

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ΣΕΙΡΕΣ)

1. Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$(\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k + 5^k}{5^k + 6^k} \quad (\beta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{2n}(2n)!} \quad (\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \quad (\delta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

2. (α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}$

(β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συγκλίνει απολύτως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n+1)(2x+1)^n}$

3. Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+4)!}{4!n!4^n} \quad (\beta) \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{k \ln k} \quad (\gamma) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2 2^k}{(2k+2)!} \quad (\delta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n^2+n}}$$

4. Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n} \quad (\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{2n+1} \right)^{2n-1} \quad (\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} \quad (\delta) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

5. Εξετάστε αν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν απολύτως, συγκλίνουν υπό συνθήκη ή αποκλίνουν:

$$(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad (\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)} \quad (\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!} \quad (\delta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2+1)}{2n^2+n-1}$$

6. (α) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ που ορίζεται από τις σχέσεις:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)} a_n$$

(β) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ που ορίζεται από τις σχέσεις:

$$a_1 = a_2 = 7, \quad a_{n+1} = \frac{n}{(n-1)(n+1)} a_n, \quad \text{για } n \geq 2$$

(γ) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}$