση.

Για απειροστές μεταβολές $d\theta, d\phi$ γύρω από τις γωνίες θ, ϕ συμβολίζουμε την αντίστοιχη στοιχειώδη επιφάνεια με dA . Κατά τα γνωστά είναι $dA = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$, άρα

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi \quad (5.60)$$

ενώ η ολοκλήρωση για όλο το εύρος των θ, ϕ δίδει $\Omega = \int d\Omega = 4\pi$.

Αν θεωρήσουμε N_π προσπίπτοντα σωματίδια και ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε τον αριθμό αυτών που σκεδάζονται στη στερεά γωνία $d\Omega$ γράφουμε

$$N_\sigma(d\Omega) = N_\pi n_t d\sigma(d\Omega)$$

όπου με $d\sigma(d\Omega)$ συμβολίζουμε τη διαφορική ενεργό διατομή του στόχου για σκέδαση εντός της στοιχειώδους στερεάς γωνίας $d\Omega$. Επειδή η διατομή αυτή είναι ανάλογη του $d\Omega$ γράφουμε επίσης

$$d\sigma(d\Omega) = \frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} d\Omega$$

Συνήθως έχουμε μια θεωρητική πρόβλεψη ή/και πειραματική μέτρηση της $\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega}$, από την οποία υπολογίζουμε την ολοκληρή ενεργό διατομή

$$\sigma = \int \frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} d\Omega = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} d\phi \quad (5.61)$$

5.2.3 Αξονική Συμμετρία

Στον υπολογισμό ενεργών διατομών σκέδασης συνήθως έχουμε συμμετρικά σφαιρικό πεδίων δυνάμεων. Το φαινόμενο της σκέδασης μιας ομοιόμορφης δέσμης σωματιδίων κινούμενης επί του άξονα z από πυρήνα επί του z , εμφανίζει συμμετρία ως προς τη γωνία ϕ , δηλαδή έχει αξονική συμμετρία. Θα υποθέσουμε στη συνέχεια ότι έχουμε αξονική συμμετρία. Θεωρούμε τα σωματίδια της δέσμης που ευρίσκονται σε στοιχειώδη δακτύλιο που σχηματίζεται από την παράμετρο κρούσης b και $b + db$. Η διατομή είναι τότε

$$d\sigma = 2\pi b db$$

Τα αντίστοιχα σκεδασμένα σωματίδια ευρίσκονται σε μια αντίστοιχη στερεά γωνία (βλ. σχήμα 5.9)

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$$

Η παράμετρος πρόσκρουσης είναι εν γένει συνάρτηση της γωνίας, $b = b(\theta)$ άρα,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (5.62)$$

Επειδή η ενεργός διατομή είναι θετικά ορισμένη ποσότητα, αλλά η $b = b(\theta)$ μπορεί να είναι και φθίνουσα, έχουμε λάβει την απόλυτη τιμή ώστε να εξασφαίσουμε ότι η $\frac{d\sigma}{d\Omega} > 0$

Εφαρμογή

Για την κατανόηση των ανωτέρω, θα υπολογίσουμε μέσω του τύπου (5.62) την ενεργό διατομή σε μια απλή περίπτωση. Θα θεωρήσουμε συμπαγή σφαίρα ακτίνας R και σωματίδιο με παράμετρο κρούσης b όπως στο σχήμα. Υποθέτουμε ότι ο στόχος παραμένει σταθερός κατά τη σκέδαση, επομένως η κινητική ενέργεια του σωματιδίου αρκετά πριν K' και μετά K' την κρούση διατηρείται $K = K'$, και συνεπώς το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό $v = v'$. Επειδή υποθέτουμε κεντρικές δυνάμεις, η στροφορμή ως προς το κέντρο της σφαίρας διατηρείται. Αμέσως πριν και μετά την κρούση είναι

$$L = L' \rightarrow \mu R v \sin \alpha = \mu R v \sin \alpha' = \mu b v$$

η οποία συνεπάγεται ότι η γωνία πρόσπτωσης ισούται με τη γωνία απομάκρυνσης από το στόχο $\alpha = \alpha'$. Από το σχήμα,

$$\theta = \pi - 2\alpha$$

Η ζητούμενη σχέση $b = b(\theta)$ είναι τότε

$$b = R \sin \alpha = R \cos \frac{\theta}{2}$$

από την οποία δια παραγωγίσεως λαμβάνουμε

$$db = -\frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$, διαιρούμε και έχουμε

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4}$$

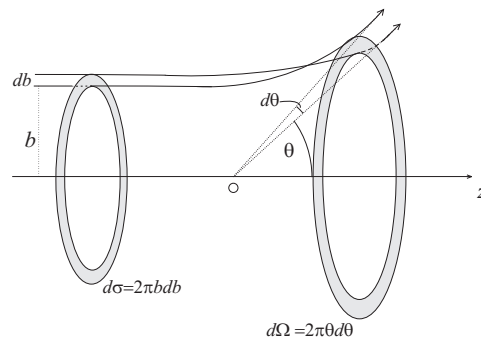
Η συνολική ενεργός διατομή

$$\sigma = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{R^2}{4} d\theta = \pi R^2$$

όπως αναμένεται.

5.2.4 Η σκέδαση Rutherford

Στο πείραμα σκέδασης του Rutherford σωματίδια άλφα προσπίπτουν επί λεπτού φύλλου χρυσού. Μελετώντας την εξερχόμενη σκεδασμένη δέσμη συνάγονται συμπεράσματα για την ατομική δομή.



Σχήμα 5.9: Σκέδαση

Η δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωματιδίων και του πυρήνα είναι

$$F = k \frac{qQ}{r^2} = \frac{\lambda}{r^2}$$

Η γωνία σκέδασης είναι μεγάλη για σωματίδια που διέρχονται πολύ κοντά από τους πυρήνες. Μπορούμε να αγνοήσουμε αλληλεπιδράσεις με ηλεκτρόνια του ατόμου. Από προηγούμενη μελέτη, γνωρίζουμε ότι τα σωματίδια ακολουθούν παραβολική τροχιά, διότι οι δυνάμεις είναι κεντρικές απωστικές. Η τροχιά ενδεικτικά σχεδιάζεται στο σχήμα. Υπάρχει μια ελάχιστη απόσταση ως προς τον πυρήνα από την οποία διέρχεται το σωματίδιο. Σημειώνουμε με \hat{n} το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος της αντίστοιχης ευθείας. Από την ευθεία αυτή μετρούμε τη γωνία ϕ της εκάστοτε θέσης του σωματιδίου. Για τις δύο απομακρυσμένες θέσεις πριν και μετά την ελάχιστη απόσταση η γωνία παίρνει τις οριακές τιμές $\pm\phi_a$, ενώ η γωνία σκέδασης δίδεται από

$$\theta = \pi - 2\phi_a$$

Όπως ήδη αναφέραμε, για τον υπολογισμό της ενεργούς διατομής χρειαζόμαστε τη σχέση μεταξύ της παραμέτρου πρόσκρουσης b και της γωνίας σκέδασης, $b = b(\theta)$. Για τη σχέση αυτή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα (5.49) που ήδη παρήχθη κατά τη μελέτη της υπερβολικής τροχιάς για ελκτικό δυναμικό.

Όμως, για την εύρεση της σχέσης αυτής μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής. Θα υπολογίσουμε το διάνυσμα μεταβολής της ορμής $\Delta\vec{p} = \vec{p}' - \vec{p}$ με δύο διαφορετικούς τρόπους.

• Τα \vec{p}' , \vec{p} σχηματίζουν ένα ισοσκελές τρίγωνο με βάση $\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v}$. Από το σχήμα του ισοσκελούς που σχηματίζεται μεταξύ προσπίπτουσας και εξέρχόμενης τροχιάς συμπεραίνουμε ότι η γωνία μεταξύ τους είναι η θ , οπότε έχουμε

$$|\Delta\vec{p}| = 2|\vec{p}| \sin \frac{\theta}{2} \quad (5.63)$$

• Από το δεύτερο νόμο του Newton, γνωρίζουμε ότι η μεταβολή της ορμής συνδέεται με τη δύναμη μέσω της

$$\Delta\vec{p} = \int \vec{F} dt$$

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι $\Delta\vec{p}$ είναι παράλληλο με την κατεύθυνση \hat{n} επομένως το μέτρο $|\Delta\vec{p}|$ δίδεται από το ολοκλήρωμα

$$|\Delta\vec{p}| = \int \vec{F} \cdot \hat{n} dt = \int F_n dt$$

όπου,

$$F_n = \frac{\lambda}{r^2} \cos \phi$$

όπου για την αλληλεπίδραση των φορτίων είναι $\lambda = kqQ$. Το ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$|\Delta \vec{p}| = \int \frac{\lambda}{r^2} \cos \phi dt$$

Η εξάρτηση από τη γωνία $\phi = \phi(t)$ μας οδηγεί στην ακόλουθη αντικατάσταση

$$dt = \frac{d\phi}{\frac{d\phi}{dt}} = \frac{d\phi}{\dot{\phi}}$$

Από τη διατήρηση της στροφορμής έχουμε

$$L = \mu r^2 \dot{\phi} = \mu bv$$

η οποία δίδει

$$\frac{1}{\dot{\phi}} = \frac{r^2}{bv}$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση για το dt

$$dt = \frac{d\phi}{\dot{\phi}} = r^2 \frac{d\phi}{bv}$$

Το ολοκλήρωμα τότε γράφεται

$$|\Delta \vec{p}| = \frac{\lambda}{bv} \int_{-\phi_a}^{\phi_a} \cos \phi d\phi = \frac{2\lambda}{bv} \cos \frac{\theta}{2}$$

όπου στην τελευταία έγινε αντικατάσταση της $\theta = \pi - 2\phi_a$. Συγκρίνοντας με το πρώτο αποτέλεσμα έχουμε

$$b = \frac{2\lambda}{\mu v^2} \cot \frac{\theta}{2} \quad (5.64)$$

Παραγωγίζουμε ως προς θ την τελευταία και παίρνουμε

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{\lambda}{2\mu v^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

Αντικαθιστούμε τις δύο τελευταίες εκφράσεις στον τύπο της διαφορικής ενεργού διατομής (5.62) και λαμβάνουμε το τελικό αποτέλεσμα

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{kqQ}{4E \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \quad (5.65)$$

όπου αντικαταστήσαμε τη παράμετρο λ και ορίσαμε την ενέργεια $E = \frac{1}{2}\mu v^2$. Ο (5.65) είναι ο γνωστός τύπος του Rutherford.

5.3 Ασκήσεις

1. Θα παραγάγουμε τη λύση των τροχιών στο βαρυτικό δυναμικό από το ολοκλήρωμα (??). Αντικαθιστούμε το ενεργό δυναμικό και έχουμε

$$d\phi = \pm \frac{1}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2\mu k}{L^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}}}$$

Κάνουμε τους μετασχηματισμούς

$$\begin{aligned} q^2 &= \frac{2\mu E}{L^2} + \frac{\mu^2 k^2}{L^2} \\ \omega^2 &= \left(\frac{1}{r} - \frac{\mu k}{L^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.66)$$

και τότε η εξίσωση λαμβάνει τη μορφή

$$d\phi = \pm \frac{1}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{q^2 - \omega^2}} = \mp \frac{d\omega}{\sqrt{q^2 - \omega^2}}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε

$$\omega = q \cos \theta \quad (5.67)$$

και η εξίσωση μετατρέπεται στην ακόλουθη

$$d\phi = \pm \frac{q \sin \theta d\theta}{\sqrt{q^2 - q^2 \cos^2 \theta}} = \pm \frac{\sin \theta d\theta}{|\sin \theta|}$$

δηλαδή, $d\phi = d\theta$ Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε

$$\phi - \phi_0 = \theta$$

άρα

$$\omega = q \cos(\phi - \phi_0)$$

Αντικαθιστούμε τα ω, q από τους ορισμούς και λαμβάνουμε

$$\frac{1}{r} - \frac{\mu k}{L^2} = \sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \frac{\mu^2 k^2}{L^4}} \cos(\phi - \phi_0)$$

Επιλύουμε ως προς r και έχουμε τη λύση

$$r = \frac{\frac{L^2}{\mu k}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}} \cos(\phi - \phi_0)}$$

η οποία ταυτίζεται με τη λύση της διαφορικής εξίσωσης.

2. Η Διαφορική Εξίσωση της κίνησης σε δυναμικό για κεντρική δύναμη $F(r)$ με ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο t γράφεται

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{L^2}{mr^3} + F(r)$$

Δείξτε ότι η αντίστοιχη εξίσωση με ανεξάρτητη μεταβλητή τη γωνία ϕ στο επίπεδο της κίνησης είναι της μορφής

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + \kappa u + \lambda f(u) = 0$$

και υπολογίστε τη σταθερά κ και την $f(u)$ ως προς την αρχική $F(r)$. Αν

$$F(r) = -k \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\ell}{r^3} \right)$$

όπου k, ℓ κατάλληλες θετικές σταθερές, να βρεθεί η $r(\phi)$.

3. Ένα συχνό φαινόμενο είναι η αλλαγή τροχιάς δορυφόρου. Θα θεωρήσουμε δορυφόρο σε ελλειπτική τροχιά με εκκεντρότητα ϵ και ταχύτητα v στο περίγειο. Έστω ότι στιγμιαία ώθηση αλλάζει την ταχύτητα σε v' . Να βρεθεί η εκκεντρότητα της νέας τροχιάς.
4. Η οικονομικότερη λύση για τη μετάβαση διαστημοπλοίου από τη Γή στον Άρη είναι να ακολουθήσει ελλειπτική τροχιά (Hohmann). Συγκεκριμένα, η Γη αποτελεί το περιήλιο της τροχιάς και ο Άρης το αφήλιο. Θεωρείστε ότι οι τροχιές περιφοράς της Γης και του Άρη γύρω από τον Ήλιο είναι κυκλικές με ακτίνες R_e, R_a . Με τα δεδομένα αυτά, υπολογίστε το χρόνο που απαιτείται να φτάσει το διαστημόπλοιο στον Άρη. Δίδεται $R_e = 1 A.U., R_a = 1.5 A.U.$
5. Στα προβλήματα επίλυσης της εξίσωσης της τροχιάς έχουμε συχνά τη γενική μορφή Δ.Ε. δεύτερης τάξης

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = f(\phi) \quad (5.68)$$

όπου $f(\phi)$ γνωστή συνάρτηση. Ορίζουμε την παράγωγο αυτής ως μια νέα συνάρτηση $v = u'$. Το σύστημα των δύο Δ.Ε. πρώτης τάξης

$$\begin{aligned} \frac{du(\phi)}{d\phi} &= v(\phi) \\ \frac{dv(\phi)}{d\phi} &= -u(\phi) + f(\phi) \end{aligned} \quad (5.69)$$

είναι ισοδύναμο με την (5.68) όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί παίρνοντας την παράγωγο της πρώτης και αντικαθιστώντας στη δεύτερη.

Στη συνέχεια ορίζουμε

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, w_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ f(\phi) \end{pmatrix}$$

Τότε η (5.69) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\frac{d}{d\phi} w(\phi) = J w(\phi) + w_0(\phi)$$

η οποία έχει τη λύση

$$w(\phi) = e^{J\phi} \left[a_0 + \int^{\phi} e^{-J\phi'} w_0(\phi') d\phi' \right]$$

όπου $a_0 = \begin{pmatrix} c_0 \\ d_0 \end{pmatrix}$ σταθερό διάνυσμα. Όμως

$$e^{J\phi} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, e^{-J\phi} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (5.70)$$

Το ολοκλήρωμα της λύσης γίνεται

$$\begin{aligned} \int^{\phi} e^{-J\phi'} w_0(\phi') d\phi' &= \int^{\phi} \begin{pmatrix} \cos \phi' & -\sin \phi' \\ \sin \phi' & \cos \phi' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(\phi') \end{pmatrix} d\phi' \\ &= \begin{pmatrix} -\int^{\phi} \sin \phi' f(\phi') d\phi' \\ +\int^{\phi} \cos \phi' f(\phi') d\phi' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -I_s(\phi) \\ I_c(\phi) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.71)$$

Επομένως η λύση μπορεί να γραφεί

$$u(\phi) = c_0 \cos \phi + d_0 \sin \phi - I_s \cos \phi + I_c \sin \phi \quad (5.72)$$

5.4 Ασκήσεις εφ' όλης της εως τώρα διδαχθείσας ύλης

1. Από πυροβόλο όπλο εξέρχονται βλήματα προς όλες τις κατευθύνσεις με ταχύτητα v_0 . Δείξτε ότι μπορεί να κτυπήσει στόχο σε κάθε σημείο εντός της

$$z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}(x^2 + y^2)$$

2. Μικρή σφαιρική μπάλα εκτινάσσεται κάθετα με ταχύτητα v_0 και υφίσταται αντίσταση αέρα ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας cv^2 . Δείξτε ότι η εξίσωση κίνησης μπορεί να γραφεί

$$\dot{v} = -g(1 + v^2/v_\tau^2)$$

Κάνοντας χρήση της $d/dt = v dv/dz$ δείξτε ότι

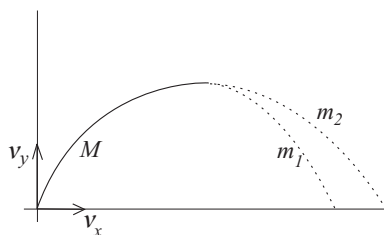
$$z_{max} = \frac{v_\tau^2}{2g} \ln \left(1 + \frac{v_0^2}{v_\tau^2} \right)$$

Δείξτε ότι ο χρόνος να φτάσει στην κορυφή είναι

$$t = \frac{v_\tau}{g} \arctan(v_0/v_\tau)$$

3. Βλήμα μάζας M εκτοξεύεται από το οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $\vec{v} = (v_x, v_y)$. Στο μέγιστο ύψος της τροχιάς του διασπάται σε δύο σώματα m_1, m_2 (όπου $M = m_1 + m_2$). Τη στιγμή της διάσπασης δύο νεα σώματα κινούνται κινούνται οριζόντια. (βλ σχ.5.10.) Κατά τη στιγμή της διάσπασης έχουμε αύξηση της κινητικής ενέργειας (π.χ. από την εσωτερική ενέργεια του αρχικού βλήματος) κατά $K_\delta = \frac{1}{2}\mu v_0^2$ όπου $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ η ανηγμένη μάζα και v_0 γνωστή παράμετρος με διαστάσεις ταχύτητας. Να υπολογιστεί η απόσταση των βλημάτων m_1, m_2 κατά την πρόσκρουση στο έδαφος.
4. Να βρεθεί το κέντρο μάζας ημισφαιρίου ομοιόμορφης πυκνότητας.
5. Υποθέστε ότι πύραυλος που εκτοξεύεται κάθετα σε πεδίο βαρύτητας εκπέμπει καυσίμο σε σταθερό ρυθμό $\frac{dm}{dt} = k$. Δείξτε ότι

$$z(t) = v_\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 - v_\alpha \frac{m}{k} \ln \frac{m_0}{m}$$



Σχήμα 5.10: Ενδεικτικές τροχιές των σωμάτων πριν και μετά τη διάσπαση

6. Από τη λύση της εξίσωσης κίνησης για την τροχιά σώματος σε βαρυτικό πεδίο

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \phi}$$

για $\epsilon = 1$ παράγετε την παραβολική εξίσωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες και για $\epsilon > 1$ την καρτεσιανή μορφή της εξίσωσης υπερβολής.

7. Σώμα m διαγράφει τροχιά που δίδεται από την εξίσωση $r = k\phi$, όπου ϕ η πολική γωνία και k σταθερά. Εξετάστε εάν η δύναμη είναι κεντρική. Σχεδιάστε την τροχιά.
8. Η τροχιά ενός κομήτη έχει εκκεντρότητα $\epsilon = 0.618$ και η πιό απομαρυσμένη απόστασή του από τον Ήλιο (αφήλιον) είναι 2.618 AU. Ποιά είναι η απόστασή του στο περιήλιον;
9. Για διατηρητική δύναμη \vec{F} το έργο σε κλειστή διαδρομή είναι μηδέν $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$. Βρείτε μια συνθήκη επί της \vec{F} μέσω του θεωρήματος Stokes.
10. Να γραφεί μια έκφραση υπό μορφή ολοκληρώματος για το δυναμικό που δημιουργείται από κυκλικό δακτύλιο ακτίνας R ομοιόμορφης κατανομής μάζας ευρισκόμενο επί του επιπέδου xy με κέντρο στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Να υπολογιστεί το δυναμικό για σημείο επί του άξονα z .

Λύση Ας θεωρήσουμε το σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε το σημείο P στον τρισδιάστατο χώρο προβάλλεται επί του άξονα x . Έστω επίσης στοιχειώδες μήκος $d\ell = R d\phi$ και μάζα $dm = \sigma R d\phi$ περί το σημείο Q . Οι συντεταγμένες των σημείων δίδονται από

$$OQ = (R \cos \phi, R \sin \phi, 0) \quad (5.73)$$

$$OP = (x, 0, z) \quad (5.74)$$

Η απόσταση QP μεταξύ των σημείων δίδεται τότε από

$$\begin{aligned} r = |OP - OQ| &= \sqrt{(x - R \cos \phi)^2 + R^2 \sin^2 \phi + z^2} \\ &= \sqrt{x^2 + R^2 - 2xR \cos \phi + z^2} \end{aligned} \quad (5.75)$$

Το στοιχείο dm δημιουργεί δυναμικό στο P ίσο με

$$dU = -G_N \frac{dm}{r} = -G_N \sigma R \frac{d\phi}{r}$$

Το συνολικό δυναμικό προκύπτει από το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} U &= -G_N \sigma R \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{x^2 + R^2 - 2xR \cos \phi + z^2}} \\ &= -2G_N \sigma R \int_0^\pi \frac{d\phi}{\sqrt{x^2 + R^2 - 2xR \cos \phi + z^2}} \end{aligned} \quad (5.76)$$

Ορίζουμε στη συνέχεια τη μέγιστη και ελάχιστη απόσταση του σημείου P από τα αντιδιαμετρικά του κυκλικού δακτυλίου επί του άξονα x

$$a^2 = (x + R)^2 + z^2 \quad (5.77)$$

$$b^2 = (x - R)^2 + z^2 \quad (5.78)$$

Λαμβάνοντας το ημίθροισμα και την ημιδιαφορά των παραπάνω καταλήγουμε

$$\frac{a^2 + b^2}{2} = x^2 + R^2 + z^2, \quad \frac{a^2 - b^2}{2} = 2Rx$$

Τότε, ο τύπος για την απόσταση r λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{a^2 - b^2}{2} \cos \phi \\ &= a^2 \sin^2 \frac{\phi}{2} + b^2 \cos^2 \frac{\phi}{2} \end{aligned} \quad (5.79)$$

Στη συνέχεια κάνουμε την ακόλουθη αλλαγή μεταβλητής

$$\phi = \pi - 2\theta \rightarrow \theta = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

και η απόσταση r παίρνει τη μορφή

$$r^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta$$

Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα για το δυναμικό λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} U &= -2G_N \sigma R \int_{\pi/2}^0 \frac{-2d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \\ &= 4G_N \frac{\sigma R}{a} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \theta}} \end{aligned} \quad (5.80)$$

Συνεπώς για να υπολογίσουμε το δυναμικό αρκεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της τελευταίας εξίσωσης. Παρατηρούμε ότι αυτό εξαρτάται μόνο από το λόγο των σημείων b/a . Άρα, εάν βρεθεί η τιμή του ολοκληρώματος για συγκεκριμένο σημείο με λόγο b/a τότε γνωρίζουμε το δυναμικό για όλα τα σημεία που έχουν τον ίδιο λόγο αποστάσεων από τα A, B . Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν δεδομένο λόγο αποστάσεων από τα A, B είναι κύκλος που κείται στο επίπεδο (xz) με τα άκρα της διαμέτρου επί του άξονα x να ορίζονται από τις τομές της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας APB . Αν C το κέντρο του κύκλου και R_C η ακτίνα αυτού, οι αποστάσεις των A, B από το C ικανοποιούν τη συνθήκη $R_C^2 = (CA)(CB)$.

Για τα σημεία επί του άξονα z έχουμε $a = b$ και επομένως

$$U = G_N \frac{2\pi\sigma}{a} = G_N \frac{m}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

11. Πύραυλος μάζας m_0 και μάζα καυσίμων m_a εκτοξεύεται σε πεδίο βαρύτητας με σταθερό g . Η κίνηση προκαλείται από την καύση αερίων που εξέρχονται με σταθερό ρυθμό και ταχύτητα v_a . Υπολογίστε την ταχύτητα του πυραύλου ως συνάρτηση του χρόνου.
12. Σώμα m διαγράφει τροχιά που δίδεται από την εξίσωση $r = k\phi$, όπου ϕ η πολική γωνία και k σταθερά. Εξετάστε εάν η δύναμη είναι κεντρική. Σχεδιάστε την τροχιά.
13. Δεδομένη χρονική στιγμή ο πλανήτης Άρης μάζας M κινείται κατά προσέγγιση σε ευθεία επί του άξονα του σχήματος με ταχύτητα V ενώ διαστημόπλοιο $m \ll M$ πλησιάζει από την αντίθετη κατεύθυνση με ταχύτητα v . Το διαστημόπλοιο εκμεταλεύεται τη βαρυτική δύναμη του Άρη να περιστραφεί γύρω από αυτόν και να κατευθυνθεί προς την αντίθετη σε σχέση με την αρχική του κατεύθυνση. Να βρεθεί η τελική του ταχύτητα. Εξετάστε κατά πόσο έχει αλλάξει η κινητική του ενέργεια και εξηγήστε το αποτέλεσμα σας.

14. Σφαιρικό ουράνιο σώμα μάζας M περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω . Να βρεθεί η ελάχιστη πυκνότητα ώστε να μην αποσυντίθεται λόγω περιστροφής. Ναδειχθεί ότι η περίοδος περιστροφής είναι $T \geq \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}$.
15. Σώμα προσδεμένο στην άκρη νήματος ℓ ευρίσκεται σε οριζόντιο τραπέζι και εκτελεί κυκλική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα ω . Να βρεθούν η τάση του νήματος T , η στροφορμή και η κινητική ενέργεια. Στη συνέχεια μειώνουμε σταδιακά το μήκος του νήματος σε $\ell/2$. Βρείτε την κινητική ενέργεια της νέας τροχιάς.
16. Είδαμε ότι για διατηρητική δύναμη \vec{F} το έργο σε κλειστή διαδρομή C είναι μηδέν $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$. Κάνετε χρήση του θεωρήματος Stokes για να βρείτε μια συνθήκη επί της \vec{F} .
17. Αστήρ αρχικής μάζας M_0 απολλύει μάζα λόγω θερμοπυρηνικών αντιδράσεων με σταθερό ρυθμό $dM/dt = -\lambda$, $\lambda > 0$. Να βρεθεί η $g = g(t)$ και να γραφεί η δυναμική ενέργεια U σώματος m κοντά στην επιφάνειά του. Ναδειχθεί ότι η $E = T + U$ δεν διατηρείται.
18. Σε καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων ο τελεστής ∇ (τελεστής ανάδελτα ή *nabla*) γράφεται

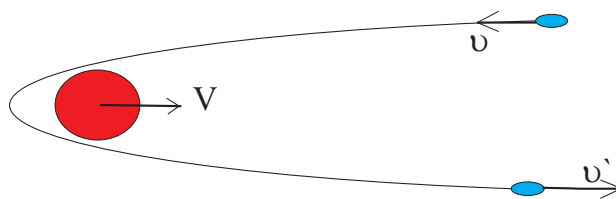
$$\nabla = \frac{\hat{e}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\hat{e}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\hat{e}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \quad (5.81)$$

όπου q_1, q_2, q_3 οι συντεταγμένες και $h_{1,2,3}$ οι συντελεστές κλίμακας

$$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right|$$

Για παράδειγμα, στις σφαιρικές

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \phi$$



Σχήμα 5.11: Το φαινόμενο της σφενδόνης (Gravity assist)

και τότε

$$\hat{e}_1 \rightarrow \hat{e}_r, \hat{e}_2 \rightarrow \hat{e}_\theta, \hat{e}_3 \rightarrow \hat{e}_\phi$$

Δείξτε ότι

$$h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \theta$$

19. Η Απόκλιση (*divergence*) διανύσματος στις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 h_1 h_2) \right]$$

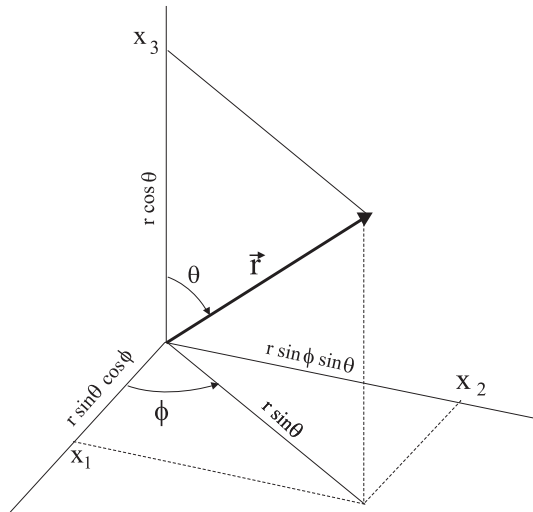
ενώ για το διάνυσμα γράφουμε

$$\vec{A} = A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3$$

Υπολογίστε την απόκλιση διατηρητικής σφαιρικά συμμετρικής δυνάμεως

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_r(r) \hat{e}_r$$

(Ενώ οι συνιστώσες $F_\theta = F_\phi = 0$).



Σχήμα 5.12: Οι σφαιρικές συντεταγμένες. Η γωνία θ μετρείται ως προς τον άξονα x_3 (δηλ. σε άλλο συμβολισμό των καρτεσιανών τον z) και η ϕ από τον x_1 (δηλαδή τον x) επί του επιπέδου $x_1 x_2$ (ή xy).

20. Ο στροβιλισμός (*curl* ή *rot*) διανυσματικής συνάρτησης \vec{A} με τη μορφή οριζουσας γράφεται

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{e}_1 & h_2 \hat{e}_2 & h_3 \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \quad (5.83)$$

Δείξτε ότι για την περίπτωση σφαιρικών συντεταγμένων γράφεται

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & r \hat{e}_2 & r \sin \theta \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix} \quad (5.84)$$

Υπολογίστε το στροβιλισμό διατηρητικής σφαιρικά συμμετρικής δυνάμεως

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_r(r) \hat{e}_r$$

- 21.

$$r(\phi) = r_0 (1 + a \cos \phi) \quad (5.85)$$

Να βρεθεί η μορφή της κεντρικής δύναμης (ή ο συνδυασμός κεντρικών δυνάμεων) που δημιουργεί μια τέτοια τροχιά. Ειδικότερα, δείξτε ότι είναι της μορφής

$$F = \frac{b}{r^p} + \frac{c}{r^q}$$

και υπολογίστε τις σταθερές ως προς τα r_0, a . Εξειδικεύστε για $a = 1$.

22. Να μελετηθεί η ευστάθεια των κυκλικών τροχιών σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων από δυναμικό της μορφής

$$U(r) = -k \frac{e^{-r/a}}{r}$$

k, a θετικές σταθερές.

23. Δορυφόρος ευρίσκεται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τη γή. Η τροχιά του περιγράφεται από την εξίσωση

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \phi}$$

με $\epsilon = 1/2$. Τη στιγμή που ευρίσκεται στο περίγειο, προσδίδεται επ' αυτού στιγμιαία ώθηση εφαπτομενικά της τροχιάς, που προξενεί αλλαγή της ταχύτητάς του $v \rightarrow v'$

$$v' = \frac{2}{\sqrt{3}} v$$

στην ίδια πάντα εφαπτομενική κατεύθυνση στο περίγειο. Περιγράψτε τη νέα κίνηση του δορυφόρου και γράψτε την εξίσωση της νέας τροχιάς του. Κάνετε την ίδια ανάλυση αν ο δορυφόρος υποστεί αντίθετη ώθηση και η νέα ταχύτητά του είναι

$$v' = \sqrt{\frac{2}{3}}v$$

24. Δορυφόρος έχει ταχύτητα $v = 8.5 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ στο περίγειό του που βρίσκεται 250Km πάνω από την επιφάνεια της γής. Να βρεθεί η εκκεντρότητα της τροχιάς του και το ύψος πάνω από τη γή στο απόγειό του.

5.5 Μη Αδρανειακά Συστήματα

Εως τώρα μελετήσαμε τους νόμους του Newton και τις εφαρμογές τους στα διάφορα φυσικά φαινόμενα σε αδρανειακά συστήματα. Όπως εξηγήσαμε ήδη από την αρχή, η μορφή των νόμων παραμένει αναλλοίωτη μόνο στα αδρανειακά συστήματα.

Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που είναι χρήσιμο να επιλύσουμε ένα πρόβλημα κίνησης σε μη αδρανειακό σύστημα. Για παράδειγμα, προτιμούμε να αναλύουμε την κίνηση ως προς το σύστημα αναφοράς της Γης, όμως ή Γη περιστρέφεται ως προς τον άξονά της και ταυτόχρονα εκτελεί κυκλική κίνηση. Για συνήθη προβλήματα, π.χ. με σώματα μικρών ταχυτήτων και βολές μικρών αποστάσεων η κίνηση της Γης μπορεί να αγνοηθεί. Όμως για μεγάλες ταχύτητες και αποστάσεις οι αποκλίσεις είναι σημαντικές και πρέπει να ληφθούν υπ' όψη.

Θα μελετήσουμε ξεχωριστά δύο περιπτώσεις αδρανειακών συστημάτων. Επιταχυνόμενα και περιστρεφόμενα.

5.5.1 Επιταχυνόμενα Συστήματα

Στο σχήμα (5.13) σχεδιάζουμε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ_0 και το επιταχυνόμενο Σ (π.χ. βαγόني τρένου) με επιτάχυνση \vec{a} όχι απαραίτητα σταθερή. Ας είναι επίσης σώμα μάζας m και ταχύτητας \vec{v} ως προς το Σ . Ισχύει

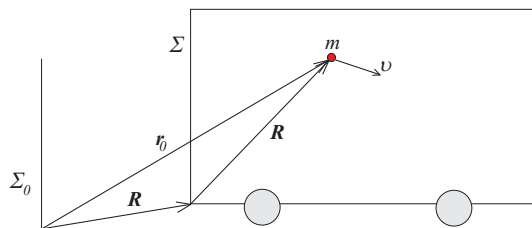
$$\vec{r}_0 = \vec{r} + \vec{R}$$

Για τον αδρανειακό παρατηρητή ο νόμος του Newton γράφεται

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}_0 \quad (5.86)$$

Αλλά

$$\ddot{\vec{r}}_0 = \ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{R}} = \ddot{\vec{r}}_0 + \vec{a}$$



Σχήμα 5.13: Μη αδρανειακό σύστημα Σ με επιτάχυνση $\vec{a} = \ddot{\vec{R}}$ ως προς το Σ_0

Αντικαθιστούμε, επιλύουμε ως προς τον όρο $m\ddot{\vec{r}}$ που διέπει την κίνηση ως προς το μη αδρανειακό σύστημα οπότε

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} - m\vec{a} \quad (5.87)$$

Παρατηρούμε ότι σε σύγκριση με το νόμο του Newton (5.86) στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, εδώ στην παρούσα περίπτωση η εξίσωση κίνησης έχει τον επιπλέον όρο

$$\vec{F}_\alpha = -m\vec{a} \quad (5.88)$$

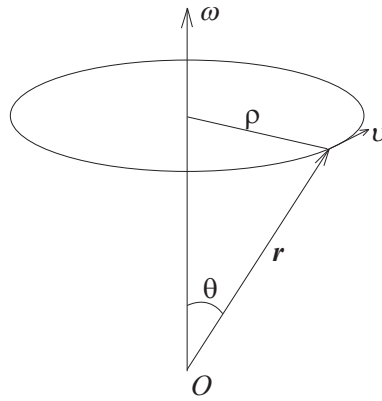
Η (5.88) καλείται αδρανειακή δύναμη και την αισθάνεται παρατηρητής που κινείται με το μη αδρανειακό σύστημα. Πολλές φορές καλείται επίσης και πλάσματική (fictitious) δύναμη διότι δεν προκύπτει από φυσικές αλληλεπιδράσεις.

5.5.2 Περιστρεφόμενα Συστήματα

Θα συνεχίσουμε με ανάλογη μελέτη σε περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων. Ας υποθέσουμε γιαυτό ότι έχουμε περιστρεφόμενο σώμα (π.χ. η Γη) με σταθερούς άξονες επί αυτού. Στην πραγματικότητα, η συνολική κίνηση στερεού μπορεί να είναι γενικότερη από περιστροφή. Στην περίπτωση αυτή, συνήθως ευρίσκεται η εξίσωση κίνησης του κέντρου μάζας και μετά αναλύεται η περιστροφική κίνηση ως προς αυτό. Δηλαδή, επί της ουσίας εξετάζεται η κίνηση ως προς σταθερό σημείο O του στερεού. Σύμφωνα όμως με θεώρημα του Euler, η γενικότερη κίνηση ως προς ένα τέτοιο σταθερό σημείο O , είναι περιστροφή ως προς άξονα διερχόμενο από το O . Άρα, για την μελέτη αυτή αρκεί να καθορίσουμε τον άξονα περιστροφής. Επ' αυτού ορίζουμε διάνυσμα $\vec{\omega} = \omega\hat{n}$ του οποίου το μέτρο ω είναι τη γωνιακή ταχύτητα περί τον άξονα.

Στο σχήμα 5.15 δείχνεται μια απλή αναπαράσταση του άξονα περιστροφής από σταθερό σημείο O του στερεού σώματος, ενώ υλικό σημείο του σώματος εκτελεί κυκλική κίνηση με ταχύτητα

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



Σχήμα 5.14: Π...

Υπάρχει μια αντίστοιχη χρήσιμη σχέση για κάθε διάνυσμα προσαρτημένο στο μη-αδρανειακό σύστημα. Έτσι, αν για παράδειγμα \hat{e} είναι μοναδιακό διάνυσμα προσδεμένο στο μη-αδρανειακό σύστημα, τότε, ο ρυθμός μεταβολής του από το αδρανειακό παρατηρητή είναι

$$\frac{d\hat{e}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e} \quad (5.89)$$

5.5.3 Παράγωγοι σε περιστρεφόμενα Συστήματα

Θεωρούμε αδρανειακό σύστημα Σ_0 και περιστρεφόμενο Σ με κοινή αρχή. Το Σ περιστρέφεται με σταθερή $\vec{\omega}$ ως προς το Σ_0 . Θεωρούμε αυθαίρετο διάνυσμα \vec{A} και ζητούμε να συσχετίσουμε τους ρυθμούς μεταβολής του στα δύο συστήματα.

Ορίζουμε

$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_0$: Ρυθμός μεταβολής στο Σ_0

$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)$: Ρυθμός μεταβολής στο Σ

Αν $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ τα μοναδιαία διανύσματα στο σύστημα Σ , το διάνυσμα γράφεται

$$\vec{A} = A_i \hat{e}_i \quad (5.90)$$

και η παράγωγος

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_i}{dt} \hat{e}_i \quad (5.91)$$

Όμως, για παρατηρητή στο αδρανειακό σύστημα τα \hat{e}_i μεταβάλλονται, επο-

μένως η παράγωγος του \vec{A} ως προς το αδρανειακό σύστημα είναι

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_0 = \frac{dA_i}{dt}\hat{e}_i + A_i\frac{d\hat{e}_i}{dt} \quad (5.92)$$

Με τη χρήση της (5.89) ο δεύτερος όρος στο δεύτερο μέλος γράφεται

$$A_i\frac{d\hat{e}_i}{dt} = A_i(\vec{\omega} \times \hat{e}_i) = \vec{\omega} \times (A_i\hat{e}_i) = \vec{\omega} \times \vec{A}$$

Αντικαθιστούμε και λαμβάνουμε

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_0 = \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A} \quad (5.93)$$

5.5.4 Η εξίσωση κίνησης

Στο αδρανειακό σύστημα ο δεύτερος νόμος του Newton γράφεται

$$m\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_0 = \vec{F} \quad (5.94)$$

Η παράγωγος για το διάνυσμα θέσης γράφεται

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_0 = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (5.95)$$

Στην (5.94) χρειαζόμαστε τη δεύτερη παράγωγο. Θα υποθέσουμε περιστρεφόμενο σύστημα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\dot{\vec{\omega}} = 0$ (η γενίκευση είναι απλή). Τότε

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_0 &= \left(\frac{d}{dt}\right)_0 \left(\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}\right) \\ &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned} \quad (5.96)$$

Η σχέση μας δίνει την επιτάχυνση ως προς τις περιστρεφόμενες συντεταγμένες. Συγκεκριμένα το δεξιό μέλος της εξίσωσης περιλαμβάνει τους ακόλουθους όρους

- Ο όρος $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ είναι η επιτάχυνση που μετρείται στο περιστρεφόμενο σύστημα
- Ο όρος $2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$ είναι η επιτάχυνση λόγω της εμφάνισης της δύναμης *Coriolis* στο περιστρεφόμενο σύστημα
- Ο όρος $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση. Το διάνυσμα βρίσκεται κατά μήκος της ακτίνας και η κατεύθυνση είναι προς το κέντρο περιστροφής.

Ο νόμος του Newton παίρνει τότε τη μορφή

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (5.97)$$

Από την θέση του παρατηρητή του περιστρεφόμενου συστήματος είναι

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \vec{F} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \vec{F} + \vec{F}_C + \vec{F}_\varphi \end{aligned} \quad (5.98)$$

- Η δύναμη $\vec{F}_C = -2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$ είναι η δύναμη *Coriolis*
- Ο όρος $\vec{F}_\varphi = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ είναι η φυγόκεντρη δύναμη. Το διάνυσμα έχει ακτινική κατεύθυνση από το κέντρο προς τα έξω.

Οι $\vec{F}_C, \vec{F}_\varphi$ είναι πλασματικές (fictitious) δυνάμεις με την έννοια ότι προκύπτουν από την κινηματική (τις "αισθάνεται" ο παρατηρητής στο περιστρεφόμενο σύστημα) και όχι από πραγματική αλληλεπίδραση. Για παράδειγμα, η φυγόκεντρη δύναμη αυξάνει με την ακτίνα ενώ κάθε φυσική δύναμη στη βαρύτητα μειώνεται.

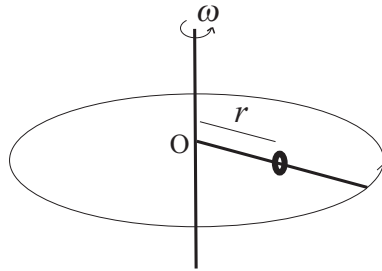
5.5.5 Ασκήσεις

1. Δίδεται η εξίσωση τροχιάς $r = a(1 + \sqrt{3/2} \cos \phi)$ σώματος m . Να βρεθεί η δύναμη που διέπει την κίνηση του m .
2. Βρείτε τις πιθανές τροχιές για $F = k/r^3$, $k < 0$.
3. Σώμα m έχει τροχιά $r \cdot \phi = C$, C σταθερά. Βρείτε το δυναμικό και τη δύναμη ως συνάρτηση του r .
4. Η διαφορική ενεργός διατομή για σκέδαση 6.5 MeV σωματιδίων άλφα σε γωνία 120° που προσπίπτουν πάνω σε φύλλο πάχους $d = 1\mu m$ είναι 0.5 barns/sr . Αν $N_\pi = 10^{10}$ πόσα σωματίδια μετρούμε σε επιφάνεια $\Delta A = 0.1mm^2$ γύρω από τη γωνία 120° και σε απόσταση 1cm πίσω από το ελασμα? Δίδεται $\rho = 10.5 \times 10^3 Kg/m^3$ ατομική μάζα 108.
5. Κυλινδρικό δοχείο με νερό περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από κάθετο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της βάσης του. Να δειχθεί ότι η επιφάνειά του

$$z = \frac{\omega^2}{2g} \rho^2$$

όπου z το ύψος και ρ η κάθετη απόσταση (ακτίνα) από τον άξονα περιστροφής.

6. Οριζόντιος βραχίονας περιστρέφεται γύρω από κάθετο άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Στο βραχίονα κυλά μικρή χάνδρα χωρίς τριβές. Αν $r(0) = 0, v(0) = v_0$ είναι οι αρχικές συνθήκες για τη χάνδρα, να βρεθεί η εξίσωση κίνησης και να λυθεί. Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκείται σε αυτή από το βραχίονα.
7. Μικρή σφαίρα αφήνεται να πέσει στην επιφάνεια της Γης από ύψος $h = 180\text{m}$ και γωνία $\theta = \frac{\pi}{6}$ μετρούμενη από το Βόρειο Πόλο. Υπολογίστε την κατεύθυνση ως προς τα σημεία του ορίζοντα και την απόκλιση από την κατακόρυφη που θα χτυπήσει τη Γη. Βρείτε τη θέση για τη μέγιστη απόκλιση.
8. Θεωρούμε περιστρεφόμενη στεφάνη ακτίνας R γύρω από άξονα κατά την κάθετη διάμετρό της, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω . Μικρό δακτυλίδι (χάνδρα) μάζας m μπορεί να κινείται περιμετρικά χωρίς τριβή στην στεφάνη. Να βρεθούν οι πιθανές θέσεις ισορροπίας του δακτυλιδιού. Υποθέστε μικρές διαταραχές γύρω από τις θέσεις ισορροπίας και μελετήστε την εξίσωση κίνησης. Συμπεράνετε από αυτό για την ευστάθεια των λύσεων.



Σχήμα 5.15: Η χάνδρα δέχεται δύναμη Coriolis κάθετη στη δοκό

9. Έντομο μάζας m κινείται ακτινικά πάνω σε οριζόντια περιστρεφόμενο δίσκο με σταθερό $\vec{\omega}$ γύρω από κάθετο άξονα διερχόμενο από το κέντρο του. Να υπολογιστεί η συνολική δύναμη που δέχεται το έντομο.
1. Βλήμα μάζας M εκτοξεύεται από το οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $\vec{v} = (v_x, v_y)$. Στο μέγιστο ύψος της τροχιάς του διασπάται σε δύο σώματα m_1, m_2 (όπου $M = m_1 + m_2$, βλ. σχήμα (α)). Τη στιγμή της διάσπασης οι αρχικές ταχύτητες των m_1, m_2 είναι οριζόντιες. Ταυτόχρονα έχουμε αύξηση της συνολικής κινητικής ενέργειας (π.χ. από την εσωτερική ενέργεια του αρχικού βλήματος) κατά $K_\delta = \frac{1}{2}\mu v_0^2$ όπου $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$

η ανηγμένη μάζα και v_0 γνωστή παράμετρος με διαστάσεις ταχύτητας. Να υπολογιστεί η οριζόντια απόσταση των βλημάτων m_1, m_2 κατά την πρόσκρουση στο έδαφος.

2. Η ακτίνα της τροχιάς σώματος δίδεται ως συνάρτηση της γωνίας από

$$r(\phi) = k \phi^n, \quad \mu \in k, n > 0$$

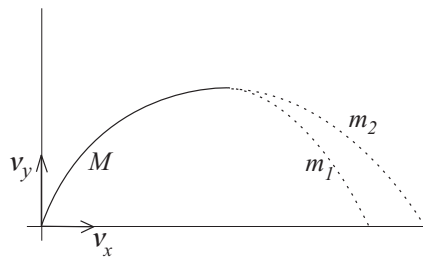
Να βρεθεί η μορφή της δύναμης ως συνάρτηση της ακτίνας $F = F(r)$ που διέπει την κίνηση του σώματος. Επιλέξτε μια τιμή του n για την οποία υπάρχει καλώς ορισμένη συνάρτηση δυναμικού $U(r)$ και υπολογίστε την U . Σχεδιάστε προσεγγιστικά την τροχιά. (Δίδεται $u'' + u = -\mu/(uL)^2 F(1/u)$.)

3. Οι λύσεις της εξίσωσης του αποσβενόμενου ταλαντωτή $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ είναι

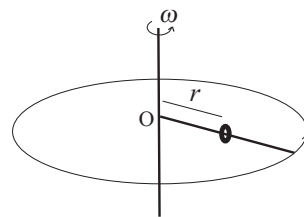
$$x(t) : i) (a + bt)e^{-\alpha t}, \quad ii) e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t - \delta), \quad iii) e^{-\alpha t} \sinh(\beta t),$$

Περιγράψτε εν συντομία τις ανωτέρω τρεις περιπτώσεις. Σχεδιάστε κατά προσέγγιση το πλάτος στην περίπτωση της ασθενούς απόσβεσης και υπολογίστε τη χρονική στιγμή που το πλάτος γίνεται μέγιστο. Χρησιμοποιείτε τις κατάλληλες από τις ακόλουθες αρχικές συνθήκες $a = 1, b = 1, \delta = \frac{\pi}{2}, \alpha = \frac{\omega_0}{2}$. (Δίδονται $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 = -\beta^2$.)

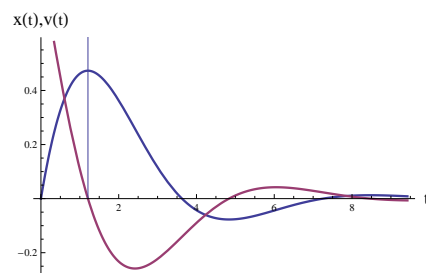
4. Οριζόντιος βραχίονας περιστρέφεται γύρω από κάθετο άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Στο βραχίονα κυλά μικρή χάνδρα χωρίς τριβές. Αν $r(0) = 0, v(0) = v_0$ είναι οι αρχικές συνθήκες για τη χάνδρα, να βρεθεί η εξίσωση κίνησης και να λυθεί. Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκείται στη χάνδρα από το βραχίονα.



(α)



(β)



Σχήμα 5.16: Πλάτος και ταχύτητα στην αποσβενώμενη ταλάντωση.