ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΠΕΔΙΟΥ (2015)

ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Καταληκτική ημερομηνία υποβολής 3-11-2015

Θέμα 1. Το *διάνυσμα Pauli-Lubansky* W^μ ορίζεται ως

$$W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\,\mathcal{J}^{\nu\lambda}\,P^\sigma\,,$$

όπου $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ και P^μ είναι οι γεννήτορες των μετασχηματισμών Lorentz και Poincare αντίστοιχα[1].

Αποδείξτε ότι

$$W_\mu P^\mu = 0, \quad [\,W_{mu},\,P_\nu\,] = 0\,.$$

Αποδείξτε ότι

$$W^2 = -\frac{1}{2}\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}P^2 + \mathcal{J}_{\mu\sigma}\mathcal{J}^{\nu\sigma}P^\mu P_\nu\,.$$

Αποδείξτε ότι οι τελεστές W^2 και P^2 μετατίθενται με όλους τους γεννήτορες της Ομάδας Poincare. Τέτοιοι τελεστές ονομάζονται *τελεστές Casimir*[2].

Θέμα 2. Θεωρήστε τους μετασχηματισμούς (dilatations)

$$x^\mu \to e^{-\alpha}\,x^\mu\,.$$

Δείξτε ότι ο γεννήτορας του μετασχηματισμού αυτού είναι ο

$$D = ix^\nu\partial_\nu\,.$$

[1]Οι γεννήτορες $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ εμπεριέχουν τό spin. Π.χ. για ένα διανυσματικό πεδίο έχουμε $\left(\mathcal{J}_{\rho\sigma}\right)^\nu{}_\mu = \mathcal{L}_{\rho\sigma}g^\nu_\mu + \left(J_{\rho\sigma}\right)^\nu{}_\mu = i\left(x_\rho\partial_\sigma - x_\sigma\partial_\rho\right)g^\nu_\mu + i\left(g^\nu{}_\rho g_{\sigma\mu} - g^\nu{}_\sigma g_{\rho\mu}\right)$.

[2]Ένα στοιχειώδες σωματίδιο είναι μια κατάσταση που θα πρέπει να έχει πάγια χαρακτηριστικά, τα οποία να μήν αλλάζουν από το ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς στο άλλο. Η ταξινόμηση των σωματιδίων συναρτήσει της μάζας τους και του spin αντιστοιχεί στο γεγονός ότι αυτά είναι ιδιοκαταστάσεις των P^2 και W^2. Μπορεί να δειχθεί ότι αν s είναι ο κύριος κβαντικός αριθμός του spin $W^2 \propto s(s+1)$.

Βρείτε τις σχέσεις μετάθεσης που ικανοποιεί ο D με την Άλγεβρα Poincare.

Θεωρήστε ένα βαθμωτό πεδίο $\phi(x)$ και τους συνδυασμένους μετασχηματισμούς

$$\begin{cases} x^\mu \,\to\, e^{-\alpha}\, x^\mu \\ \\ \phi(x) \,\to\, \phi'(x') \,=\, e^{\alpha}\phi(x) \end{cases}$$

Δείξτε ότι η Δράση

$$\mathcal{S}[\phi] \,=\, \int d^4x \, \left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 \,-\, \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \right)$$

είναι αναλλοίωτη στους μετασχηματισμούς αυτούς, πεπερασμένους και μη.

Θέμα 3. Αποδείξτε ότι το στοιχείο όγκου στον χώρο των ορμών

$$\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}\,,$$

όπου $\omega(k) = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$, είναι αναλλοίωτο σε ορθόχρονους μετασχηματισμούς Lorentz.

Θέμα 4. Θεωρήστε ένα αριστερόστροφο Weyl spinor $\psi(x)$. Δείξτε ότι η ποσότητα

$$i\psi^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi,$$

όπου $\sigma^\mu \,=\, (1,\, \vec{\sigma})$, είναι βαθμωτό μέγεθος.

Θεωρήστε τώρα το δεξιόστροφο spinor $\chi \,\equiv\, i\sigma_2\, \psi^*$ και δείξτε ότι

$$i\psi^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi \,=\, i\chi^\dagger \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi\,,$$

όπου $\overline{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma})$.

Θεωρήστε δύο διαφορετικά αριστερόστροφα Weyl spinors $\psi_1,\, \psi_2$ και δείξτε ότι

$$i\psi_1^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_1 + i\psi_2 \sigma^\mu \partial_\mu \psi_2 \,-\, m\, \psi_1 \cdot \psi_2 \,-\, h.c. \,=\, i\overline{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\overline{\Psi}\Psi\,,$$

όπου οι πίνακες 4×4 γ^μ ορίζονται ως

$$\gamma^\mu \,=\, \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \\ \overline{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \\ i\sigma_2\psi_2^* \end{pmatrix} \;\; \textbf{και} \;\; \overline{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0 \,.$$

Αποδείξτε ότι οι πίνακες γ^μ ικανοποιούν την κάτωθι σχέση αντιμετάθεσης

$$\{\,\gamma^\mu,\, \gamma^\nu\,\} = 2\, g^{\mu\nu}\,.$$

Θέμα 5. Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα που περιγράφει την αλληλεπίδραση ενός φορτισμένου βαθμωτού σωματιδίου (π.χ. π-μεσόνιο) με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (\partial_\mu\phi^* - ieA_\mu\phi^*)\,(\,\partial^\mu\phi + ieA^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi - \frac{\lambda}{4}(\phi^*\phi)^2\,,$$

όπου e, λ γνωστές παράμετροι (σταθερές ζεύξης) και m η μάζα των βαθμωτών σωματιδίων.

1) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης

2) Δείξτε ότι η $\mathcal{L}$ είναι αναλλοίωτη σε *τοπικους μετασχηματισμούς βαθμίδας* (gauge transformations)

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\Lambda, \quad \phi \to e^{-ie\Lambda}\phi\,,$$

όπου $\Lambda(x)$ αυθαίρετη συνάρτηση.

Θέμα 6. Οι γνωστές κλασσικές θεωρίες πεδίου που περιγράφουν τις θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις που δρουν σε μακροσκοπικό επίπεδο, δηλαδή η Κλασσική Ηλεκτροδυναμική και Θεωρία Βαρύτητας (Γενική Θεωρία Σχετικότητας) δεν προβλέπουν λύσεις για τα πεδία οι οποίες να έχουν τα χαρακτηριστικά *«σωματιδίων»*. Αντιθέτως προβλέπουν κυματικές λύσεις. Υπάρχουν όμως ειδικές περιπτώσεις στις οποίες μια κλασσική θεωρία πεδίου έχει λύσεις με σωματιδιακά χαρακτηριστικά. Τέτοιο είναι το ακόλουθο παράδειγμα:

Θεωρήστε ένα βαθμωτό πεδίο σε μια χωρική διάσταση $\phi(x,t)$ (χάριν απλότητος γιατί το παράδειγμα γενικεύεται άνετα και στις τρεις διαστάσεις) με πυκνότητα Lagrange

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{\phi}(x,t)\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\phi'(x,t)\right)^2 - V(\phi)\,.$$

Θεωρήστε επίσης και μια *στατική* υποψήφια λύση των εξισώσεων κίνησης της μορφής

$$\phi(x) = a\,\tanh(bx)\,,$$

όπου a, b παράμετροι.

1) Βρείτε την συνάρτηση δυναμικού $V(\phi)$ που θα πρέπει να έχουμε ώστε η $\phi(x)$ να είναι λύση των εξισώσεων κίνησης.

2) Υπολογίστε την σχετική πυκνότητα ενέργειας και διερευνείστε αν αυτή είναι μια εντοπισμένη συνάρτηση ως προς το x. Εάν ναι, σχολιάστε τα φυσικά χαρακτηριστικά αυτής της λύσης. Υπολογίστε την ενέργεια.