

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ, ΣΕΙΡΕΣ TAYLOR, ΣΕΙΡΕΣ MACLAURIN)

1. Υπολογίστε τα διαστήματα σύγκλισης των παρακάτω δυναμοσειρών:

$$(α) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{\sqrt{2n+1}} x^n \quad (β) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{\sqrt{n^3+1}} x^n \quad (γ) \sum_{n=1}^{\infty} n! x^n \quad (δ) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} x^n$$

2. Υπολογίστε τους τρεις πρώτους μη μηδενικούς όρων στις σειρές MacLaurin των:

$$(α) \sin x \quad (β) \cos x \quad (γ) e^x \quad (δ) \ln(1+x) \quad (ε) (1+x)^m \quad m \text{ σταθερά}$$

3. Με χρήση των σειρών MacLaurin της άσκησης 2, υπολογίστε τους τρεις πρώτους μη μηδενικούς όρους στις σειρές των:

$$(α) \cos^2 x \quad (β) \sin x^3 \quad (γ) e^{3x} \cos 2x \quad (δ) \ln(1+3x^2) \quad (ε) \sqrt{1-x^3}$$

4. Βρείτε τα παρακάτω όρια με χρήση σειρών MacLaurin

$$(α) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \quad (β) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x}{\cos x - 1} \quad (γ) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

5. Για ποιες τιμές του x μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $\sin x$ με το $x - (x^3/3!)$ με σφάλμα μικρότερο (κατ' απόλυτη τιμή) του 3×10^{-4} ;