ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ)

1. Χρησιμοποιώντας τον ακριβή ορισμό του ορίου ακολουθίας, δείξτε ότι

$$(\alpha)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+1} = 2 \qquad (\beta)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+2n-4} = 0 \qquad (\gamma)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1+2\cdot 10^n}{5+3\cdot 10^n} = \frac{2}{3}$$

2. Προσδιορίστε αν οι παρακάτω ακολουθίες είναι αύξουσες ή φθίνουσες. Βρείτε το ελάχιστο άνω φράγμα και το μέγιστο κάτω φράγμα, αν υπάρχουν.

$$(\alpha)\ a_n = \frac{3n+1}{n+1} \qquad (\beta)\ a_n = \frac{(2n+3)!}{(n+1)!} \qquad (\gamma)\ a_n = \frac{2^n 3^n}{n!} \qquad (\delta)\ a_n = 2 - \frac{2}{n} - \frac{1}{2^n}$$

$$(\varepsilon)\ a_n = \frac{n+1}{n} \qquad (\sigma\tau)\ a_n = \frac{1+\sqrt{2n}}{\sqrt{n}} \qquad (\zeta)\ a_n = \frac{1-4^n}{2^n}$$

3. Βρείτε ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες συγκλίνουν. Υπολογίστε το όριο κάθε συγκλίνουσας ακολουθίας.

$$(\alpha)\ a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} \qquad (\beta)\ a_n = \frac{1-(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad (\gamma)\ a_n = \sin n\pi \qquad (\delta)\ a_n = \frac{\ln(2n^3+1)}{n}$$

$$(\varepsilon)\ a_n = \frac{(n+1)!}{n!} \qquad (\sigma\tau)\ a_n = \frac{n+3}{n^2+5n+6} \qquad (\zeta)\ a_n = \frac{n!}{n^n} \qquad (\eta)\ a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/(\ln n)}$$

$$(\vartheta)\ a_n = \frac{3^n 6^n}{2^{-n} n!} \qquad (\iota)\ a_n = \frac{n^2}{2n-1}\sin\frac{1}{n} \qquad (\iota\alpha)\ a_n = \sqrt[n]{n^2+n} \qquad (\iota\beta)\ a_n = n - \sqrt{n^2-n}$$

4. Έστω οι ακολουθίες a_n και b_n για τις οποίες ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ και $\lim_{n\to\infty} b_n = K$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = L + K$.

5. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, αποδείξτε ότι:

$$(\alpha)\ 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \qquad (\beta)\ (1+x)^n \geq 1 + nx,\ \text{όπου } x \geq 0$$

(γ) Αν μια ακολουθία a_n ικανοποιεί την $a_1 = a_2 = 4$ και την $a_{n+1}a_{n-1} = (a_n - 6)(a_n - 12)$ για $n = 2, 3, ...$, τότε η a_n είναι σταθερή.

(δ) Για κάθε φυσικό αριθμό n, ο $u_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$ είναι φυσικός αριθμός.

6. (α) Έστω ακολουθία x_n με αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 1}$. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, μελετήστε τη ως προς το όριο ανάλογα με το αν $x_1 = 1$ ή $x_1 = 3$.

(β) Αν $p > 1$, δείξτε, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής, ότι $px^{p-1} < (x+1)^p - x^p < p(x+1)^{p-1}$ για κάθε $x \geq 0$. Κατόπιν, υπολογίστε το όριο της ακολουθίας $\frac{1^{p-1} + 2^{p-1} + ... + n^{p-1}}{n^p}$.